LICEUM OGÓLNOKSZTAŁCĄCE

MATEMATYKA

Henryk Pawłowski

1

ZAKRES ROZSZERZONY

Podręcznik

SERIA SZKOŁ XX

Wydawnictwo Pedagogiczne
OPERON

Henryk Pawłowski

MATEMATYKA 1

ZAKRES ROZSZERZONY

Podręcznik dla liceum ogólnokształcącego

Wydawnictwo Pedagogiczne
OPERON
Rumia 2002

Recenzje merytoryczne:
prof. dr hab. Jacek Jędrzejewski
dr hab. Marek Kordos

Projekt okładki: *Krzysztof Godlewski*
Redaktor prowadzący: *Sebastian Przybyszewski*
Redaktor wspomagający: *Anna Wierzchowska*
Redakcja językowa: *Hanna Kościelecka*
Redakcja graficzna: *Kamila Kwiek*
Zdjęcia: *Marek Jasiński*
Korekta techniczna: *Anna Wierzchowska*

Dziękujemy wszystkim doradcom metodycznym i nauczycielom, którzy brali udział w prowadzonych przez nasze wydawnictwo ogólnopolskich konsultacjach dydaktycznych. Szczególne podziękowania składamy: D. Gajdek, P. Pyrdołowi, M. Mrozikowskiej, M. Młynarczykowi, I. Rzeźnik, B. Jastrzębskiej, G. Romanowskiej.

Podręcznik dopuszczony do użytku szkolnego przez ministra właściwego do spraw oświaty i wychowania i wpisany do wykazu podręczników przeznaczonych do kształcenia ogólnego do nauczania matematyki w zakresie rozszerzonym na poziomie klasy I liceum ogólnokształcącego, na podstawie recenzji rzeczoznawców: dr hab. Marii Korcz – z rekomendacji Polskiego Towarzystwa Matematycznego, dr. hab. Marka Kordosa – z rekomendacji Uniwersytetu Warszawskiego, mgr. Jacka Stańdo – z rekomendacji Instytutu Matematyki Politechniki Łódzkiej oraz dr. Marka Gumkowskiego – z rekomendacji Instytutu Badań Literackich PAN.

Numer dopuszczenia 164/02

Wydawca:
Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
84-230 Rumia, ul. Dębogórska 44-46
tel. cetrali (0-58) 679 53 53
http://www.operon.pl
e-mail: info@operon.pl

Druk: 101 Druk

ISBN 83-87518-66-2

SPIS TREŚCI

Na lekcji matematyki
nie wszystko musi być ścisłe,
ale wszystko musi być jasne.
Z. Opial

Wstęp

Podręcznik ten przeznaczony jest dla uczniów klasy pierwszej nowego, trzyletniego liceum ogólnokształcącego, gdzie nauczanie matematyki odbywać się będzie w zakresie rozszerzonym.

Punktem wyjścia tego podręcznika jest program zgodny z podstawą programową nauczania matematyki, zaproponowaną przez Ministerstwo Edukacji Narodowej i Sportu. Podręcznik ten ma Tobie pomóc w systematycznym poznawaniu matematyki.

Książka ta obejmuje materiał nauczania podzielony na osiem działów, z których każdy tworzy kilka lub kilkanaście rozdziałów. Znajdziesz w nich nie tylko najważniejsze definicje i twierdzenia wyróżnione tłustym drukiem lub ujęte w ramkę, ale także wiele rysunków, ćwiczeń i przykładów ułatwiających zrozumienie poruszanych tematów. Każdy rozdział kończy lista pytań i zadań podsumowujących i utrwalających wyłożony materiał.

Niektóre z nich swoją treścią nawiązują do sytuacji z życia codziennego. Ewentualny niedosyt zadań proponowanych do samodzielnego rozwiązywania można będzie uzupełnić, korzystając ze zbioru zadań dołączonego do podręcznika.

Podręcznik ten będzie Tobie przyjazny, jeśli wykażesz się aktywnością. Korzystając z niego, miej zeszyt pod ręką, by wykonywać w nim wszelkie czynności związane z danym tekstem. Zadania próbuj rozwiązywać samodzielnie, a dopiero w razie niepowodzeń zaglądaj do rozwiązania podanego w tekście bądź na końcu podręcznika. Śledząc tok rozumowania zaprezentowany w podręczniku, nauczysz się nie tylko metod rozwiązywania zadań, ale także ich poprawnego redagowania. Niektóre z przytoczonych w nim zadań mają wyższy stopień trudności i dlatego są oznaczone gwiazdką.

Ten przyjazny Tobie podręcznik może sprawić, że matematyka wcale nie okaże się trudna.

Henryk Pawłowski

Objaśnienia piktogramów i oznaczeń

definicja

pytania i zadania

dowód twierdzenia

dowód wniosku, przykładu lub lematu

* zadania i przykłady o wyższym stopniu trudności

I. Elementy logiki matematycznej

1. Zdania

Zdania służą do wyrażania myśli i uczuć. Używamy ich także do przekazywania rozmaitych informacji. Nic więc dziwnego, że posługujemy się zdaniami różnego rodzaju. Na przykład zdania:

Pies jest najwierniejszym przyjacielem człowieka.
Czy odrobiłeś już lekcje?
Wynieś śmieci!
Ach, co to był za ślub!

różnią się między sobą formą. Pierwsze z nich jest zdaniem **orzekającym**, drugie – **pytającym**, trzecie – **rozkazującym**, czwarte – **wykrzyknikowym**.

Przedmiotem naszych rozważań będą jednak tylko te zdania, które coś orzekają, podają pewną wiadomość. Takim zdaniom można bowiem przypisać jedną z dwóch ocen: **prawdę** albo **fałsz**. Oceny te nazywamy wartościami logicznymi zdania. Prawdę oznaczać będziemy cyfrą **1**, a fałsz – cyfrą **0**.

Na przykład zdanie:
7 jest liczbą pierwszą, jest w arytmetyce zdaniem prawdziwym (ma zatem wartość logiczną 1).

Z kolei zdanie:
7 jest liczbą parzystą, jest w arytmetyce zdaniem fałszywym (ma wartość logiczną 0).

Natomiast zdanie:
7 jest liczbą szczęśliwą, choć orzekające, jest w arytmetyce zdaniem bezsensownym (ani prawdziwym, ani fałszywym), podobnie jak na przykład w geometrii zdanie: *Romb jest czworokątem brzydkim*.

Ale zdanie:
Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch liczb pierwszych, choć sensowne, ma nieznaną dotąd wartość logiczną. (Do dziś jest to nierozstrzygnięty problem!).

Zapamiętajmy więc:

> Zdaniem w logice albo zdaniem logicznym nazywamy każde zdanie orzekające, któremu można przypisać jedną z dwóch ocen: prawdę albo fałsz.

Zdania zwykle oznaczamy w logice małymi literami alfabetu łacińskiego: $p, q, r, s, t, \ldots$

Pytania i zadania

1. Co to jest zdanie w logice?
2. Podaj przykłady zdań logicznych.
3. Podaj przykład zdania, które nie jest zdaniem w logice.
4. Oceń wartość logiczną zdania:
   a) 2 jest jedyną liczbą pierwszą parzystą;
   b) 169 jest kwadratem liczby naturalnej;
   c) $\sqrt{3}$ jest liczbą wymierną;
   d) Gepard jest najszybszym ssakiem na świecie;

e) Gniezno jest stolicą Polski;
f) Jednostką natężenia prądu jest amper;
g) W. Reymont jako pierwszy z Polaków zdobył literacką Nagrodę Nobla;
h) Chlorek sodu jest chemiczną nazwą soli kuchennej;
i) Black po angielsku oznacza biały;
j) W 1364 roku założono Akademię Krakowską;
k) W każdy trójkąt można wpisać okrąg;
l) Na każdym czworokącie można opisać okrąg;
ł) W roku szkolnym 1998/1999 odbyła się w Polsce 50. Olimpiada Matematyczna.

2. Formy zdaniowe

Zdania:

1. *Liczba całkowita n jest parzysta.*
2. *X ma* 190 *cm wzrostu.*
3. *Y liczy* 1 500 000 *mieszkańców.*
4. *Kwadrat liczby x jest większy od* 0.

nie są zdaniami w sensie logicznym. Wszystkie zawierają zmienną, za którą możemy podstawiać odpowiednio: liczby całkowite, ludzi, miasta, liczby rzeczywiste. Wyrażenia takie nazywają się **formami zdaniowymi** (albo **funkcjami zdaniowymi**).

Dla każdej formy zdaniowej określamy zbiór przedmiotów, którymi zastępujemy zmienną. Zbiór ten nazywa się **dziedziną** lub **zakresem zmienności** formy zdaniowej.

Dla form zdaniowych:

1. *X jest pisarzem*,
2. *Liczba n jest podzielna przez* 5,
3. *X graniczy z Y*,
4. $3x-6<0$,
5. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

dziedzinami są odpowiednio:

1. zbiór wszystkich ludzi,
2. zbiór liczb całkowitych,
3. zbiór par państw,
4. zbiór liczb rzeczywistych,
5. zbiór par liczb rzeczywistych.

Zapamiętajmy zatem:

Formą zdaniową z jedną zmienną, określoną w dziedzinie *D*, nazywamy takie wyrażenie zawierające tę zmienną, które staje się zdaniem logicznym, gdy w miejsce zmiennej podstawimy dowolny element zbioru *D*.

Podobnie określamy formę zdaniową większej liczby zmiennych. Formy zdaniowe jednej zmiennej oznaczać będziemy przez $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, ..., a formy dwóch lub większej liczby zmiennych oznaczać będziemy przez $p(x,y)$, $q(x,y,z)$, $r(x,y,z,t)$, ...

Każde równanie i każda nierówność jest formą zdaniową. Na przykład równanie liniowe $ax + b = 0$, gdzie a i b są ustalone, jest formą zdaniową zmiennej x. Dziedziną tej formy zdaniowej jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych. Z kolei nierówność $\sqrt{x^2 - y^2} > x - y$ jest formą zdaniową dwóch zmiennych x i y, której dziedziną jest zbiór wszystkich takich par (x, y) liczb rzeczywistych, dla których $x^2 - y^2 \geqslant 0$.

Mówimy, że pewien element spełnia formę zdaniową, jeśli po podstawieniu go do niej w miejsce zmiennej otrzymamy zdanie prawdziwe.

Na przykład liczba 1 spełnia formę zdaniową $x^2 - 1 = 0$, a liczba 2 nie spełnia. Podobnie para $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ spełnia formę zdaniową $\sqrt{x^2 - y^2} > x - y$, a para $(2, 0)$ – nie.

Formę zdaniową nazywamy tożsamościową w zbiorze A, gdy spełnia ją każdy element tego zbioru. Na przykład forma zdaniowa $x^2 \geqslant 0$ jest tożsamościowa w zbiorze liczb rzeczywistych (kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny), a forma zdaniowa $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$ jest tożsamościowa w zbiorze par liczb rzeczywistych.

Formę zdaniową nazywamy sprzeczną w zbiorze A, gdy żaden element zbioru A nie spełnia tej formy. Takimi formami zdaniowymi w zbiorze liczb rzeczywistych są na przykład: $x^2 + 1 < 0$, $2(x + 1) = 2x + 1$.

Pytania i zadania

1. Co to jest forma zdaniowa z jedną zmienną oraz z więcej niż jedną zmienną?
2. Co to jest dziedzina formy zdaniowej?
3. Podaj przykłady form zdaniowych z jedną zmienną i z więcej niż jedną zmienną oraz określ w każdym z nich dziedzinę.
4. Co to znaczy, że element spełnia formę zdaniową?
5. Co to znaczy, że forma zdaniowa jest:
   a) tożsamościowa,
   b) sprzeczna?
   Podaj przykłady.
6. Określ dziedzinę każdej z następujących form zdaniowych:
   a) Rzeka R wpada do morza M;
   b) Miasto X jest stolicą państwa Y;
   c) Liczby całkowite a, b, c spełniają równanie $a^2 + b^2 = c^2$;
   d) Wyraz W ma n liter.
7. Które z poniższych form zdaniowych są tożsamościowe w swojej dziedzinie, a które sprzeczne:
   a) Liczba $n^2 - n$ jest parzysta;
   b) Liczba $n^3 - n$ dzieli się przez 6;
   c) $x^2 + y^2 < 0$;
   d) $x^2 + 1 = (x - 1)(x + 1)$;
   e) $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$?

3. Koniunkcja i alternatywa

Rozważane dotąd zdania i formy zdaniowe nazywane są pojedynczymi bądź prostymi. W logice matematycznej, podobnie jak w gramatyce, ze zdań prostych buduje się za pomocą tak zwanych spójników zdaniotwórczych zdania złożone. Analogicznie postępuje się z formami zdaniowymi prostymi. Obecnie zajmiemy się budową zdań i form zdaniowych złożonych.

Dwa zdania połączone spójnikiem **i** tworzą nowe zdanie – **koniunkcję**.

Na przykład zdanie: *Siedzę przy stole i czytam książkę* jest koniunkcją zdań: *Siedzę przy stole* oraz *Czytam książkę*.

Zastanówmy się teraz nad tym, kiedy koniunkcja dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym. Mówiąc, że *Siedzę przy stole i czytam książkę*, mam oczywiście na myśli, że zarówno siedzę przy stole, jak i czytam przy nim książkę. Twierdząc: 2 *jest dzielnikiem pierwszym liczby* 14 *i* 7 *jest dzielnikiem pierwszym liczby* 14, mamy na myśli, że 2 *i* 7 są dzielnikami pierwszymi liczby 14.

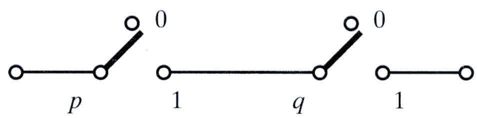
Zdanie: ***p* i *q*** nazywamy **koniunkcją** (iloczynem logicznym) zdań p i q i uznajemy ją za zdanie prawdziwe jedynie wtedy, gdy oba jej człony są zdaniami prawdziwymi.

Koniunkcję zdań p i q zapisujemy $p \wedge q$ (znak $\wedge$ czytamy: „i”)

Wartość logiczną koniunkcji podaje tabelka obok.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Koniunkcję łatwo można zinterpretować fizycznie (ryc. 1.1). Wyobraźmy sobie, że p i q oznaczają wyłączniki, z których każdy może być włączony (stan 1) albo wyłączony (stan 0). W stanie 1 wyłącznik przewodzi prąd, natomiast w stanie 0 – nie. Stan układu utworzonego przez połączenie szeregowe wyłączników p, q zależy od stanu wyłącznika p i od stanu wyłącznika q, podobnie jak wartość logiczna koniunkcji $p \wedge q$ zależy od wartości logicznych zdań p, q. Krótko mówiąc: **koniunkcję realizuje połączenie szeregowe**.



Ryc. 1.1.

Formę zdaniową $\boldsymbol{p(x) \wedge q(x)}$ nazywamy **koniunkcją form zdaniowych** $p(x), q(x)$.

Na przykład układ równań

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

jest koniunkcją form zdaniowych $2x + y = 5$ i $x + 2y = 4$.

Dwa zdania połączone spójnikiem **lub** tworzą **alternatywę**.

Na przykład zdanie: *W lesie zbieram grzyby lub słucham śpiewu ptaków* jest alternatywą zdań: *W lesie zbieram grzyby* oraz *Słucham śpiewu ptaków*.

Rozstrzygnijmy teraz, kiedy alternatywa dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym. Jeżeli powiem: *Pojadę rowerem do lasu lub będę słuchał muzyki*, to mam na myśli, że albo pojadę rowerem do lasu, albo będę słuchał muzyki, albo też uczynię i jedno, i drugie (mogę przecież pojechać rowerem do lasu i słuchać muzyki z walkmana).

Zdanie: ***p* lub *q*** nazywamy **alternatywą** (sumą logiczną) zdań p, q i uznajemy ją za zdanie prawdziwe, jeżeli przynajmniej jeden z jej członów jest zdaniem prawdziwym.

Alternatywę zdań p, q zapisujemy $p \vee q$ (znak $\vee$ czytamy: „lub").

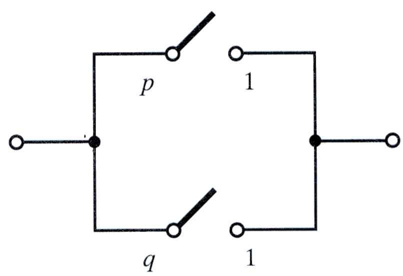
Wartość logiczną alternatywy przedstawia tabelka obok.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Interpretację fizyczną alternatywy ilustruje rycina 1.2. Stan układu utworzonego przez połączenie równoległe wyłączników p i q zależy od stanu wyłącznika p i od stanu wyłącznika q, tak jak wartość logiczna alternatywy $p \vee q$ zależy od wartości logicznych zdań p i q. Mówimy zatem, że **alternatywę realizuje połączenie równoległe**.

Formę zdaniową $\boldsymbol{p(x) \vee q(x)}$ nazywamy **alternatywą form zdaniowych** $p(x), q(x)$.

Na przykład forma zdaniowa: $x^2 - 1 = 0 \vee x + 1 > 0$ jest alternatywą form zdaniowych $x^2 - 1 = 0$, $x + 1 > 0$.



Ryc. 1.2.

Uwaga. Alternatywę zdań zbudowaną za pomocą spójnika *lub* (symbol $\vee$) odróżniajmy od tak zwanej **alternatywy wykluczającej**, zbudowanej przy użyciu spójnika *albo* (symbol $\underline{\vee}$).

Zdanie $p \underline{\vee} q$ jest prawdziwe, gdy zdania p i q mają różne wartości logiczne, fałszywe zaś – gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną.

Na przykład zdanie: *Koło jest figurą wypukłą albo wklęsłą* jest zdaniem prawdziwym, natomiast zdanie: *Koło jest figurą wypukłą albo ograniczoną* jest zdaniem fałszywym.

Podobnie zdanie: 6 *jest liczbą pierwszą albo złożoną* ocenimy jako prawdziwe, natomiast zdanie 6 *dzieli się przez* 2 *albo przez* 3 – jako fałszywe.

Pytania i zadania

1. Co to jest koniunkcja dwóch zdań oraz dwóch form zdaniowych? Podaj przykłady.
2. Co to jest alternatywa dwóch zdań oraz dwóch form zdaniowych? Podaj przykłady.
3. Omów wartości logiczne koniunkcji i alternatywy dwóch zdań.
4. Co to jest alternatywa wykluczająca dwóch zdań? Podaj przykłady.

4. Implikacja

Rozważmy zdanie:

t: *Jeśli nie będzie padać deszcz, to wyjdę z psem na spacer.*

W zdaniu tym możemy wyodrębnić dwa zdania prostsze:

p: *Nie będzie padać deszcz* oraz

q: *Wyjdę z psem na spacer.*

Zdanie t otrzymaliśmy ze zdań p i q przy użyciu wyrazów: *Jeśli ..., to...*

Wiele twierdzeń w matematyce ma postać implikacji. Na przykład:

1. *Jeżeli ramiona kąta przetniemy dwiema prostymi równoległymi, to odcinki wyznaczone przez nie na jednym ramieniu są proporcjonalne do odpowiednich odcinków wyznaczonych przez nie na drugim* (twierdzenie Talesa).
2. *Jeżeli trójkąt jest prostokątny, to kwadrat jednego z boków tego trójkąta równy jest sumie kwadratów pozostałych boków* (twierdzenie Pitagorasa).

Rozstrzygnijmy teraz, kiedy implikacja zdań p i q, czyli zdanie $p \Rightarrow q$, jest prawdziwa, a kiedy fałszywa.

Wróćmy do naszego zdania t. Istnieją następujące możliwości:

1. *Nie padał deszcz i poszedłem z psem na spacer.*
2. *Nie padał deszcz, a mimo to pies siedział w domu.*
3. *Padał deszcz, a jednak wyszedłem z psem na spacer.*
4. *Padał deszcz, więc zrezygnowaliśmy ze spaceru.*

Zauważmy, że w wypadku 1. zdanie t jest oczywiście prawdziwe. Uczyniłem bowiem to, co głosi zdanie t.

W przypadku 2. wypowiedź t jest fałszywa, gdyż postąpiłem wbrew zdaniu t.

Jeśli chodzi zaś o możliwość 3. i 4., to trudno nie uznać zdania t za prawdziwe. Przecież w rzeczywistości w przypadku 3. stało się to, co mówi zdanie t – poszedłem z psem na spacer (niczego nie obiecywałem, co zrobię, gdy deszcz będzie padał!). Natomiast w przypadku 4. nie stało się nic, co by przeczyło wypowiedzi t.

!
Zdanie: **jeśli *p*, to *q*** nazywamy **implikacją** (albo wynikaniem) i uznajemy je za zdanie fałszywe jedynie wtedy, gdy zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q – fałszywe.

Implikację zdań p i q zapisujemy: $p \Rightarrow q$.

Wartość logiczną implikacji przedstawia tabelka.

Zdanie p nazywamy poprzednikiem implikacji, a zdanie q – jej następnikiem. Widzimy więc, że z prawdy wynikać może tylko prawda, a z fałszu – cokolwiek.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Z konkluzją tą wiąże się taka oto anegdota:

Angielski logik, filozof i matematyk – Bertrand Russell (czyt. rasel) – zagadnięty został kiedyś przez swojego przyjaciela: „Słuchaj Bertrandzie, skoro tak się tym chełpisz, że z fałszu wyprowadzisz wszystko jedno co, to bądź łaskaw wykazać, że sam jesteś papieżem!”

„Nic prostszego – odparł Russell. – Wychodząc z oczywistej nieprawdy, że $2+2=5$*, odejmijmy od obu stron równości po 3; otrzymamy wówczas* $1=2$*. I teraz, skoro papież i ja jesteśmy dwiema osobami, to wobec tego, że 1 jest równe 2 – papież i ja to ta sama osoba” – zakończył Russel z uśmiechem swój dowód.*

Jeżeli za pomocą wyrazów *Jeżeli ..., to...* połączymy dwie formy zdaniowe $p(x)$ i $q(x)$, to powstanie forma zdaniowa: **Jeżeli $p(x)$, to $q(x)$**, którą zapisujemy krócej: $p(x) \Rightarrow q(x)$ i nazywamy **implikacją form zdaniowych** $p(x)$ i $q(x)$.

Na przykład forma zdaniowa $x > 0 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ jest implikacją form zdaniowych $x > 0$ i $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Pytania i zadania

1. Co to jest implikacja? Scharakteryzuj implikację za pomocą tabelki.
2. Podaj przykłady czterech implikacji odpowiadające czterem przypadkom w tabelce.
3. Oceń wartość logiczną zdań:
   a) Jeżeli Toruń leży nad Wisłą, to pies jest ssakiem.
   b) Jeżeli Toruń leży nad Wisłą, to pies nie jest ssakiem.
   c) Jeżeli Toruń nie leży nad Wisłą, to pies jest ssakiem.
   d) Jeżeli Toruń nie leży nad Wisłą, to pies nie jest ssakiem.
4. Zbadaj prawdziwość implikacji:
   a) Jeśli $2+2=4$, to $1-3=-2$.
   b) Jeśli $152=225$, to $\sqrt{3}=\sqrt{2}$.
   c) Jeśli $1<2$, to $2>1$.
5. Niech p i q będą pewnymi zdaniami, o których nie wiemy, czy są prawdziwe czy nie. Zbadaj prawdziwość zdań w zależności od wartości logicznych zdań p i q:
   a) $p \Rightarrow p$;
   b) $(p \wedge q) \Rightarrow p$;
   c) $p \Rightarrow (p \vee q)$;
   d) $p \Rightarrow (p \wedge q)$.
6. Podaj taką wartość zmiennej x, aby forma zdaniowa:
   a) $x > 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x^2}$;
   b) $x^2 > 4 \Rightarrow x > -2$;
   c) $x = 0 \Rightarrow x = 1$.
   stała się zdaniem prawdziwym.

5. Warunek konieczny. Warunek wystarczający

Jeżeli ze zdania p wynika zdanie q, to mówimy, że p jest **warunkiem wystarczającym** dla q, a q jest **warunkiem koniecznym** dla p. Warunek **wystarczający** nazywany jest też warunkiem **dostatecznym**.

Na przykład podzielność liczby całkowitej przez 4 jest warunkiem wystarczającym podzielności liczby przez 2, ale niekoniecznym (liczba 6 jest podzielna przez 2, a niepodzielna przez 4). Natomiast podzielność liczby całkowitej przez 2 jest warunkiem koniecznym podzielności tej liczby przez 4, ale niewystarczającym (znowu rozważ liczbę 6).

Widzimy zatem, że warunek wystarczający dla p może nie być warunkiem koniecznym dla p oraz warunek konieczny dla p może nie być warunkiem wystarczającym dla p.

Czasami zdarza się jednak, że warunek konieczny dla p jest również warunkiem wystarczającym dla p.

Na przykład:

1. Podzielność liczby całkowitej przez 2 i przez 3 jest warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności tej liczby przez 6.
2. Podzielność sumy cyfr zapisu dziesiętnego liczby naturalnej przez 9 jest warunkiem koniecznym i wystarczającym podzielności tej liczby przez 9.

Uwaga. Założenia w prawdziwym twierdzeniu są warunkiem wystarczającym na prawdziwość jego tezy; mogą nie być jednak warunkiem koniecznym na to.

Przykład. Jeśli trójkąt jest równoboczny, to promień okręgu wpisanego stanowi $\frac{1}{3}$ wysokości tego trójkąta, zaś trójkąt, w którym tak jest, nie musi być równoboczny. Rozważ trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 4 (podstawa) i 3 (wysokość).

Pytania i zadania

1. Co to jest warunek:
   a) konieczny,
   b) wystarczający,
   c) konieczny i wystarczający?
2. Podaj przykład twierdzenia, którego założenia:
   a) stanowią warunek konieczny i wystarczający dla tezy,
   b) nie stanowią warunku koniecznego dla tezy.

6. Równoważność

Rozpatrzmy zdanie:

Pojadę na urlop nad morze wtedy i tylko wtedy, gdy będzie upalne lato.

Składa się ono z dwóch zdań prostszych:

p: Pojadę na urlop nad morze

q: Będzie upalne lato

połączonych słowami: *wtedy i tylko wtedy, gdy.*

Zdanie mające taką postać nazywamy **równoważnością** i zapisujemy $p \Leftrightarrow q$.

Zdania p i q nazywamy członami równoważności albo jej **stronami.**

Zastanówmy się teraz nad tym, kiedy równoważność dwóch zdań jest zdaniem prawdziwym.

Mówiąc: *Liczba naturalna jest podzielna przez* 9 *wtedy i tylko wtedy, gdy suma jej cyfr jest podzielna przez* 9, myślimy, że jeśli zdanie p: *Liczba naturalna jest podzielna przez* 9 jest prawdziwe, to zdanie q: *Suma jej cyfr jest podzielna przez* 9, jest prawdziwe oraz jeśli zdanie p jest fałszywe, to zdanie q jest fałszywe.

Równoważnością zdań p i q nazywamy zdanie – ***p* wtedy i tylko wtedy, gdy *q*** i uznajemy je za **zdanie prawdziwe** tylko wtedy, gdy oba człony p i q są równocześnie prawdziwe lub równocześnie fałszywe.

Równoważność zdań p i q zapisujemy: $p \Leftrightarrow q$.

Wartość logiczną równoważności przedstawia tabelka.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Równoważność zdań p i q orzeka więc, że zdania p i q mają **tę samą wartość logiczną**.

Oznacza ona również prawdziwość dwóch implikacji: $p \Rightarrow q$ oraz odwrotnej do niej $q \Rightarrow p$. Pierwszą z nich odczytujemy krótko: *p tylko wtedy, gdy q* (p jest warunkiem wystarczającym dla q), zaś drugą: *p wtedy, gdy q* (p jest warunkiem koniecznym dla q). Właśnie dlatego równoważność zdań p i q wypowiadamy tak: *p wtedy i tylko wtedy, gdy q*.

Równoważnością form zdaniowych $p(x)$ i $q(x)$ nazywamy formę zdaniową postaci $\boldsymbol{p(x) \Leftrightarrow q(x)}$.

Na przykład forma zdaniowa $x > 0 \Leftrightarrow -x < 0$ jest równoważnością form zdaniowych $x > 0$ i $-x < 0$.

Pytania i zadania

1. Co to jest równoważność dwóch zdań? Scharakteryzuj ją za pomocą tabelki.
2. Co to znaczy, że dwa zdania są równoważne?
3. Podaj przykłady zdań równoważnych oraz takich, które nie są równoważne.
4. Czy dla każdej liczby rzeczywistej x:

   a) $x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$;

   b) $x^2 < 1 \Leftrightarrow x < 1$?
5. Zbadaj prawdziwość zdań:

   a) Liczba -5 jest dodatnia wtedy i tylko wtedy, gdy liczba 3 jest ujemna.

   b) Toruń leży nad Wisłą wtedy i tylko wtedy, gdy Wisła przepływa przez Toruń.

   c) Liczba 123 456 789 dzieli się przez 3 wtedy i tylko wtedy gdy $23 > 32$.

   d) Trójkąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoboczny.
6. Podaj przykład takich wartości zmiennych, dla których następująca forma zdaniowa staje się zdaniem prawdziwym:

a) $x^2 > y^2 \Leftrightarrow x > y$;
b) $x^2 > y^2 \Leftrightarrow x < y$;
c) trójkąt o bokach a, b, c jest prostokątny wtedy i tylko wtedy, gdy pole trójkąta o bokach a, b, c, jest równe $\frac{1}{2}bc$;
d) liczba naturalna n jest podzielna przez 2 wtedy i tylko wtedy, gdy liczba naturalna n jest podzielna przez 3.

7. Czy dla dowolnych zdań p i q prawdziwe są zdania:
a) $p \Leftrightarrow p \wedge \cancel{p}$; q
b) $p \Leftrightarrow p \vee q$;
c) $[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$?

7. Negacja

Porównajmy zdania:
p: *Dzisiaj nie mieliśmy zajęć w szkole.*
q: *Nieprawda, że dzisiaj nie mieliśmy zajęć w szkole.*

Zdanie q możemy, nie zmieniając jego treści, wypowiedzieć również następująco: *Dzisiaj mieliśmy zajęcia w szkole.*

Zdanie q nazywamy negacją lub zaprzeczeniem zdania p.

!

Zdanie: **nieprawda, że** p nazywamy **negacją** (zaprzeczeniem) **zdania** p i przyjmujemy ją za zdanie prawdziwe, gdy zdanie p jest fałszywe i na odwrót.

Negację zdania p zapisujemy: $\sim p$ (znak $\sim$ czytamy: „nieprawda, że...” lub „nie”).

Wartość logiczną negacji podaje tabelka.

p	$\sim p$
1	0
0	1

Podobnie, jeśli mamy formę zdaniową $p(x)$, to jej **negacją** jest forma zdaniowa *nieprawdą jest, że* $p(x)$ i zapisujemy $\sim p(x)$.

Na przykład zaprzeczeniem formy zdaniowej $x + 1 = 0$, jest forma zdaniowa: $\sim (x + 1 = 0)$, czyli po prostu: $x + 1 \neq 0$.

Stąd wynikają podstawowe własności negacji:
1. Z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ **co najmniej jedno** jest **fałszywe** (inaczej mówiąc, dwa zdania, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, nie mogą być jednocześnie prawdziwe).
2. Z dwóch zdań: p oraz $\sim p$ **co najmniej jedno** jest **prawdziwe** (czyli dwa zdania, z których jedno jest zaprzeczeniem drugiego, nie mogą być jednocześnie fałszywe).
3. Zdania p oraz $\sim(\sim p)$ mają tę samą wartość logiczną (są zatem równoważne!).

Na przykład zamiast mówić: *Nieprawda, że nie istnieje najmniejsza liczba dodatnia,* możemy powiedzieć: *Istnieje najmniejsza liczba dodatnia.* (Oczywiście oba te zdania są fałszywe!).

Zauważmy na koniec, jaki nasz język ojczysty bywa nielogiczny.

Jeśli mówimy: *Nie mam żadnych pieniędzy,* z wypowiedzi powinno wynikać, że właśnie mamy pieniądze. Jej rzeczywisty sens jest jednak całkiem odmienny. Chcąc się zatem przyznać do braku gotówki przy sobie, należałoby powiedzieć: *Ja mam żadne pieniądze* lub po prostu: *Ja nie mam pieniędzy.*

Pytania i zadania

1. Co to jest negacja zdania? Scharakteryzuj ją za pomocą tabelki.
2. Co to są dwa zdania sprzeczne?
3. Podaj zaprzeczenie form zdaniowych:
   a) $x > 1$; b) $x \leqslant 1$; c) $x \geqslant 1$.

8. Prawa rachunku zdań

Dotychczas zajmowaliśmy się wyrażeniami, które nie we wszystkich przypadkach (związanych z wartościami logicznymi zdań prostych tworzących te wyrażenia) były zdaniami prawdziwymi. Przypomnijmy sobie:

1. Koniunkcja dwóch zdań jest prawdziwa jedynie wtedy, gdy oba te zdania są prawdziwe.
2. Alternatywa dwóch zdań jest prawdziwa, gdy co najmniej jedno z tych zdań jest prawdziwe.
3. Implikacja dwóch zdań jest prawdziwa, gdy jej poprzednik jest fałszywy, a następnik jakikolwiek albo poprzednik i następnik są zdaniami prawdziwymi.
4. Równoważność dwóch zdań jest prawdziwa, gdy oba zdania mają tę samą wartość logiczną.

I tutaj pojawia się pytanie: czy można ze zdań prostych budować wyrażenia będące zawsze zdaniami prawdziwymi? Okazuje się, że tak! Takie wyrażenia nazywają się **prawami rachunku zdań** lub krótko: **prawami logicznymi** czy też **tautologiami**.

Prawem rachunku zdań lub **tautologią** nazywamy zbudowane ze zdań prostych i spójników wyrażenie, które niezależnie od wartości logicznych tych zdań jest zawsze zdaniem prawdziwym.

Praw logicznych jest wiele. My skoncentrujemy uwagę na najważniejszych. Wiemy już, że z dwóch zdań p oraz $\sim p$ jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe.

Zatem dla dowolnego zdania p wyrażenia

I. $$\boxed{p \vee (\sim p)}$$

II. $$\boxed{\sim (p \wedge (\sim p))}$$

są zawsze zdaniami prawdziwymi, a więc prawami logicznymi (czyli tautologiami). Pierwsze z nich to tak zwane **prawo wyłącznego środka**, a drugie to **prawo sprzeczności**.

Wiemy też, że zdania p oraz $\sim (\sim p)$ mają zawsze tę samą wartość logiczną. Stąd też wyrażenie

III. $$\boxed{p \Leftrightarrow \sim (\sim p)}$$

jest tautologią – to tak zwane **prawo podwójnej negacji**.

Przyjrzyjmy się teraz zdaniom: $\sim (p \wedge q)$ oraz $\sim p \vee (\sim q)$. Zbadajmy, czy zdania te mają tę samą wartość logiczną dla dowolnych zdań p i q. Są cztery możliwości:

1. Zdania p i q są prawdziwe, czyli $p = q = 1$. Wtedy zdanie $\sim (p \wedge q)$ jest fałszywe oraz także zdanie $(\sim p) \vee (\sim q)$ jest fałszywe.
2. Zdanie p jest prawdziwe, a zdanie q fałszywe, czyli $p = 1$, $q = 0$. Wtedy zdania: $\sim (p \wedge q)$ oraz $(\sim p) \vee (\sim q)$ są oba prawdziwe.
3. Zdanie p jest fałszywe, a zdanie q prawdziwe, czyli $p = 0$, $q = 1$. Wówczas zdania $\sim (p \wedge q)$ i $(\sim p) \vee (\sim q)$ są znowu oba prawdziwe.
4. Zdania p i q są fałszywe, to znaczy $p = q = 0$. Zatem zdania $\sim (p \wedge q)$ i $(\sim p) \vee (\sim q)$ także są prawdziwe.

Wyniki tych rozważań przedstawia tabelka:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \vee (\sim q)$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Widzimy więc, że zdania $\sim (p \wedge q)$ oraz $(\sim p) \vee (\sim q)$ mają zawsze tę samą wartość logiczną. Są więc równoważne. To zaś oznacza, że wyrażenie

IV. $$\boxed{[\sim (p \wedge q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \vee (\sim q)]}$$

jest tautologią. Jest to tak zwane **I prawo de Morgana**. Głosi ono:

Zaprzeczenie koniunkcji dwóch zdań $\sim (p \wedge q)$ jest równoważne alternatywie zaprzeczeń tych zdań $(\sim p) \vee (\sim q)$.

Zaprezentowana wyżej metoda sprawdzania, czy dane wyrażenie jest tautologią, nazywa się metodą **zero-jedynkową**.

A tak wyglądają tabelki wspomnianych wcześniej praw logicznych:

p	$\sim p$	$p \vee (\sim p)$
1	0	1
0	1	1

prawo wyłączonego środka

p	$\sim p$	$\sim(p \wedge (\sim p))$
1	0	1
0	1	1

prawo sprzeczności

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$	$p \Leftrightarrow \sim(\sim p)$
1	0	1	1
0	1	0	1

prawo podwójnej negacji

Prześledźmy wspomnianą metodą dowody jeszcze kilku praw logicznych.

p	q	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$(\sim p) \wedge (\sim q)$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	1	**0**	0	1	**0**
0	1	1	**0**	1	0	**0**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Zdania $\sim(p \vee q)$ oraz $(\sim p) \wedge (\sim q)$ mają zawsze tę samą wartość logiczną (porównaj kolumny powyższej tabeli – czwartą i ostatnią). Są więc równoważne. Zatem zdanie:

V. $$\boxed{[\sim(p \vee q)] \Leftrightarrow [(\sim p) \wedge (\sim q)]}$$

jest tautologią nazywaną **II prawem de Morgana**. Głosi ono, że:

Zaprzeczenie alternatywy dwóch zdań $\sim(p \vee q)$ jest równoważne koniunkcji zaprzeczeń tych zdań $(\sim p) \wedge (\sim q)$.

Przykłady:

1. Zdanie: *Nieprawda, że dzisiaj pójdę do kina i dzisiaj będę czytał książkę* jest równoważne, na mocy I prawa de Morgana, zdaniu: *Dzisiaj nie pójdę do kina lub dzisiaj nie będę czytał książki*.
2. Zdanie: *Nieprawda, że dzisiaj nie odrobię lekcji lub dzisiaj nie wyjdę na spacer z psem* jest równoważne, na mocy II prawa de Morgana, zdaniu: *Dzisiaj odrobię lekcje i dzisiaj wyjdę na spacer z psem*.

Prawo (albo reguła) **odrywania** mówi że:

Jeśli prawdziwe są implikacja $p \Rightarrow q$ oraz jej poprzednik p, to również jej następnik q jest zdaniem prawdziwym.

Wykażemy to, jeśli udowodnimy, że dla dowolnych zdań p i q wyrażenie

VI. $$\boxed{[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q}$$

jest tautologią.
Oto dowód:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge (p \Rightarrow q)$	$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Prawo negacji implikacji głosi, że:

Zaprzeczenie implikacji dwóch zdań $\sim(p \Rightarrow q)$ jest równoważne koniunkcji $p \wedge (\sim q)$.

Dla dowodu tego znowu posłużymy się metodą zero-jedynkową i tabelką:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\boldsymbol{\sim(p \Rightarrow q)}$	$\sim q$	$\boldsymbol{p \wedge (\sim q)}$
1	1	1	**0**	0	**0**
1	0	0	**1**	1	**1**
0	1	1	**0**	0	**0**
0	0	1	**0**	1	**0**

Widzimy teraz, że we wszystkich przypadkach zdania $\sim(p \Rightarrow q)$ oraz $p \wedge (\sim q)$ mają tę samą wartość logiczną, co oznacza, że są równoważne. Zatem wyrażenie:

VII. $\boxed{[\sim(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow [p \wedge (\sim q)]}$

jest tautologią.

Na koniec udowodnimy jeszcze jedno z dwóch praw logicznych:

VIII. $\boxed{[p \wedge (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]}$

IX. $\boxed{[p \vee (q \wedge r)] \Leftrightarrow [(p \vee q) \vee (p \wedge r)]}$

Pierwsze z nich to **rozdzielność koniunkcji względem alternatywy**, drugie zaś – **rozdzielność alternatywy względem koniunkcji**.

Oto dowód metodą zero-jedynkową pierwszego z tych praw przedstawiony w tabelce.

p	q	r	$q \vee r$	$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r)}$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
1	1	1	1	**1**	1	1	**1**
1	1	0	1	**1**	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**	0	1	**1**
0	1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	0	**0**	0	0	**0**
0	1	0	1	**0**	0	0	**0**
0	0	1	1	**0**	0	0	**0**
0	0	0	0	**0**	0	0	**0**

Dowód drugiego spróbuj przeprowadzić samodzielnie.

Pytania i zadania

1. Co to jest prawo logiczne?
2. Co wyrażają:
   a) prawo wyłącznego środka,
   b) prawo sprzeczności,
   c) I i II prawo de Morgana?
3. Wymień inne poznane prawa logiczne.
4. Wykaż metodą zero-jedynkową, że każde z wyrażeń jest prawem logicznym:
   a) $(\sim p \Rightarrow p) \Rightarrow p$ (prawo Claviusa),
   b) $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ (prawo przemienności),
   c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ (prawo przemienności),
   d) $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$ (prawo łączności),
   e) $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q) \vee r)$ (prawo łączności),
   f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q) \Rightarrow (\sim p)$ (prawo transpozycji),
   g) $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$ (prawo przechodniości implikacji),
   h) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$.
5. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
   a) $[(p \vee q) \wedge (\sim p)] \Rightarrow q$; b) $p \Rightarrow \left[(\sim p) \vee q\right]$; c) $\sim \left[p \wedge \left((\sim p) \wedge q\right)\right]$.

9. Kwantyfikatory

Przyjrzyjmy się następującym wyrażeniom:
1. *Każda liczba rzeczywista x spełnia nierówność* $x^2 \geqslant 0$.
2. *Każdy czworokąt można wpisać w okrąg.*
3. *Każde drzewo w lesie jest albo sosną, albo brzozą.*
4. *Każdy człowiek na świecie ma prawo do życia w pokoju.*

Wyrażenia te są zdaniami orzekającymi, ponieważ coś stwierdzają. Oczywiście nie wszystkie te zdania są prawdziwe. Mają one jednak pewną wspólną własność. We wszystkich występuje zaimek **każda, każdy** lub **każde**. Jeślibyśmy opuścilibyśmy ten wyraz, to otrzymalibyśmy wyrażenia, które nie są zdaniami, lecz pewnymi formami zdaniowymi. Stąd otrzymujemy wniosek.

Wniosek. Jeśli formę zdaniową $p(x)$ z jedną zmienną, określoną w dziedzinie D, poprzedzimy zwrotem: *dla każdego x należącego do D*, to otrzymamy zdanie: *Każde x należące do dziedziny D, spełnia warunek* $p(x)$.

Jest to więc pewien sposób tworzenia zdań z form zdaniowych.

W zdaniu: *Dla każdego x należącego do D spełniony jest warunek* $p(x)$ zwrot: *dla każdego* nazywamy **kwantyfikatorem ogólnym**.

Mówimy wówczas, że zmienna x w formie zdaniowej $p(x)$ jest związana przez kwantyfikator ogólny.

Kwantyfikator ogólny (zwany też dużym) oznaczamy symbolem $\bigwedge$ (albo $\forall$).

Zdanie: *Dla każdego x należącego do D, zachodzi* $p(x)$, zapisujemy:

$$\bigwedge_{x \in D} p(x) \text{ albo } \left(\forall x \in D\right)(p(x))$$

lub po prostu $\bigwedge_{x} p(x)$, gdy z góry wiadomo, do jakiego zbioru należy x.

Na przykład wyrażenie $\bigwedge_{x \in R} x^2 + 1 \geqslant 2x$ jest zdaniem. Nietrudno spostrzec, że jest to zdanie prawdziwe, bowiem $x^2 + 1 \geqslant 2x \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$, a kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny.

Rozważmy teraz wyrażenia:

1. *Istnieje liczba rzeczywista x spełniająca równanie* $x^2 + 1 = 0$.
2. *Istnieje trójkąt, którego wszystkie kąty są równe.*
3. *Istnieje czworokąt, w który można wpisać okrąg.*
4. *Istnieje wśród uczniów naszej klasy poczucie solidarności.*

Wszystkie te wyrażenia są zdaniami. Każde z nich podaje pewną informację, choć nie zawsze prawdziwą. Zdania te łączy pewna wspólna własność: w każdym z nich występuje słowo **istnieje**. Opuszczając je, otrzymamy z tych zdań pewne formy zdaniowe.

Wniosek. Jeśli formę zdaniową $p(x)$ z jedną zmienną określoną w dziedzinie D poprzedzimy zwrotem: *istnieje takie x należące do dziedziny D, że...*, to otrzymamy zdanie: *Istnieje takie x należące do D, że* $p(x)$.

Jest to więc kolejny sposób tworzenia zdań z form zdaniowych.

Wyraz: *istnieje* w zdaniu: *Istnieje takie x, należące do D, że* $p(x)$ nazywamy **kwantyfikatorem szczegółowym** (albo małym).

Mówimy wówczas, że zmienna x w formie zdaniowej $p(x)$ została związana przez kwantyfikator szczegółowy.

Kwantyfikator szczegółowy oznaczamy symbolem $\bigvee$ (albo $\exists$).

Zdanie: *Istnieje takie x należące do zbioru D, że* $p(x)$ zapisujemy:

$$\bigvee_{x \in D} p(x) \text{ albo } \left(\exists x \in D\right)(p(x))$$

lub po prostu $\bigvee_{x} p(x)$, gdy już wiemy, do jakiego zbioru należy x.

Na przykład wyrażenie $\bigvee_{x \in R} x^2 - 1 = 0$ jest zdaniem. Oczywiście jest to zdanie prawdziwe, bo liczba 1 (jak również –1) spełniają formę zdaniową $x^2 - 1 = 0$.

Zaprzeczenie zdań z kwantyfikatorem

Jeśli chcemy zaprzeczyć zdaniu: *Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność* $2x - 1 > 0$, to powiemy: *Nieprawda, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność* $2x - 1 > 0$ lub jeszcze prościej: *Istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której nie zachodzi nierówność* $2x - 1 > 0$, czyli: *Istnieje taka liczba rzeczywista x, dla której zachodzi nierówność* $2x - 1 \leqslant 0$.

Stąd wyciągamy wniosek.

Wniosek. Jeżeli zaprzeczamy zdaniu zaczynającemu się od kwantyfikatora ogólnego *dla każdego x zachodzi* $p(x)$, to otrzymujemy zdanie zaczynające się od kwantyfikatora szczegółowego i zawierające negację formy zdaniowej $p(x)$: *Istnieje takie x, że* $\sim p(x)$.

Posługując się poznanymi symbolami logicznymi, zapiszemy to następująco:

$$\sim\left(\bigwedge_x p(x)\right) \Leftrightarrow \bigvee_x (\sim p(x)).$$

Podobnie, chcąc zaprzeczyć zdaniu zaczynającemu się od kwantyfikatora szczegółowego, na przykład zdaniu: *Istnieje taka liczba rzeczywista x, że zachodzi nierówność* $x^2 < 0$, powiemy: *Nieprawda, że istnieje taka liczba rzeczywista x, że zachodzi nierówność* $x^2 < 0$, co oznacza: *Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność* $x^2 \geqslant 0$.

Wniosek. Jeśli zaprzeczamy zdaniu zaczynającemu się od kwantyfikatora szczegółowego: *Istnieje takie x, że* $p(x)$, to otrzymujemy zdanie zaczynające się od kwantyfikatora ogólnego i zawierające negację formy zdaniowej $p(x)$: *Dla każdego x zachodzi* $\sim p(x)$.

Symbolicznie zapiszemy to tak:

$$\sim\left(\bigvee_x p(x)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_x (\sim p(x)).$$

Pytania i zadania

1. Co to jest: kwantyfikator ogólny, kwantyfikator szczegółowy? Podaj przykłady zdań z tymi kwantyfikatorami.
2. Omów zaprzeczenie zdań z kwantyfikatorem:
   a) ogólnym,
   b) szczegółowym.
3. Oceń wartość logiczną zdań i zapisz je z użyciem symboliki kwantyfikatorów:
   a) Istnieje taka liczba rzeczywista x, że $x^2 - 4 = 0$.
   b) Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^2 - 9 < 0$.
   c) Dla każdego x, jeśli $x > 1$, to $x^2 > 1$.
   d) Istnieje takie $x < 1$, że $x^2 < 1$.
4. Które z poniższych zdań jest prawdziwe, a które fałszywe?

   a) $\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x + y = 0)$; b) $\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} \left((x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2\right)$;

   c) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x + y = 0)$; d) $\bigvee_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x + y = 0)$; e) $\bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x + y = 0)$.
5. Formy zdaniowe jednej i dwóch zmiennych poprzedź kwantyfikatorami, tak aby otrzymać zdania prawdziwe:

   a) $(x+y)^2 = x^2 + y^2$; b) $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;

   c) $x^2 - 4 < 0$; d) $x^2 - y^2 = x - y$;

   e) $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$; f) $x^2 \leqslant 0$.

10. Zadania logiczne

W podrozdziale tym rozwiążemy kilka zadań logicznych.

Przykład 1. Dana jest lista n ponumerowanych zdań. Zdanie o numerze k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ głosi: *Na niniejszej liście jest dokładnie k zdań fałszywych*. Które spośród zdań na tej liście jest prawdziwe?
Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że co najmniej jedno z podanych zdań musi być prawdziwe, bo w przeciwnym przypadku fałszywe musiałyby być wszystkie zdania – a więc także to o numerze n. Mamy już sprzeczność.

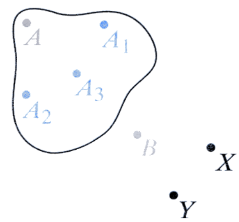
Oczywiste jest też, że prawdziwe musi być co najwyżej jedno spośród wszystkich zdań na liście, gdyż każde z nich określa inną liczbę zdań fałszywych. Zatem na tej liście mamy tylko jedno zdanie prawdziwe. Jest nim zdanie o numerze $n-1$.

Przykład 2. W pewnej grupie siedmiu chłopców każdy ma wśród pozostałych co najmniej trzech braci. Wykaż, że wszyscy ci chłopcy są braćmi.
Rozwiązanie:

Oznaczamy przez A jednego z chłopców, a przez A_1, A_2, A_3 – tych, którzy są jego braćmi. Niech B będzie chłopcem spoza wymienionej czwórki. Są teraz trzy możliwości:

a) wśród braci chłopca B są obydwaj niebrani jeszcze pod uwagę chłopcy X i Y (ryc. 1.3.),
b) wśród braci chłopca B jest tylko jeden spośród X i Y,
c) B ma co najmniej trzech braci wśród A, A_1, A_2, A_3.

W każdym z tych przypadków łatwo ustalić, że cała grupa siedmiu chłopców to bracia.



Ryc. 1.3.

Przykład 3. Cztery wyrazy i umieszczone obok nich cyfry: UGIER – 0, SZKŁO – 1, PŁUGI – 2, SOCHA – 3 są kluczem do znalezienia piątego słowa, także pięcioliterowego. Cyfra przy wyrazie wskazuje, ile jego liter występuje w szukanym słowie. Jakie to słowo?
Rozwiązanie:

Zauważmy, że podane wyrazy mają wspólne litery. Podkreślmy w nich te litery, które należy wyeliminować: UGIER – 0, SZKŁO – 1, PŁUGI – 2, SOCHA – 3.

Do dyspozycji mamy więc litery: P, Ł, C, H, A, z których układamy szukane słowo. A jest nim, oczywiście, PCHŁA.

Przykład 4. Mamy dwie patelnie. Na każdej zmieścimy tylko jeden kotlet. Jedna strona kotleta smaży się w ciągu 1 minuty. W jakim najkrótszym czasie usmażymy na tych patelniach trzy kotlety?
Rozwiązanie:

Kotlety usmażymy w 3 minuty. W pierwszej minucie usmażymy po jednej stronie dwa kotlety, w drugiej – jeden z nich po drugiej stronie i trzeci – po jednej stronie. W trzeciej minucie kończymy smażenie dwóch kotletów usmażonych dotąd z jednej strony.

Przykład 5. Dwaj ojcowie i dwaj synowie zjedli razem trzy jabłka, przy czym każdy z nich – po całym jabłku. Czy to możliwe?
Rozwiązanie:

Tak, jest to całkiem możliwe, gdyż byli to: dziadek, ojciec i syn.

Przykład 6. Znajdź wszystkie pary (a, b) liczb całkowitych dodatnich, jeśli wiadomo, że wśród poniższych zdań trzy są prawdziwe i jedno fałszywe:

1. $a + 1$ *dzieli się przez* b;
2. $a = 2b + 5$;
3. $a + b$ *dzieli się przez* 3;
4. $a + 7b$ *jest liczbą pierwszą.*

Rozwiązanie:

Nie mogą być jednocześnie prawdziwe zdania 3. i 4., gdyż wtedy liczba $a + 7b = (a + b) + 6b$ nie mogłaby być pierwsza (dlaczego?). Nie mogą być jednocześnie prawdziwe także zdania 2. i 3., gdyż wtedy liczba $a + b = 3b + 5$ nie mogłaby być podzielna przez 3. Zatem spośród podanych zdań prawdziwe jednocześnie są zdania 1., 2. i 4., czyli:

1. $a + 1 = k \cdot b$, *gdzie* k *jest pewną liczbą całkowitą*;
2. $a = 2b + 5$;
3. $a + 7b$ *jest liczbą pierwszą.*

Stąd $2b + 6 = k \cdot b$, czyli $b(k - 2) = 6$.

Wobec tego $b = 1, 2, 3, 6$ i odpowiednio $a = 2b + 5 = 7, 9, 11, 17$.

Ale liczba $a + 7b$ jest pierwsza i większa od 2, więc jest nieparzysta. Warunek ten spełniają jedynie pary: $a = 9$, $b = 2$ oraz $a = 17$, $b = 6$. Pary $(9, 2)$ i $(17, 6)$ są jedynymi, które spełniają warunki zadania.

Przykład 7. Wszyscy mieszkańcy miasta A zawsze mówią prawdę, a wszyscy mieszkańcy miasta B zawsze kłamią. Wiadomo, że mieszkańcy miasta A bywają w B i na odwrót. Pewnego razu podróżny znalazł się w którymś z tych miast, ale nie wiedział, w którym. Jakie powinien zadać pytanie pierwszemu napotkanemu przechodniowi, aby się zorientować, w którym z tych dwóch miast się znalazł?
Rozwiązanie:

Podróżny powinien zapytać napotkanego: „czy Pan pochodzi z tego miasta?" Wówczas w mieście A usłyszy zawsze odpowiedź: „tak", a w mieście B – „nie".

Pytania i zadania

1. Znajdź wszystkie takie liczby dwucyfrowe A, dla których dwa spośród poniższych zdań są prawdziwe i dwa są fałszywe.
   a) A jest podzielna przez 5.
   b) A jest podzielna przez 23.
   c) $A + 7$ jest kwadratem liczby całkowitej.
   d) $A - 10$ jest kwadratem liczby całkowitej.
2. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których dwa spośród poniższych zdań są prawdziwe i jedno fałszywe.
   a) $n + 51$ jest kwadratem liczby naturalnej.

b) Ostatnią cyfrą liczby n jest 1.

c) $n - 38$ jest kwadratem liczby naturalnej.

3. Mieszkańcy miasta A mówią tylko prawdę, mieszkańcy miasta B – tylko kłamią, a mieszkańcy miasta C na przemian – mówią prawdę i kłamią. Dyżurny straży pożarnej odebrał telefon: „U nas jest pożar, przyjeżdżajcie szybko!". „Gdzie?" – spytał. „W mieście C" – usłyszał. Do którego z miast wyjechał wóz straży pożarnej gasić pożar?

11. O dowodzeniu twierdzeń

W matematyce dowodzimy twierdzeń dwojako: wprost i nie wprost.

Dowód wprost polega na tym, że przyjmując za prawdziwe wszystkie założenia (poprzednik implikacji), rozumujemy dotąd, aż dojdziemy do prawdziwości tezy (następnika implikacji). W dowodzeniu wprost korzystamy między innymi z reguły odrywania, czyli – przypomnijmy – z tautologii: $[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$, oraz z prawa przechodniości implikacji (to jest z tautologii: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.

Dowód nie wprost polega na rozumowaniu przez sprzeczność (łac. *reductio ad absurdum* – sprowadzenie do niedorzeczności), w którym, przyjmując wszystkie założenia za prawdziwe, dołączamy zaprzeczenie tezy, co w konsekwencji prowadzi do sprzeczności albo z założeniem, albo też z innym faktem, udowodnionym wcześniej lub przyjętym jako pewnik. Dowód nie wprost oparty jest na tautologii:

$$[(p \wedge (\sim q)) \Rightarrow \sim p] \Leftrightarrow (p \Rightarrow q).$$

Z przykładami dowodzenia twierdzeń wprost lub nie wprost spotkamy się w tym podręczniku wiele razy.

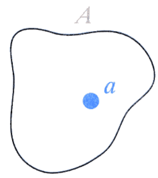
Warto wiedzieć, że metodę dowodzenia twierdzeń nie wprost zawdzięczamy greckiemu filozofowi – Platonowi (IV w. p.n.e.).

II. Rachunek zbiorów

1. Zbiory i działania na nich

Pojęcie zbioru należy do tych pojęć matematycznych, których się nie określa. Uznajemy je za tak zwane pojęcie **pierwotne**. Zamiast „zbiór" mówimy też **mnogość**, a w niektórych przypadkach **rodzina** lub **przestrzeń**. Łatwo jest podać przykłady zbiorów: zbiór zdjęć w albumie rodzinnym, zbiór znaczków w klaserze, zbiór uczniów twojej klasy, zbiór grzybów w koszu po godzinnym spacerze po lesie, zbiór liczb naturalnych.

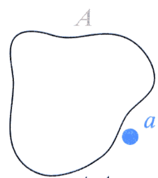
Zbiory oznaczać będziemy zwykle dużymi literami alfabetu łacińskiego: A, B, C, ..., X, Y, Z. Jeżeli przedmiot a należy do zbioru A, to piszemy $a \in A$ (znak $\in$ czytamy: „należy do..."). Mówimy też, że a jest elementem zbioru A (ryc. 2.1).



$a \in A$

Ryc. 2.1.

Jeśli a nie jest elementem zbioru A, to piszemy $a \notin A$ (czytamy: „nie należy do..."; ryc. 2.2).



$a \notin A$

Ryc. 2.2.

Elementy zbiorów oznaczać będziemy zwykle małymi literami: a, b, c, ..., x, y, z.

Konkretny zbiór możemy określić dwojako:

1. wymieniając wszystkie jego elementy, na przykład
   $A = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19\}$
2. opisując własności, które mają wszystkie jego elementy i tylko one, na przykład A – zbiór wszystkich podzielników danej liczby naturalnej n, B – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od 2.

Przez **zbiór elementów** mających określoną własność W rozumiemy zbiór wszystkich i tylko takich elementów, które mają tę własność.

Zbiór elementów x mających własność $W(x)$ oznaczamy symbolem $\{x : W(x)\}$. Mówiąc „zbiór liczb całkowitych", mamy na myśli zbiór wszystkich liczb całkowitych i tylko liczb całkowitych.

Zbiór, który ma skończoną liczbę elementów, nazywamy **zbiorem skończonym**.

Zbiory $\{a\}, \{1, 3, 5, 7, 9\}$ są skończone; pierwszy z nich – jednoelementowy – złożony z jedynego elementu, którym jest a, drugi zaś – pięcioelementowy – jest zbiorem liczb nieparzystych mniejszych od 10.

Wśród zbiorów skończonych na szczególną uwagę zasługuje zbiór niemający żadnego elementu (mający 0 elementów). Taki zbiór nazywamy **zbiorem pustym** i oznaczamy symbolem $\varnothing$. Na przykład zbiór liczb całkowitych większych od 0 i mniejszych od 1 jest pusty, podobnie jak zbiór rozwiązań rzeczywistych równania $x^2 + 1 = 0$.

Zbiór, który nie jest skończony, nazywamy **zbiorem nieskończonym**. Zbiór liczb pierwszych jest nieskończony; zbiór rozwiązań nierówności $x^2 + 1 > 0$ też jest zbiorem nieskończonym.

Pamiętajmy, że zapis $\{a, b\}$, gdy $a = b$, oznacza po prostu zbiór jednoelementowy $\{a\}$.

Jeśli zatem piszemy $A = \{a, b, c\}$, to mamy na myśli zbiór A złożony z trzech różnych elementów: a, b, c.

> Mówimy, że **zbiór *A* zawiera się w zbiorze *B*** lub *A* **jest podzbiorem zbioru *B***, jeśli każdy element zbioru *A* jest elementem zbioru *B*.

Zapisujemy to następująco: $A \subset B$ lub $B \supset A$ (znak $\subset$ czytamy: „zawiera się w...").

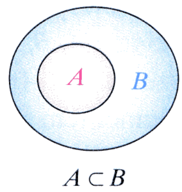
Tak więc $(*)$ $A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge_{x} (x \in A \Rightarrow x \in B)$

Na przykład, jeśli $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ to widzimy, że $A \subset B$.
Zauważmy, że z definicji zawierania się zbiorów wynika wniosek.

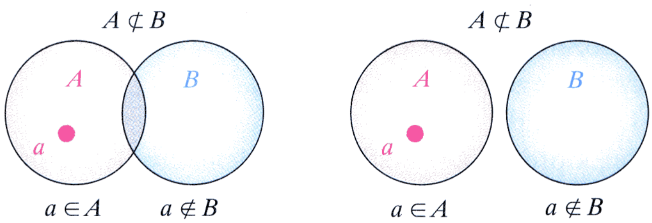
Wniosek. Dla każdego zbioru A: $\varnothing \subset A$ oraz $A \subset A$.

Zawieranie się zbiorów nazywamy także **inkluzją** (ryc. 2.3).

Zaprzeczając zdaniu $(*)$, otrzymujemy zdanie:
$A \not\subset B \; \bigvee_{x \in A} (x \notin B)$ (znak $\not\subset$ czytamy: „nie zawiera się w..."). Zatem zbiór A nie zawiera się w zbiorze B, gdy co najmniej jeden element zbioru A nie należy do zbioru B (ryc. 2.4).



Ryc. 2.3.



Ryc. 2.4.

> Mówimy, że **zbiór *A* jest równy zbiorowi *B*** i piszemy $A = B$, gdy każdy element zbioru A należy do zbioru B i każdy element zbioru B należy do zbioru A.

Zauważmy więc, że $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$. Krótko mówiąc, dwa zbiory są równe, gdy mają te same elementy.

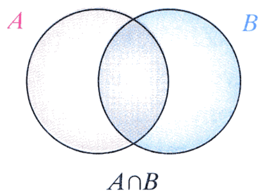
Działania na zbiorach

Niech A i B będą danymi zbiorami.

> **Częścią wspólną** lub **iloczynem zbiorów** A i B nazywamy zbiór tych elementów, z których każdy należy do A i do B. Iloczyn zbiorów A i B oznaczamy symbolem $A \cap B$.

Zatem $x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B$, oraz
$x \notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B$ (na mocy I prawa de Morgana)

Interpretację iloczynu zbiorów A i B przedstawia rycina 2.5.



Ryc. 2.5.

Przykład 1. Niech $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 2, 3, 4, 5\}$. Wówczas $A \cap B = \{-1, 2, 3\}$.

Przykład 2. N oznacza zbiór liczb naturalnych, C – jest zbiorem liczb całkowitych, W – jest zbiorem liczb wymiernych, R oznacza zbiór liczb rzeczywistych. Wówczas, oczywiście $N \subset C \subset W \subset R$ oraz $N \cap C = N$, $C \cap W = C$, $W \cap R = W$.

Zauważmy, że:

$A \cap A = A$.

Jeżeli $A \subset B$, to $A \cap B = A$.

Zbiory A i B nazywamy **rozłącznymi**, jeśli $A \cap B = \varnothing$.

Przykład 3. $A \cap \varnothing = \varnothing$.

Przykład 4. Niech $A = \{-3, -2, -1, 0\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wówczas $A \cap B = \varnothing$.

Sumą lub **połączeniem zbiorów** A i B nazywamy zbiór tych elementów, z których każdy należy do co najmniej jednego ze zbiorów A i B, i oznaczamy go przez $A \cup B$.

Wobec tego $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \vee x \in B$, oraz $x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$ (na mocy II prawa de Morgana).

Ilustracją sumy zbiorów A i B jest rycina 2.6.

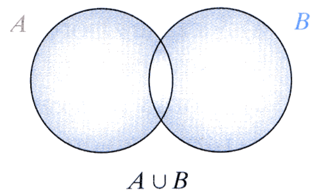
Przykład 5. Niech $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 1, 3, 4, 5\}$.

Wówczas $A \cup B = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Zauważmy, że:

$A \cup A = A$, $A \cup \varnothing = A$.

Jeżeli $A \subset B$, to $A \cup B = B$.



Ryc. 2.6.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór tych elementów, z których każdy należy do A i nie należy do B, i oznaczamy go przez $A \setminus B$.

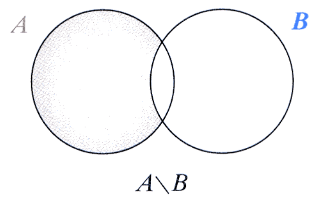
Różnicę zbiorów A i B ilustruje rycina 2.7.

Tak więc $x \in A \setminus B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B$,

$x \notin A \setminus B \Leftrightarrow x \notin A \vee x \in B$.

Przykład 6. Niech $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-2, -1, 1, 2\}$.

Wówczas $A \setminus B = \{-3, 0, 3\}$, $B \setminus A = \varnothing$.



Ryc. 2.7.

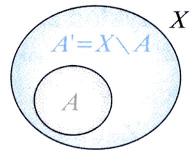
Przykład 7. Jeżeli $A \subset B$, to $A \setminus B = \varnothing$.

Na ogół nasze rozważania ograniczamy do zbiorów, które są podzbiorami pewnego ustalonego zbioru, zwanego tutaj przestrzenią.

Niech A będzie podzbiorem przestrzeni X:

Dopełnieniem zbioru A do przestrzeni X nazywamy zbiór $X \setminus A$ i oznaczamy go przez A'.

Stąd:



Ryc. 2.8.

1. $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$;
2. $\varnothing' = X$;
3. $X' = \varnothing$;
4. $(A')' = A$.

Przykład 8. Dopełnieniem zbioru liczb naturalnych w przestrzeni liczb całkowitych jest zbiór liczb całkowitych ujemnych, natomiast dopełnieniem zbioru liczb wymiernych w przestrzeni liczb rzeczywistych jest zbiór liczb niewymiernych.

Pytania i zadania

1. Podaj znaczenie terminów:
   a) zawieranie się zbioru w zbiorze,
   b) zbiór skończony,
   c) zbiór pusty,
   d) zbiór nieskończony,
   e) podzbiór zbioru.
2. Podaj definicje:
   a) iloczynu zbiorów,
   b) sumy zbiorów,
   c) zbiorów rozłącznych,
   d) różnicy zbiorów,
   e) dopełnienia zbioru.
3. Czym jest suma liczb 1, 2, 3, 4, 5, 6, a czym jest suma zbiorów $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$, $\{6\}$?
4. Wyznacz wszystkie podzbiory zbioru $\{a, b, c, d\}$.
5. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$, $B = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$. Wyznacz: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.
6. A jest zbiorem trójkątów równobocznych, B jest zbiorem trójkątów równoramiennych, C jest zbiorem trójkątów prostokątnych. Wyznacz zbiory: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus C$, $A \cap C$, $B \cap C$, $B \cup C$, $C \setminus A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $B \setminus C$.
7. Dane są zbiory: $A = \{1, 2, 4, 5, 8, 16\}$, $B = \{4, 5, 8, 11\}$, $C = \{1, 7, 8, 15, 16\}$. Korzystając z symboli $\cup$, $\cap$, uzupełnij prawe strony równości:
   a) $\{4, 5, 8\} =$; b) $\{1, 2, 4, 5, 8, 11, 16\} =$; c) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 15, 16\} =$;
   d) $\{8\} =$; e) $\{1, 8, 16\} =$; f) $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 11, 15, 16\} =$;
   g) $\{1, 4, 5, 7, 8, 11, 15, 16\} =$.

8*. Niech a, b, c, d będą różnymi liczbami naturalnymi. Wiadomo, że zbiory $\{a, b, 6\}$, $\{6, 7, c\}$, $\{a, b, 8\}$, $\{b, d, 9\}$ są podzbiorami zbioru $\{a, b, c, d\}$. Wyznacz a, b, c, d.

9*. Elementami zbiorów A, B, C są liczby 1, 2, 3, ..., 9. Wiadomo, że $A \cap B = \{1, 2\}$, $B \cap C = \{3, 7\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$. Wyznacz elementy każdego ze zbiorów A, B, C.

2. Prawa rachunku zbiorów

Każde działanie na zbiorach ma swój odpowiednik wśród działań na zdaniach. Na przykład iloczynowi zbiorów odpowiada koniunkcja zdań, gdyż element a należy do iloczynu $A \cap B$ wtedy i tylko wtedy, gdy a należy do A i (koniunkcja!) gdy a należy do B.

Podobnie:
- sumie zbiorów odpowiada alternatywa zdań,
- dopełnieniu zbiorów odpowiada negacja zdania,
- zawieraniu się zbioru w zbiorze odpowiada implikacja zdań,
- równości zbiorów odpowiada równoważność zdań.

Naturalną konsekwencją tej odpowiedniości jest to, że działania na zbiorach mają te same własności co odpowiadające im działania na zdaniach. Otrzymujemy w ten sposób tak zwane prawa rachunku zbiorów, odpowiadające stosownym prawom rachunku zdań (tautologiom).

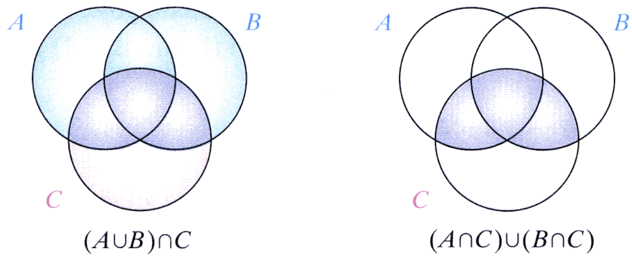
Niektóre z nich podano w poniższej tabeli.

Rachunek zbiorów		Rachunek zdań	
nazwa prawa	treść prawa	nazwa prawa	treść prawa
przemienność iloczynu	$A \cap B = B \cap A$	przemienność koniunkcji	$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
przemienność sumy	$A \cup B = B \cup A$	przemienność alternatywy	$p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
łączność iloczynu	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	łączność koniunkcji	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
łączność sumy	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	łączność alternatywy	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
rozdzielność iloczynu względem sumy	$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$	rozdzielność koniunkcji względem alternatywy	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
rozdzielność sumy względem iloczynu	$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$	rozdzielność alternatywy względem koniunkcji	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
I prawo de Morgana	$(A \cap B)' = A' \cup B'$	I prawo de Morgana	$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$
II prawo de Morgana	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	II prawo de Morgana	$\sim(p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$

I prawo de Morgana rachunku zbiorów głosi: dopełnienie części wspólnej zbiorów A i B jest sumą dopełnień tych zbiorów.

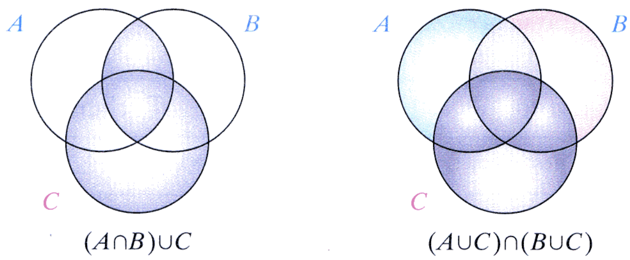
II prawo de Morgana rachunku zbiorów orzeka: dopełnienie sumy zbiorów A i B jest częścią wspólną dopełnień tych zbiorów.

Prawa rachunku zbiorów nietrudno jest zilustrować geometrycznie. Oto ilustracja prawa rozdzielności iloczynu względem sumy (ryc. 2.9).



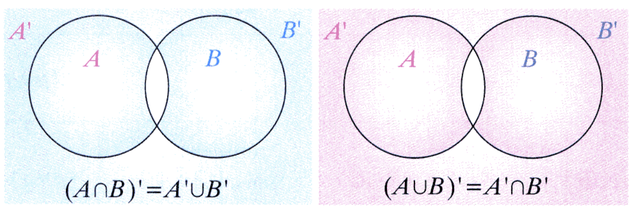
Ryc. 2.9.

A tak zilustrować można prawa rozdzielności sumy względem iloczynu zbiorów (ryc. 2.10).



Ryc. 2.10.

Z kolei rycina poniżej jest ilustracją geometryczną praw de Morgana (ryc. 2.11).



Ryc. 2.11.

Aby sprawdzić, czy zachodzi dane prawo rachunku zbiorów, odwołujemy się do odpowiednich praw logicznych. Prześledźmy to na przykładach.

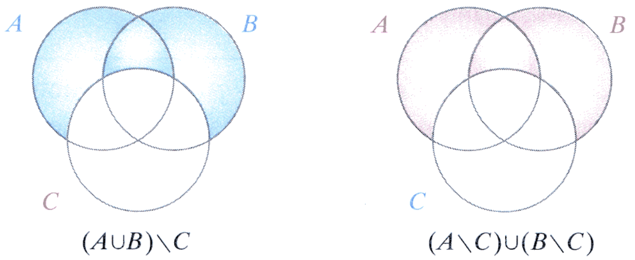
Przykład 1. Wykaż, że dla wszelkich zbiorów A, B, C zachodzi równość

$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$.

Rozwiązanie:

Dla dowolnego elementu x mamy $x \in (A \cup B) \setminus C \Leftrightarrow (x \in A \cup B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin C)) \vee ((x \in B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \setminus C) \vee (x \in B \setminus C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$ (korzystaliśmy z określenia działań na zbiorach i z prawa rozdzielności koniunkcji względem alternatywy zdań).

Poniższa rycina przedstawia interpretację geometryczną udowodnionej równości (ryc. 2.12).



Ryc. 2.12.

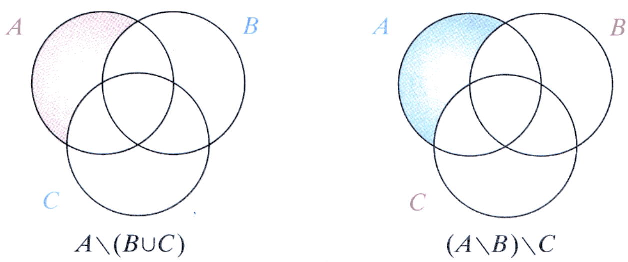
Przykład 2. Wykaż, że dla wszelkich zbiorów A, B, C zachodzi równość

$$A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C.$$

Rozwiązanie:

Dla dowolnego elementu x mamy: $x \in A \setminus (B \cup C) \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B \cup C) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \in A) \wedge ((x \notin B) \wedge (x \notin C)) \Leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \notin B)) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (x \in A \setminus B) \wedge (x \notin C) \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \setminus C$ (korzystaliśmy tutaj z określenia działań na zbiorach i z prawa łączności koniunkcji).

Dowodzoną równość ilustrujemy tak (ryc. 2.13):



Ryc. 2.13.

Pytania i zadania

1. Na czym polega odpowiedniość między działaniami na zbiorach i działaniami na zdaniach? Wymień pary odpowiadających sobie działań.
2. Wyjaśnij odpowiedniość między prawami rachunku zbiorów i prawami rachunku zdań. Podaj przykłady odpowiadających sobie praw.
3. Udowodnij, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

   a) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; b) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
4. Rozstrzygnij, czy dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą równości:

   a) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; b) $A \cup (A \cap B) = A$; c) $A \cap (A \cup B) = B$.
5. A jest zbiorem czworokątów, B jest zbiorem trapezów, C jest zbiorem równoległoboków, D jest zbiorem prostokątów. Wyznacz: $A \cap B$, $A \cap D$, $B \cup D$ $C \setminus D$, $C \cup D$, $C \cap D$, $B \setminus A$, $D \setminus C$.

3. Zbiór elementów spełniających formę zdaniową

Niech $p(x)$ będzie daną formą zdaniową:

Zbiorem elementów spełniających formę zdaniową $p(x)$ nazywamy zbiór tych x należących do dziedziny formy zdaniowej $p(x)$, dla których forma ta staje się zdaniem prawdziwym. Zbiór ten oznaczamy symbolem $\{x : p(x)\}$.

Przykład 1. $\{n : n \in N \wedge n < 10\}$ jest zbiorem liczb naturalnych mniejszych od 10, to jest zbiorem $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

Przykład 2. $\{x : x \in R \wedge (x-1)(x-2) = 0\}$ jest zbiorem rozwiązań równania $(x-1)(x-2) = 0$, czyli zbiorem $\{1, 2\}$.

Przykład 3. $\{k : k \in C \wedge 2 | k\}$ jest zbiorem liczb całkowitych parzystych.

Uwaga. Zapis $a|b$ czytamy: „a jest podzielnikiem b" albo „b jest podzielna przez a".

Niech $p(x)$ i $q(x)$ będą formami zdaniowymi o wspólnej dziedzinie X oraz niech $A = \{x : p(x)\}$, $B = \{x : q(x)\}$.

Wówczas:

$$A \subset B \Leftrightarrow \bigwedge_x \left(p(x) \Rightarrow q(x) \right)$$

$$A = B \Leftrightarrow \bigwedge_x \left(p(x) \Leftrightarrow q(x) \right)$$

$$A \cap B = \{x : p(x) \wedge q(x)\}$$

$$A \cup B = \{x : p(x) \vee q(x)\}$$

$$A' = \{x : \sim p(x)\}$$

$$A \setminus B = \{x : p(x) \wedge (\sim q(x))\}$$

Są to związki, w jakich pozostają relacje zawierania i równości zbiorów oraz działania: iloczynu, sumy, różnicy i dopełnienia zbiorów z formami zdaniowymi.

Pytania i zadania

1. Wyjaśnij związki działań na zbiorach z formami zdaniowymi.
2. Wyjaśnij związki między działaniami na zbiorach a formami zdaniowymi.
3. Określ za pomocą działań na zbiorach $A = \{x : p(x)\}$, $B = \{x : q(x)\}$:

$\{x : \sim p(x) \vee (\sim q(x))\}$,

$\{x : \sim p(x) \wedge (\sim q(x))\}$.

III. Rachunek algebraiczny

1. Ćwiczenia w działaniach na ułamkach

Ułamki i działania na nich znasz już ze szkoły podstawowej. Potrafisz zapewne porównywać ułamki oraz wykonywać na nich działania arytmetyczne, to znaczy dodawać, odejmować, mnożyć i dzielić je. Obecnie powtórzymy i utrwalimy sobie te wiadomości oraz wykonamy wiele ćwiczeń.

Ułamki zwykłe. Jeżeli a i b są liczbami całkowitymi $(b \neq 0)$, to iloraz $\frac{a}{b}$ nazywamy ułamkiem **zwykłym**:

- **właściwym**, gdy $-1 < \frac{a}{b} < 1$, na przykład $\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{5}$.
- **niewłaściwym**, gdy $\frac{a}{b} \leqslant -1$ lub $\frac{a}{b} \geqslant 1$, na przykład $\frac{-2}{2}, \frac{2}{2}, \frac{4}{3}, -\frac{5}{4}$.

Ułamek nie zmieni swojej wartości, gdy jego licznik i mianownik pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę różną od zera:

rozszerzanie ułamka $\quad \frac{a}{b} = \frac{a \cdot c}{b \cdot c}$

$c \neq 0, \quad b \neq 0$

skracanie ułamka $\quad \frac{a \cdot c}{b \cdot c} = \frac{a}{b}$.

Ułamki dodajemy (odejmujemy), sprowadzając je do wspólnego mianownika:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + c \cdot b}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - c \cdot b}{b \cdot d}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0,$$

mnożymy zaś i dzielimy następująco:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}, \quad b \neq 0, \quad d \neq 0.$$

W praktyce, aby dodać lub odjąć ułamki o różnych mianownikach, sprowadzamy je do ułamków o wspólnym mianowniku, znajdując najpierw NWW (najmniejszą wspólną wielokrotność) tych mianowników.

Na przykład:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 3} - \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6},$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1 \cdot 2}{2 \cdot 2} - \frac{1}{4} = \frac{2-1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Ułamki dziesiętne. Ułamki o mianownikach 10, 100, 1000, ... zapisujemy w systemie dziesiętnym, oddzielając przecinkiem część całkowitą i pisząc za przecinkiem cyfry wskazujące liczby części dziesiątych, setnych, tysięcznych, ... itd.

Na przykład:

$$\frac{4}{10} = 0{,}4; \quad \frac{125}{1000} = 0{,}125; \quad \frac{728}{100} = 7{,}28.$$

Ten zapis, zwany rozwinięciem dziesiętnym ułamka, ma następujący schemat

$$\ldots ABC{,}DEF\ldots = \underbrace{\ldots A\cdot 100 + B\cdot 10 + C\cdot 1}_{\text{część całkowita}} + \underbrace{\frac{D}{10} + \frac{E}{100} + \frac{F}{1000} + \ldots}_{\text{część ułamkowa}},$$

przy czym litery ..., A, B, C, D, E, F, ... oznaczają cyfry 0, 1, 2, 3, ..., 9 (niekoniecznie różne).

W ten sposób można zapisać każdy ułamek, dzieląc licznik przez mianownik w znany sposób. Zapisaną w ten sposób liczbę nazywamy **ułamkiem dziesiętnym**.

Zanim przystąpimy do ćwiczeń w działaniach na ułamkach, przypomnijmy sobie jeszcze kolejność wykonywania działań na liczbach. Ustalona jest ona następującymi umowami:

1. Przy obliczaniu wartości wyrażeń niezawierających nawiasu wykonujemy najpierw mnożenie i dzielenie w kolejności ich występowania, a następnie dodawanie i odejmowanie w kolejności ich występowania.
2. Przy obliczaniu wartości wyrażeń zawierających nawiasy wykonujemy najpierw działania w tych nawiasach, wewnątrz których nie ma już innych.

Pora na ćwiczenia.

Przykład 1. Wykonaj działania:

a) $\frac{5}{21}+\frac{4}{9}$; b) $\frac{23}{36}-\frac{1}{24}$; c) $3\frac{4}{5}\cdot 2\frac{2}{3}$; d) $2\frac{1}{2}:\frac{5}{6}$.

Rozwiązanie:

a) $\frac{5}{21}+\frac{4}{9}=\frac{5}{3\cdot 7}+\frac{4}{3\cdot 3}=\frac{5\cdot 3+4\cdot 7}{3\cdot 3\cdot 7}=\frac{15+28}{63}=\frac{43}{63}$;

b) $\frac{23}{36}-\frac{1}{24}=\frac{23}{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2}=\frac{23\cdot 2-1\cdot 3}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=\frac{46-3}{72}=\frac{43}{72}$;

c) $3\frac{4}{5}\cdot 2\frac{2}{3}=\frac{19}{5}\cdot\frac{8}{3}=\frac{152}{15}=10\frac{2}{15}$;

d) $2\frac{1}{2}:\frac{5}{6}=\frac{5}{2}:\frac{5}{6}=\frac{5}{2}\cdot\frac{6}{5}=\frac{6}{2}=3$.

Przykład 2. Wykonaj działania:

a) $2\frac{5}{6}+3\frac{7}{9}$; b) $5\frac{11}{24}-3\frac{5}{18}$; c) $4\frac{1}{5}-6\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie:

a) $2\frac{5}{6}+3\frac{7}{9}=(2+3)+\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{9}\right)=5+\frac{5\cdot 3+7\cdot 2}{18}=5+\frac{29}{18}=5+1+\frac{11}{18}=6\frac{11}{18}$;

b) $5\frac{11}{24}-3\frac{5}{18}=(5-3)+\left(\frac{11}{24}-\frac{5}{18}\right)=2+\left(\frac{11}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3}-\frac{5}{2\cdot 3\cdot 3}\right)=2+\frac{11\cdot 3-5\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}=$

$=2+\frac{33-20}{24}=2+\frac{13}{24}=2\frac{13}{24}$;

c) $4\frac{1}{5}-6\frac{2}{3}=(4-6)+\left(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\right)=-2+\frac{3-10}{15}=-2+\left(-\frac{7}{15}\right)=-2\frac{7}{15}.$

Przykład 3. Oblicz:

a) $\left(1\frac{3}{7}-2\frac{1}{4}\right)\cdot 3\frac{1}{3}$; b) $\left(2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}\right):\left(-4\frac{1}{6}+3\frac{1}{7}\right)$;

c) $$\frac{\left(13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}\right)\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{\left(1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}\right):\left(12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}\right)}.$$

Rozwiązanie:

a) $$\left(1\frac{3}{7}-2\frac{1}{4}\right)\cdot 3\frac{1}{3}=\left((1-2)+\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right)\right)\cdot\frac{10}{3}=\left(-1+\frac{12-7}{28}\right)\cdot\frac{10}{3}=$$

$$=\left(-1+\frac{5}{28}\right)\cdot\frac{10}{3}=\left(-\frac{28}{28}+\frac{5}{28}\right)\cdot\frac{10}{3}=-\left(\frac{28}{28}-\frac{5}{28}\right)\cdot\frac{10}{3}=$$

$$=-\frac{23}{28}\cdot\frac{10}{3}=-\frac{23}{14}\cdot\frac{5}{3}=-\frac{23\cdot 5}{14\cdot 3}=-\frac{115}{42}=-2\frac{31}{42};$$

b) $$\left(2\frac{1}{3}+3\frac{1}{2}\right):\left(-4\frac{1}{6}+3\frac{1}{7}\right)=\left((2+3)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\right)\right):\left((-4+3)+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)\right)=$$

$$=\left(5+\frac{2+3}{6}\right):\left(-1+\frac{-7+6}{42}\right)=5\frac{5}{6}:\left(-1\frac{1}{42}\right)=\frac{35}{6}:\left(-\frac{43}{42}\right)=\frac{35}{6}\cdot\left(-\frac{42}{43}\right)=$$

$$=\frac{35}{1}\cdot\left(-\frac{7}{43}\right)=-\frac{245}{43}=-5\frac{30}{43}.$$

c) Niech $A=13\frac{1}{4}-2\frac{5}{27}-10\frac{5}{6}$; $B=1\frac{3}{7}+\frac{10}{3}$; $C=12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}$;

wówczas

$$A=(13-2-10)+\left(\frac{1}{4}-\frac{5}{27}-\frac{5}{6}\right)=1+\frac{27-20-90}{108}=1-\frac{83}{108}=\frac{25}{108},$$

$$A\cdot 230\frac{1}{25}=\frac{25}{108}\cdot\frac{5751}{25}=\frac{5751}{108}=\frac{639}{12}=\frac{213}{4},$$

$$A\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}=\frac{213}{4}+\frac{187}{4}=100;$$

$$B=1+\frac{3}{7}+3+\frac{1}{3}=4+\frac{3}{7}+\frac{1}{3}=4+\frac{16}{21}=\frac{100}{21};$$

$$C=12\frac{1}{3}-14\frac{2}{7}=(12-14)+\left(\frac{1}{3}-\frac{2}{7}\right)=-2+\frac{7-6}{21}=-2+\frac{1}{21}=-\frac{41}{21};$$

$$B:C=\frac{100}{21}:\left(-\frac{41}{21}\right)=-\frac{100}{41}.$$

Ostatecznie

$$\frac{A\cdot 230\frac{1}{25}+46\frac{3}{4}}{B:C}=\frac{100}{-\frac{100}{41}}=-41.$$

Przykład 4. Oblicz:

$$\left(2{,}8:\left(2\tfrac{4}{5}\cdot\left(8{,}75-2\tfrac{1}{2}\right)\right)\right)\cdot 7{,}25-3\tfrac{3}{4}:\left(\left(1{,}2+5\tfrac{1}{20}\right)\cdot 3{,}75\right).$$

Rozwiązanie:

$$\left(2{,}8:\left(2\tfrac{4}{5}\cdot\left(8{,}75-2\tfrac{1}{2}\right)\right)\right)\cdot 7{,}25-3\tfrac{3}{4}:\left(\left(1{,}2+5\tfrac{1}{20}\right)\cdot 3{,}75\right)=$$

$$=\frac{2{,}8}{2\frac{4}{5}\cdot\left(8{,}75-2\frac{1}{2}\right)}\cdot 7{,}25-\frac{3\frac{3}{4}}{\left(1{,}2+5\frac{1}{20}\right)\cdot 3{,}75}=\frac{7{,}25}{8{,}75-2{,}5}-\frac{1}{1\frac{4}{20}+5\frac{1}{20}}=$$

$$=\frac{7{,}25}{6{,}25}-\frac{1}{6\frac{5}{20}}=\frac{725}{625}-\frac{1}{\frac{125}{20}}=1\frac{100}{625}-\frac{20}{125}=1\frac{4}{25}-\frac{4}{25}=1.$$

Przykład 5*. Wiadomo, że $\frac{a}{a+b}=\frac{2}{5}$. Oblicz $\frac{b}{a+b}$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $\frac{a}{a+b}+\frac{b}{a+b}=\frac{a+b}{a+b}=1$, więc $\frac{b}{a+b}=1-\frac{a}{a+b}=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

Przykład 6*. Oblicz $\frac{3a}{a+b}$, jeśli wiesz, że $\frac{a+b}{b}=\frac{1}{4}$.
Rozwiązanie:

Skoro $\frac{a+b}{b}=\frac{1}{4}$, więc $\frac{b}{a+b}=4$ oraz $\frac{a}{a+b}=1-\frac{b}{a+b}=1-4=-3$.

Wobec tego $\frac{3a}{a+b}=3\cdot\frac{a}{a+b}=3\cdot(-3)=-9$.

Przykład 7. Rozwiąż równania:

a) $2+\frac{180}{x-11}=22$; b) $\frac{x-5}{26{,}88}=\frac{16{,}04}{1{,}344}$; c) $\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)+2\right)+2\right)+2\right]=1$.

Rozwiązanie:

a) $2+\frac{180}{x-11}=22$, (odejmujemy od obu stron 2)

$\frac{180}{x-11}=20$, (dzielimy obie strony przez 20)

$\frac{9}{x-11} = 1,$ (mnożymy obie strony przez $x - 11$)

$9 = x - 11,$

$x = 20.$

b) $\frac{x-5}{26,88} = \frac{16,04}{1,344},$ (przesuwamy przecinek o jedno miejsce w prawo)

$\frac{x-5}{26,88} = \frac{160,4}{13,44},$ (mnożymy obie strony przez 26,88)

$x - 5 = 160,4 \cdot 2,$

$x - 5 = 320,8,$

$x = 325,8.$

c) Odwracając działania i opuszczając nawiasy, otrzymujemy kolejno równania:

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)+2\right)+2\right)+2=3,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)+2\right)+2\right)=1,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)+2\right)+2=3,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)+2\right)=1,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)+2=3,$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}(x+2)+2\right)=1,$$

$$\frac{1}{3}(x+2)+2=3,$$

$$\frac{1}{3}(x+2)=1,$$

$$x+2=3,$$

$$x=1.$$

Przykład 8. Na przyjęcie urodzinowe Piotra przybyło 5 jego przyjaciół. Pierwszemu z nich mama Piotra ukroiła $\frac{1}{6}$ całego tortu, drugiemu $\frac{1}{5}$ reszty, trzeciemu $\frac{1}{4}$ tego, co zostało, czwartemu $\frac{1}{3}$ pozostałego kawałka. Resztę tortu podzieliła równo pomiędzy Piotra i piątego z przyjaciół. Który z obecnych na przyjęciu chłopców otrzymał największy kawałek?

Rozwiązanie:

Każdy z chłopców otrzymał $\frac{1}{6}$ całego tortu, ponieważ

$$\frac{1}{5}\cdot\left(1-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{6};\quad \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{6}=\frac{1}{6};\quad \frac{1}{3}\cdot\frac{3}{6}=\frac{1}{6}\ \text{oraz}\ \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}=\frac{1}{6}.$$

Przykład 9*. Suma dwóch ułamków wynosi $\frac{17}{60}$. Ich liczniki mają się do siebie jak 2:3, a mianowniki – jak 3:4. Znajdź te ułamki.

Rozwiązanie:

Jeżeli $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ oznaczają poszukiwane ułamki, to z treści zadania wiemy, że $\frac{a}{c}=\frac{2}{3}$ i $\frac{b}{d}=\frac{3}{4}$.

Stąd $\frac{a}{c}:\frac{b}{d}=\frac{8}{9}$, czyli $\frac{a}{b}=\frac{8}{9}\cdot\frac{c}{d}$. Ale $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{17}{60}$, więc $\frac{8}{9}\cdot\frac{c}{d}+\frac{c}{d}=\frac{17}{60}$,

czyli $\left(\frac{8}{9}+1\right)\frac{c}{d}=\frac{17}{60}$, skąd $\frac{c}{d}=\frac{3}{20}$. Zatem $\frac{a}{b}=\frac{17}{60}-\frac{3}{20}=\frac{2}{15}$.

Szukane ułamki to: $\frac{2}{15}$ i $\frac{3}{20}$.

Przykład 10*. Oblicz wartości wyrażeń:

a) $\frac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}$; b) $4\frac{1}{2000}\cdot 2\frac{2000}{2001}+1\frac{1999}{2000}\cdot 5\frac{1}{2001}+2\frac{1}{1000}\cdot 1\frac{1}{2001}$.

Rozwiązanie:

a) Oznaczmy dla wygody w rachunkach: $a=254$, $b=145$. Wówczas

$$\frac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}=\frac{a\cdot(a+b)-b}{a+(a+b)(a-1)}=\frac{a^2+ab-b}{a+(a+b)a-(a+b)}=\frac{a^2+ab-b}{a+a^2+ab-a-b}=$$

$$=\frac{a^2+ab-b}{a^2+ab-b}=1.$$

b) Oznaczmy: $a=\frac{1}{2000}$, $b=\frac{1}{2001}$. Wówczas

$$4\frac{1}{2000}\cdot 2\frac{2000}{2001}+1\frac{1999}{2000}\cdot 5\frac{1}{2001}+2\frac{1}{1000}\cdot 1\frac{1}{2001}=$$

$$=(4+a)(3-b)+(2-a)(5+b)+(2+2a)(1+b)=$$

$$=12-4b+3a-ab+10+2b-5a-ab+2+2b+2a+2ab=24.$$

Przykład 11. Wyznacz różnicę $\frac{4}{7}a-\frac{4}{7}b$, wiedząc, że $\frac{5}{12}a-\frac{5}{12}b=\frac{3}{8}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\frac{5}{12}a-\frac{5}{12}b=\frac{3}{8}$, więc $\frac{5}{12}(a-b)=\frac{3}{8}$, skąd $a-b=\frac{3}{8}\cdot\frac{12}{5}=\frac{9}{10}$.

Wobec tego $\frac{4}{7}a-\frac{4}{7}b=\frac{4}{7}\cdot(a-b)=\frac{4}{7}\cdot\frac{9}{10}=\frac{18}{35}$.

Przykład 12. Porównaj ułamki: $\frac{23}{99}$; $\frac{2323}{9999}$; $\frac{232323}{999999}$.
Rozwiązanie:
Ułamki te są równe, gdyż $\frac{2323}{9999} = \frac{23 \cdot 101}{99 \cdot 101} = \frac{23}{99}$ i $\frac{232323}{999999} = \frac{23 \cdot 10101}{99 \cdot 10101} = \frac{23}{99}$.

Pytania i zadania

1. Porównaj ułamki:
a) $\frac{3}{4}$ i $\frac{4}{7}$; b) $-\frac{5}{11}$ i $-\frac{6}{11}$; c) $\frac{13}{123}$ i $\frac{13}{129}$; d) $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{5}$; e) $\frac{6}{7}$ i $\frac{24}{28}$; f) $-\frac{13}{14}$ i $-\frac{14}{15}$.
2. Oblicz:
a) $1\frac{5}{8} + 3\frac{3}{8}$; b) $4\frac{2}{3} - 3\frac{1}{3}$; c) $5\frac{7}{11} - 3\frac{5}{6}$; d) $2\frac{2}{5} : 4\frac{1}{3}$;
e) $\left(-2\frac{1}{2}\right) : \left(-3\frac{4}{5}\right)$; f) $\left(-3\frac{1}{3}\right) \cdot \left(-2\frac{7}{10}\right)$.
3. Oblicz:
a) $0{,}23 + 1{,}64$; b) $2{,}73 + 4{,}69$; c) $4{,}72 - 2{,}34$; d) $5{,}21 - 3{,}89$; e) $0{,}37 \cdot 3{,}2$;
f) $(-2{,}1) \cdot (1{,}1)$; g) $(-0{,}19) \cdot (2{,}4)$; h) $1{,}125 : 2{,}5$; i) $(-2{,}35) \cdot (0{,}5)$; j) $(-1{,}3) \cdot 0{,}1$.
4. Oblicz:
a) $\left(\frac{1}{4} - \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}{\frac{1}{9}}\right) : \left(\frac{2}{3} + \frac{\frac{7}{15}}{\frac{2}{5} - \frac{1}{6}}\right)$; b) $\frac{(11{,}81 + 8{,}19) \cdot 0{,}02}{\frac{9}{11{,}25}}$; c) $\frac{(1{,}09 - 0{,}29) \cdot 1\frac{1}{4}}{\left(18{,}9 - 16\frac{13}{20}\right) \cdot \frac{8}{9}}$;
d) $(0{,}8 \cdot 7 + 0{,}64) \cdot \left(1{,}25 \cdot 7 - \frac{4}{5} \cdot 1{,}25\right) + 31{,}64$.
5. Oblicz
$$\left(\frac{\left(2{,}4 + 1\frac{5}{7}\right) \cdot 4{,}375}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{\left(2{,}75 - 1\frac{5}{6}\right) \cdot 21}{8\frac{3}{20} - 0{,}45}\right) : \frac{67}{200}.$$
6. Oblicz iloczyn
$$\left(1 + \frac{2}{3}\right)\left(1 + \frac{2}{5}\right)\left(1 + \frac{2}{7}\right)\left(1 + \frac{2}{9}\right)\left(1 + \frac{2}{11}\right)\left(1 + \frac{2}{13}\right)\left(1 + \frac{2}{15}\right)\left(1 + \frac{2}{17}\right)\left(1 + \frac{2}{19}\right).$$
7. Oblicz sumę
$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{4}{5} + \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{6}{7} + \frac{1}{8}\right) + \frac{7}{8}.$$
8*. Oblicz
$$2000\frac{7}{13} \cdot 2001\frac{7}{13} - 1999\frac{7}{13} \cdot 2002\frac{7}{13}.$$
9*. Rozwiąż równania:
a) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\left(\frac{1}{7}\left(\frac{1}{8}\left(\frac{1}{9}x + \frac{8}{9}\right) + \frac{7}{8}\right) + \frac{6}{7}\right) + \frac{5}{6}\right) + \frac{4}{5}\right) + \frac{3}{4}\right) + \frac{2}{3}\right) + \frac{1}{2} = 1$;

b) $2\frac{2}{3}:\left(\left(\left(3{,}72-0{,}02x\right)\cdot\frac{10}{37}\right):\frac{5}{6}+2{,}8\right)-\frac{7}{15}=0{,}2;$

c) $\left(\left(7+0{,}004x\right):0{,}9\right):24{,}7-12{,}3=77{,}7.$

10*. Mama chce rozlać 13 kg miodu do słoików, w których mieści się po $1\frac{1}{2}$ kg i $2\frac{1}{2}$ kg. Ile słoików każdej wielkości musi przygotować?

2. Obliczenia procentowe

Niemal każdego dnia stykamy się z pojęciem procentu. Słuchając radia, oglądając telewizję, czy też czytając prasę, poznajemy procentowe dane dotyczące inflacji, poziomu zatrudnienia, ruchu cen itp. Nie sposób więc obejść się na co dzień bez znajomości obliczeń procentowych.

Pojęcie procentu znasz już z pewnością ze szkoły podstawowej.

!

Jeden **procent** (piszemy 1%) danej liczby to setna część tej liczby.

Na przykład:

1% liczby 100 wynosi $\frac{1}{100}\cdot 100=1$;

5% liczby 40 wynosi $\frac{5}{100}\cdot 40=2$;

15 % liczby 300 wynosi $\frac{15}{100}\cdot 300=45$.

Wniosek 1. $p\%$ liczby a to $\frac{p}{100}\cdot a$.

Wniosek 2. Liczba, której $p\%$ wynosi b, równa jest $\frac{b\cdot 100}{p}$.

Zadania związane z obliczeniami procentowymi można podzielić na trzy grupy.

Obliczanie procentu danej liczby

Przykład 1. W klasie liczącej 32 uczniów chłopcy stanowią 75%. Ilu chłopców uczęszcza do tej klasy?

Rozwiązanie:

Należy obliczyć 75% liczby 32. Mamy: $\frac{75}{100}\cdot 32=\frac{3}{4}\cdot 32=3\cdot 8=24$. Do tej klasy uczęszcza więc 24 chłopców.

Przykład 2. Cena 1 akcji pewnej spółki giełdowej wynosi 110 zł. W czasie sesji kurs jej wzrósł o 4,5%. Ile wyniosła cena 1 akcji tej spółki na koniec sesji?

Rozwiązanie:

Obliczamy najpierw 4,5% liczby 110. Otrzymujemy:

$$\frac{4{,}5}{100}\cdot 110=\frac{45\cdot 11}{100}=\frac{450+45}{100}=\frac{495}{100}=4{,}95.$$

Wobec tego $110+4{,}95=114{,}95$.

Zatem cena 1 akcji tej spółki na koniec sesji wyniosła 114,95 zł.

Przykład 3. Złożyliśmy do banku na lokatę terminową 1500 zł. Stopa procentowa wynosi w tym banku 11% w stosunku rocznym. Jaką kwotę będziemy mieć na tej lokacie po upływie dwóch lat?
Rozwiązanie:

Po upływie roku nasza kwota wzrośnie o $\frac{11}{100} \cdot 1500 = 11 \cdot 15 = 165$ zł,
a po drugim roku o

$$\frac{11}{100} \cdot 1665 = \frac{11 \cdot 1665}{100} = \frac{(10+1) \cdot 1665}{100} = \frac{16650 + 1665}{100} = \frac{18315}{100} = 183{,}15 \text{ zł}.$$

Zatem po dwóch latach będziemy mieć na tej lokacie 1665 zł + 183,15 zł = 1848,15 zł.

Obliczanie wielkości, kiedy jej procent jest dany

Przykład 1. 20% pewnej liczby wynosi 150. Jaka to liczba?
Rozwiązanie:
Skoro 20% szukanej liczby stanowi 150, to 1% tej liczby wynosi $7{,}5 = \frac{150}{20}$. Zatem 100% szukanej liczby to $7{,}5 \cdot 100 = 750$. Liczba, o którą chodzi w zadaniu, to 750.

Przykład 2. Pierwszy etap wycieczki rowerowej miał długość 48 km, co stanowi 12% długości całej trasy. Ile kilometrów liczy cała trasa tej wycieczki?
Rozwiązanie:
Jeżeli 12% całej trasy wycieczki stanowi 48 km, to 1% tej trasy wynosi 4 km. Zatem cała trasa wycieczki liczy $100 \cdot 4$ km $= 400$ km.

Obliczanie, jakim procentem danej liczby jest inna dana liczba

Przykład 1. 8 uczniów z naszej 32-osobowej klasy wzięło udział w olimpiadzie matematycznej. Jaki procent uczniów tej klasy wziął udział w tej olimpiadzie?
Rozwiązanie:
Mamy obliczyć, jakim procentem liczby 32 jest liczba 8.
$\frac{8}{32} \cdot 100\% = 25\%$. Liczba 8 stanowi 25% liczby 32.

Przykład 2. Na początku sezonu za 1 kg truskawek trzeba było zapłacić 10 zł. W środku sezonu 1 kg truskawek kosztował już tylko 2 zł. Jaki był procentowy spadek ceny 1 kg truskawek?
Rozwiązanie:
Z treści zadania wynika, że truskawki staniały o 8 zł, co stanowi 80% ceny 1 kg truskawek na początku sezonu.

$$\frac{8}{10} \cdot 100\% = 80\%.$$

Przykład 3. O ile procent zwiększy się pole kwadratu, jeśli jego bok zwiększymy o 10%?
Rozwiązanie:
Załóżmy, że mamy kwadrat o boku a. Jego pole wynosi, oczywiście, a^2.
Skoro bok tego kwadratu wydłużamy o 10%, to otrzymamy kwadrat o boku

$a + \frac{a}{10} = \frac{11}{10}a$. Pole tego kwadratu wyniesie $\left(\frac{11}{10}a\right)^2 = \frac{121}{100}a^2$, a więc zwiększy się o $\frac{21}{100}$ swej wartości początkowej, czyli o 21%.

Jeden **promil** (piszemy 1‰) danej liczby to tysięczna część tej liczby.

Na przykład

3‰ liczby 240 wynosi $\frac{3}{1000} \cdot 240 = 0{,}72$.

1% = 10‰.

Liczbę tysięcznych części danego metalu w stopie nazywamy próbą stopu ze względu na ten metal. Na przykład w stopie złota próby 0,875 czyste złoto stanowi 875‰ masy czystego stopu.

Przykład 4. Stopiono 1200 g srebra próby 0,750 i 800 g srebra próby 0,875. Jakiej próby jest otrzymany stop?

Rozwiązanie:

$1200 \cdot 0{,}75 + 800 \cdot 0{,}875 = 1600$ g. Całkowita zawartość srebra w stopie wynosi 1600 g.

$1200 + 800 = 2000$ g. Całkowita masa stopu wynosi więc 2000 g.

Wobec tego

$\frac{1600}{2000} = 0{,}8$.

Zatem próba stopu wynosi: 0,8.

Pytania i zadania

1. Co to jest 1 procent, 1 promil?
2. Co to znaczy złoto próby 0,940?
3. Oblicz 40% liczby $123\frac{1}{2} - 119\frac{3}{4}$.
4. $\frac{2}{3}$ pewnej liczby stanowi 75% liczby 24. Jaka to liczba?
5. Oblicz, jaki procent liczby uczniów Twojej klasy stanowią dziewczęta.
6. O ile procent zwiększy się pole koła, gdy jego promień zwiększymy o 40%?
7. Cena akcji pewnej spółki na giełdzie wzrosła podczas pierwszego notowania o 10%, a podczas drugiego o 15%. O ile procent cena tej akcji po dwóch notowaniach jest wyższa od ceny debiutu?
8. Cenę towaru obniżono najpierw o 20%, a następnie nową cenę podwyższono o 20%. Czy końcowa cena jest równa początkowej?
9. Zmieszano 2 kg stopu o zawartości 25% miedzi i 3 kg stopu o zawartości 40% miedzi. Ile procent miedzi zawiera otrzymany stop?
10. Na zakup samochodu wziąłem z banku kredyt w wysokości 40 000 zł, z oprocentowaniem rocznym 15%. Ile będę winien bankowi po czterech latach?
11. Długość prostokąta zwiększono o $p\%$, a jego szerokość zmniejszono o $p\%$, wskutek czego powstał prostokąt o polu o 16% mniejszym od pola pierwotnego prostokąta. Oblicz p.

3. Potęgowanie i pierwiastkowanie liczb

Potęgowanie

Dla dowolnej liczby a

$$a^2 = a \cdot a, \quad a^3 = a \cdot a \cdot a.$$

Na przykład:
$2^2 = 2 \cdot 2 = 4$, $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$, ale $-5^2 = -5 \cdot 5 = -25$; $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$; $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$

Niech n oznacza liczbę naturalną.

Potęgę o podstawie a i wykładniku n oznaczamy symbolem a^n i określamy następująco:

$$a^1 = a,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ czynników}}, \text{ gdy } n > 1.$$

Na przykład:

$$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16; \quad (-1)^3 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1;$$

$$(-3)^5 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -243; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8};$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}; \quad \frac{2^4}{3} = \frac{16}{3}; \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}, \text{ ale } -\frac{1^4}{2} = -\frac{1}{2}.$$

W powyższej definicji a jest dowolną liczbą i nazywa się ją **podstawą** potęgi, a liczbę n – **wykładnikiem** tej potęgi.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie (o działaniach na potęgach)

Dla dowolnych liczb a i b oraz dowolnych liczb naturalnych m i n:

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$;
2. $a^m : a^n = a^{m-n}$, $(a \neq 0 \text{ i } m > n)$;
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$;
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $(b \neq 0)$;
5. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$.

Dowód tego twierdzenia opiera się bezpośrednio na definicji potęgi. Istotnie:

1. $a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m+n} = a^{m+n}$;

2. $a^m : a^n = \frac{a^m}{a^n} = \frac{a^{(m-n)+n}}{a^n} = \frac{a^{m-n} \cdot a^n}{a^n} = a^{m-n}$, ponieważ $m - n > 0$;

3. $(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \ldots \cdot (a \cdot b)}_{n} = \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{n} \cdot \underbrace{(b \cdot b \cdot \ldots \cdot b)}_{n} = a^n \cdot b^n$;

4. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n} = \frac{\overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n}}{\underbrace{b \cdot b \cdot \ldots \cdot b}_{n}} = \frac{a^n}{b^n}$;

5. $(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n} = \underbrace{\underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m}}_{n} =$

$= \underbrace{(a \cdot a \cdot \ldots \cdot a)}_{m \cdot n} = a^{m \cdot n}$. □

Przykłady:

1. $a^5 : \left(\left(a^6 : a^3\right) \cdot a\right) = a^5 : \left(a^3 \cdot a\right) = a^5 : a^4 = a$;

2. $\left(-a^2 b^2 c\right)^3 = -\left(a^2\right)^3 \left(b^2\right)^3 c^3 = -a^6 b^6 c^3$;

3. $\left(-\frac{2x^2 y}{3z}\right)^4 = \frac{\left(2x^2 y\right)^4}{(3z)^4} = \frac{2^4 \left(x^2\right)^4 y^4}{3^4 z^4} = \frac{16x^8 y^4}{81 z^4}$.

Zauważmy, że potęga liczby dodatniej jest liczbą dodatnią. Potęga liczby ujemnej jest:
- dodatnia, gdy wykładnik jest parzysty,
- ujemna, gdy wykładnik jest nieparzysty.

Zwróćmy też uwagę, że wzoru na dzielenie potęg nie mogliśmy stosować, gdy $m = n$ lub $m < n$, gdyż na przykład w dzieleniu $\frac{a^3}{b^3}$ otrzymalibyśmy z tego wzoru wynik $a^{3-3} = a^0$, a w dzieleniu $\frac{a^3}{a^4} = a^{3-4} = a^{-1}$, a te wyrażenia nie miały dotychczas sensu. Z drugiej jednak strony wiemy, że $\frac{a^4}{a^4} = 1$, zaś $\frac{a^3}{a^4} = \frac{1}{a}$. To skłania nas do przyjęcia umowy, że gdy $a \neq 0$, to $a^0 = 1$, zaś $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$.

!

Dla dowolnej, różnej od zera, liczby a i dowolnej liczby naturalnej n

$$a^0 = 1, \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}.$$

Definicja ta pozwala rozszerzyć pojęcie potęgi o wykładniki całkowite, przy tym nie tracimy żadnej z własności działań na potęgach o wykładnikach naturalnych. Na przykład

$$a^{-m} \cdot a^{-n} = \frac{1}{a^m} \cdot \frac{1}{a^n} = \frac{1}{a^m \cdot a^n} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)} = a^{-m-n}.$$

Przykłady:

1. $(-2)^0 = 1$, ale $-2^0 = -1$;

2. $\left(a^{-2}b^2c^{-3}\right)^{-2} = \left(a^{-2}\right)^{-2}\left(b^2\right)^{-2}\left(c^{-3}\right)^{-2} = a^4b^{-4}c^6$;

3. $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}} : \dfrac{4^{-2}}{9^{-1}} = \dfrac{2^{-3}}{3^{-2}} \cdot \dfrac{9^{-1}}{4^{-2}} = \dfrac{2^{-3}}{3^{-2}} \cdot \dfrac{3^{-2}}{2^{-4}} = \dfrac{2^{-3}}{2^{-4}} = \dfrac{1}{2^{-1}} = 2.$

Pytania i zadania

1. Oblicz:

   a) $\left(2^4\cdot 2^5\right):2^8$; b) $\left(7^2\cdot 7\right)\cdot 7$; c) $\left[\left(\frac{1}{3}\right)^5:\left(\frac{1}{3}\right)^2\right]:\left(\frac{1}{3}\right)^2$; d) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2$; e) $\left(2\frac{1}{2}\right)^3$.

2. Wykonaj działania:

   a) $(2x)^2$; b) $(-3pq)^3$; c) $\left(\frac{1}{2}x^2y\right)^4$; d) $\left(-\dfrac{2x^2y}{32}\right)^3$; e) $\left(-\dfrac{5a^2bc^2}{2d^2}\right)^2$.

3. Przedstaw w najprostszej postaci:

   a) $a^5:\left(\left(a^6:a^3\right)\cdot a\right)$; b) $\left\{\left[x^3\cdot\left(x^5:x^4\right)\right]\cdot\left[x^6:\left(x^2\cdot x\right)\right]\right\}:x^5$;

   c) $\left[x^2\cdot\left(x^2\right)^3\right]:\left[\left(x^3\right)^4:\left(x^2\right)^3\right]$; d) $\left[\left(x^2\cdot x^3\right)^2:\left(x^5:x^2\right)^3\right]\cdot\left[\left(x^4\cdot x^2\right)^2:\left(x^3\cdot x^2\right)^2\right]$;

   e) $\left[\left(a^2\cdot b^3\right)^4:\left(a\cdot b^2\right)^3\right]:\left[\left(a^3\cdot b^2\right)^3:\left(a^4\cdot b^2\right)^2\right]$.

4. Przedstaw w najprostszej postaci:

   a) $a^{-3}b^{-2}c^{-3}:a^{-4}b^{-3}c^{-4}$; b) $\left(a^{-2}b^2c^{-3}\right)^{-1}:\left(abc^{-1}\right)^{-2}$.

5. Przedstaw w postaci ułamków zwykłych:

   a) $\left(4^{-2}:5^{-1}\right)\cdot\left[2^{-3}:\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right]$; b) $\dfrac{2^{-3}}{3^{-2}}:\dfrac{4^{-2}}{9^{-1}}$;

   c) $1+\left(1+\left(1+1^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$; d) $2+\left(1+\left(2\left(1+2^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}\right)^{-1}$.

6. Oblicz:

   a) $\left(4^{14}\cdot 4^2\right):\left(4^8\cdot 4^5\right)$; b) $\left(-\frac{10}{17}\right)^5\cdot\left(-\frac{51}{2}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{15}\right)^5$; c) $5^3\cdot 15^3\cdot 25^3\cdot\left(\frac{1}{125}\right)^3$.

7*. Co jest większe:

   a) 2^{300} czy 3^{200}?; b) 4^{100} czy 32^{50}?; c) 9^{20} czy 27^{13}?;

   d) $45^{10}\cdot 5^{30}$ czy 75^{20}?; e) 18^{15} czy 63^{10}?; f) 22^{55} czy 55^{22}?

8*. Uporządkuj rosnąco liczby: $2^{45}; 3^{36}; 4^{27}; 5^{18}$.

9. Przedstaw w postaci potęgi:

   a) $2^3\cdot 4^7\cdot 8^2\cdot 16$; b) $3^2\cdot 9^3\cdot 27^4\cdot 81^5$; c) $5^6\cdot\left(\frac{1}{25}\right)^2\cdot 125^3\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{10}$.

Pierwiastkowanie

Niech n oznacza ustaloną liczbę naturalną.

Pierwiastkiem stopnia n-tego z liczby nieujemnej a nazywamy taką liczbę nieujemną b, której n-ta potęga równa jest a.

Pierwiastek stopnia n-tego z liczby a oznaczamy symbolem $\sqrt[n]{a}$ lub $a^{\frac{1}{n}}$. Na przykład $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{27} = 3$; $\sqrt[1]{5} = 5$; $\sqrt[4]{0{,}0016} = 0{,}2$.

Zatem

$$a \geqslant 0 \Rightarrow \left[\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow \left(b \geqslant 0 \wedge b^n = a\right)\right].$$

Pierwiastek stopnia drugiego nazywamy też pierwiastkiem **kwadratowym** i zamiast $\sqrt[2]{a}$ piszemy $\sqrt{a}$. Pierwiastek stopnia trzeciego nazywamy pierwiastkiem **sześciennym**.

Warunek $b \geqslant 0$ w podanej definicji zapewnia jednoznaczność pierwiastka, to znaczy jest $\sqrt{4} = 2$, nie zaś $\sqrt{4} = \pm 2$. Tak określony pierwiastek nazywa się pierwiastkiem **arytmetycznym**.

Zapamiętajmy, że:

1. Jeśli $a \geqslant 0$, to $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$;
2. $\sqrt[n]{a^n} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

Z definicji pierwiastka wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie (o działaniach na pierwiastkach)

1. $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$, gdy $a \geqslant 0$ i $b \geqslant 0$;
2. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$, gdy $a \geqslant 0$ i $b > 0$;
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$, gdy $a \geqslant 0$;
4. $\sqrt[m]{a^n} = \left(\sqrt[m]{a}\right)^n$, gdy $a \geqslant 0$.

□ Dowód. Wykażemy, że prawa strona równości 1. jest pierwiastkiem stopnia n-tego z iloczynu $a \cdot b$.

Mamy

$$\left(\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n \cdot \left(\sqrt[n]{b}\right)^n = a \cdot b,$$

ponadto $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$ i $\sqrt[n]{b} \geqslant 0$, więc $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \geqslant 0$.

Zatem rzeczywiście $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$. □

Podobnie dowodzimy pozostałych równości (spróbuj uczynić to samodzielnie!).

Uwaga. Równość 2. można otrzymać jako wniosek z równości 1., mianowicie

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}\cdot b}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\cdot\sqrt[n]{b},\ \text{skąd}\ \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Przykłady:

1. $\sqrt{324}=\sqrt{81\cdot 4}=\sqrt{81}\cdot\sqrt{4}=9\cdot 2=18;$

2. $\sqrt{\frac{361}{196}}=\frac{\sqrt{361}}{\sqrt{196}}=\frac{\sqrt{19^2}}{\sqrt{14^2}}=\frac{19}{14};$

3. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2.$

Pierwiastek nieparzystego stopnia z liczby ujemnej. Jeżeli n jest liczbą naturalną nieparzystą, zaś a jest liczbą ujemną, to przyjmujemy

$$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}.$$

Na przykład:

$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2;\quad \sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3.$$

Pierwiastka parzystego stopnia z liczby ujemnej nie określamy.

Pytania i zadania

1. Podaj definicję pierwiastka arytmetycznego.
2. Podaj twierdzenie o działaniach na pierwiastkach.
3. Oblicz pierwiastki:

$\sqrt{225};\quad \sqrt{1{,}69};\quad \sqrt[3]{125};\quad \sqrt[3]{0{,}001};\quad \sqrt{5\frac{4}{9}};\quad \sqrt{1\frac{11}{25}};\quad \sqrt[3]{1\frac{61}{64}};\quad \sqrt[3]{2\frac{10}{27}};\quad \sqrt[3]{4\frac{17}{27}}.$

4. Oblicz:

$\sqrt{64\cdot 100};\quad \sqrt[3]{8\cdot 125};\quad \sqrt{3\cdot 4\cdot 12};\quad \sqrt[3]{3\cdot 9\cdot 8};\quad \sqrt{\frac{25}{16}}:\sqrt{\frac{16}{9}};\quad \sqrt[3]{\frac{2}{9}}:\sqrt[3]{\frac{3}{4}}.$

5. Wyłącz czynnik przed znak pierwiastka:

$\sqrt{128};\quad \sqrt{175};\quad \sqrt{250};\quad \sqrt[3]{72};\quad \sqrt[3]{96};\quad \sqrt[3]{343}.$

6. Przedstaw w najprostszej postaci:

a) $3\sqrt{20}+5\sqrt{45}-2\sqrt{80};$

b) $\sqrt{a^3}+\frac{1}{2}\sqrt{36a^3}-\frac{2a}{3}\sqrt{9a},\ (a>0);$

c) $\left(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40}\right)-\left(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000}\right).$

7. Oblicz:

a) $\sqrt[3]{\frac{1\cdot 2\cdot 4+2\cdot 4\cdot 8+4\cdot 8\cdot 16}{1\cdot 3\cdot 9+2\cdot 6\cdot 18+3\cdot 9\cdot 27}};$ b) $\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}:\sqrt[4]{2^3\cdot\sqrt[3]{2}}.$

4. Wzory skróconego mnożenia

Przypomnijmy sobie wzory poznane w gimnazjum.

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

Aby otrzymać ten wzór, wystarczy wykonać mnożenie $(a+b)(a+b)$. Otrzymujemy:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = (a+b)a + (a+b)b = a^2 + ba + ab + b^2 =$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Kwadrat sumy dwóch wyrażeń równa się kwadratowi pierwszego wyrażenia plus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie, plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Można oczywiście napisać też, że $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.

Zobaczmy teraz, jak będzie wyglądał wzór na kwadrat sumy trzech wyrażeń. Korzystając ze wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń, otrzymamy:

$$(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2 = (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 =$$

$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc.$$

Mamy więc kolejny wzór:

$$\boxed{(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$$

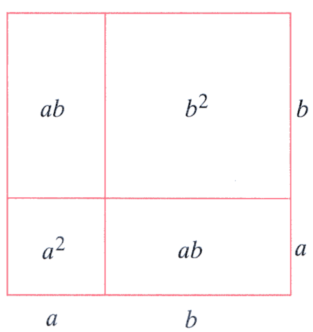
który czytamy: kwadrat sumy trzech wyrażeń równy jest sumie kwadratów tych wyrażeń i wszystkich podwojonych ich iloczynów.

Spróbuj podobnie otrzymać wzory na:

$$(a+b+c+d)^2,$$

$$(a+b+c+d+e)^2.$$

Wzór na kwadrat sumy dwóch wyrażeń ilustruje rycina 3.1:



$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + ab + ab =$$
$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Ryc. 3.1.

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń

$$\boxed{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$$

Wzór ten możemy wyprowadzić podobnie jak poprzedni, to znaczy wykonując mnożenie $(a-b)(a-b)$ (przekonaj się o tym samodzielnie!), albo otrzymać go jako wniosek z poprzedniego wzoru, bowiem

$$(a-b)^2 = (a+(-b))^2 = a^2 + 2a(-b) + (-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Zatem:

Kwadrat różnicy dwóch wyrażeń równa się kwadratowi pierwszego wyrażenia minus podwojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez drugie, plus kwadrat drugiego wyrażenia.

Różnica kwadratów

$$\boxed{a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)}$$

Rzeczywiście, $a^2 - b^2 = a^2 - ab + ab - b^2 = a(a-b) + b(a-b) = (a-b)(a+b)$.

Zatem:

Różnica kwadratów dwóch wyrażeń równa jest iloczynowi różnicy tych wyrażeń przez ich sumę.

Przykłady:

1. $(a+2b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot 2b + (2b)^2 = a^2 + 4ab + 4b^2$;

2. $\left(3x - \frac{1}{3}y\right)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot \frac{1}{3}y + \left(\frac{1}{3}y\right)^2 = 9x^2 - 2xy + \frac{1}{9}y^2$;

3. $4a^2 - 9b^2 = (2a)^2 - (3b)^2 = (2a-3b)(2a+3b)$.

Oto przykłady, w których poznane wzory upraszczają rachunki:

4. $98 \cdot 102 = (100-2)(100+2) = 100^2 - 2^2 = 10\,000 - 4 = 9996$;

5. $99{,}8^2 - 0{,}2^2 = (99{,}8 - 0{,}2)(99{,}8 + 0{,}2) = 99{,}6 \cdot 100 = 9960$;

6. $29^2 = (30-1)^2 = 30^2 - 2 \cdot 30 + 1 = 900 - 60 + 1 = 841$;

7. $103^2 = (100+3)^2 = 100^2 + 2 \cdot 100 \cdot 3 + 3^2 = 10\,000 + 600 + 9 = 10\,609$;

8. $73^2 + 2 \cdot 73 \cdot 17 + 17^2 = (73+17)^2 = 90^2 = 8100$.

Przejdźmy teraz do kolejnych wzorów uproszczonego mnożenia, które warto znać.

Sześcian sumy dwóch wyrażeń

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Aby wyprowadzić ten wzór, wystarczy wykonać mnożenie $(a+b)\cdot(a+b)^2$. Otrzymujemy:

$$(a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)\left(a^2+2ab+b^2\right) = a\left(a^2+2ab+b^2\right) + b\left(a^2+2ab+b^2\right) =$$
$$= a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

i czytamy:

Sześcian sumy dwóch wyrażeń równy jest sześcianowi pierwszego wyrażenia plus potrojony iloczyn kwadratu pierwszego wyrażenia przez drugie, plus potrojony iloczyn pierwszego wyrażenia przez kwadrat drugiego, plus sześcian drugiego wyrażenia.

Przykład

$$(2x+3y)^3 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot(3y) + 3\cdot(2x)\cdot(3y)^2 + (3y)^3 = 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3.$$

Sześcian różnicy dwóch wyrażeń

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

Istotnie, na mocy poprzedniego wzoru

$$(a-b)^3 = \left(a+(-b)\right)^3 = a^3 + 3a^2\cdot(-b) + 3a\cdot(-b)^2 + (-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

(Przeczytaj wyrażenie występujące we wzorze na sześcian różnicy $a-b$).

Przykład

$$(x-2y)^3 = x^3 - 3\cdot x^2\cdot 2y + 3\cdot x\cdot(2y)^2 - (2y)^3 = x^3 - 6x^2y + 12xy^2 - 8y^3.$$

Różnica sześcianów, czwartych potęg, piątych potęg, ..., *n*-tych potęg dwóch wyrażeń (*n* jest dowolną liczbą naturalną $\geqslant 1$)

Teraz wykażemy następujące tożsamości:

$$\boxed{a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)}$$

$$\boxed{a^4 - b^4 = (a-b)\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)}$$

$$\boxed{a^5 - b^5 = (a-b)\left(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4\right)}$$

i ogólnie, dla dowolnej liczby naturalnej n

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)}$$

Mamy bowiem:

$$a^3 - b^3 = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^2(a-b) + ab(a-b) + b^2(a-b) =$$

$$=(a-b)(a^2+ab+b^2),$$

$$a^4-b^4=a^4-a^3b+a^3b-a^2b^2+a^2b^2-ab^3+ab^3-b^4=$$

$$=a^3(a-b)+a^2b(a-b)+ab^2(a-b)+b^3(a-b)=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3),$$

$$a^5-b^5=a^5-a^4b+a^4b-a^3b^2+a^3b^2-a^2b^3+a^2b^3-ab^4+ab^4-b^5=$$

$$=a^4(a-b)+a^3b(a-b)+a^2b^2(a-b)+ab^3(a-b)+b^4(a-b)=$$

$$=(a-b)(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)$$

i ogólnie

$$a^n-b^n=a^n-a^{n-1}b+a^{n-1}b-a^{n-2}b^2+a^{n-2}b^2-\ldots+a^2b^{n-2}-ab^{n-1}+ab^{n-1}-b^n=$$

$$=a^{n-1}(a-b)+a^{n-2}b(a-b)+a^{n-3}b^2(a-b)+\ldots+ab^{n-2}(a-b)+b^{n-1}(a-b)=$$

$$=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Suma sześcianów, piątych potęg, ..., *n*-tych potęg dwóch wyrażeń (*n* jest liczbą nieparzystą)

Wzory te otrzymujemy podobnie jak wzór na różnicę kwadratów. Spójrz:

$$a^3+b^3=a^3+a^2b-a^2b-ab^2+ab^2+b^3=a^2(a+b)-ab(a+b)+b^2(a+b)=$$

$$=(a+b)(a^2-ab+b^2),$$

$$a^5+b^5=a^5+a^4b-a^4b-a^3b^2+a^3b^2+a^2b^3-a^2b^3-ab^4+ab^4+b^5=$$

$$=a^4(a+b)-a^3b(a+b)+a^2b^2(a+b)-ab^3(a+b)+b^4(a+b)=$$

$$=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4).$$

Mamy więc wzory:

$$\boxed{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)}$$

$$\boxed{a^5+b^5=(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4)}$$

$$\boxed{a^7+b^7=(a+b)(a^6-a^5b+a^4b^2-a^3b^3+a^2b^4-ab^5+b^6)}$$

i ogólnie dla dowolnej liczby nieparzystej n

$$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+a^{n-3}b^2-\ldots+a^2b^{n-3}-ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

Przykłady:

1. $x^3+8=x^3+2^3=(x+2)(x^2-2x+4)$;

2. $27a^3-1=(3a)^3-1^3=(3a-1)(9a^2+3a+1)$;

3. $2^5+1=(2+1)(2^4-2^3+2^2-2+1)$;

4. $3^7-2^7=(3-2)(3^6+3^5\cdot 2+3^4\cdot 2^2+3^3\cdot 2^3+3^2\cdot 2^4+3\cdot 2^5+2^6)$.

Pytania i zadania

1. Oblicz w pamięci:

   a) 13^2; b) 21^2; c) 41^2; d) 52^2; e) 103^2.

2. Oblicz w pamięci:

   a) 17^2; b) 27^2; c) 89^2; d) 97^2; e) 999^2.

3. Oblicz w pamięci:

   a) $17\cdot 23$; b) $28\cdot 32$; c) $53\cdot 47$; d) $62\cdot 58$; e) $78\cdot 82$.

4. Oblicz, nie podnosząc do kwadratu:

   a) 25^2-24^2; b) $10,5^2-0,5^2$; c) 327^2-322^2; d) 998^2-2^2.

5. Oblicz:

   a) $\dfrac{40^2-17^2}{44^2-25^2}$; b) $\dfrac{2^2-1}{2^2}\cdot\dfrac{3^2-1}{3^2}\cdot\dfrac{4^2-1}{4^2}\cdot\dfrac{5^2-1}{5^2}\cdot\dfrac{6^2-1}{6^2}$.

6. Sprawdź, że $7778^2-2223^2=55\,555\,555$.

7*. Wyznacz wartość sumy:

   a) $\dfrac{2^2-1}{2+1}+\dfrac{3^2-2^2}{3+2}+\dfrac{4^2-3^2}{4+3}+\ldots+\dfrac{2003^2-2002^2}{2003+2002}$;

   b) $\dfrac{2^3-1}{2^2+2+1}+\dfrac{3^3-2^3}{3^2+6+2^2}+\dfrac{4^3-3^3}{4^2+12+3^2}+\ldots+\dfrac{2003^3-2002^3}{2003^2+2003\cdot 2002+2002^2}$.

8. Oblicz:

   a) $(2x+3y)^2$; b) $(x-2y)^2$; c) $(-3a-2b)^2$; d) $(-2a+3b)^2$; e) $(2a+b)^3$;

   f) $\left(3x-\frac{1}{3}y\right)^3$; g) $(x+3y)(x^2-3xy+9y^2)$; h) $(2x-y)(4x^2+2xy+y^2)$.

9. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

   a) $(x+3y)(x-2y)+(x+y)^2$; b) $(x-4y)(x+3y)-(x-3y)^2$;

   c) $(5a-1)(5a+1)-(5a+1)^2-(5a-1)^2+25a^2$.

5. Ćwiczenia w działaniach na potęgach i pierwiastkach

Podrozdział ten poświęcimy bardziej złożonym przykładom działań na potęgach i pierwiastkach.

Przykład 1. Oblicz $\dfrac{9^6+81^2\cdot 9^3}{3^{10}-9^9+27^6}$.

Rozwiązanie:

Potęgi występujące w tym wyrażeniu zamieniamy na potęgi o wspólnej podstawie (którą tutaj jest 3). Otrzymujemy

$$\frac{9^6+81^2\cdot 9^3}{3^{10}-9^9+27^6}=\frac{\left(3^2\right)^6+\left(3^4\right)^2\cdot\left(3^2\right)^3}{3^{10}-\left(3^2\right)^9+\left(3^3\right)^6}=\frac{3^{12}+3^8\cdot 3^6}{3^{10}-3^{18}+3^{18}}=$$

$$=\frac{3^{12}+3^{14}}{3^{10}}=\frac{3^{12}\left(1+3^2\right)}{3^{10}}=\frac{3^{10}\cdot 3^2\cdot 10}{3^{10}}=3^2\cdot 10=9\cdot 10=90.$$

Przykład 2. Oblicz $\dfrac{27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8}{41\cdot 3^{24}}$.

Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim przykładzie sprowadzamy występujące tutaj potęgi do potęg o jednej podstawie i otrzymujemy:

$$\frac{27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8}{41\cdot 3^{24}}=\frac{\left(3^3\right)^{10}-5\cdot\left(3^4\right)^4\cdot 3^{12}+4\cdot\left(3^2\right)^8\cdot 3^8}{41\cdot 3^{24}}=$$

$$=\frac{3^{30}-5\cdot 3^{16}\cdot 3^{12}+4\cdot 3^{16}\cdot 3^8}{41\cdot 3^{24}}=\frac{3^{30}-5\cdot 3^{28}+4\cdot 3^{24}}{41\cdot 3^{24}}=\frac{3^{24}\left(3^6-5\cdot 3^4+4\right)}{41\cdot 3^{24}}=$$

$$=\frac{3^2\cdot 3^4-5\cdot 3^4+4}{41}=\frac{\left(3^2-5\right)\cdot 3^4+4}{41}=\frac{4\cdot 3^4+4}{41}=\frac{4\left(3^4+1\right)}{41}=\frac{4\cdot 82}{41}=4\cdot 2=8.$$

Przykład 3. Co jest większe $3^{100}-2^{150}$ czy $3^{50}+2^{75}$?

Rozwiązanie:

Mamy

$$3^{100}-2^{150}=\left(3^{50}\right)^2-\left(2^{75}\right)^2=\left(3^{50}-2^{75}\right)\left(3^{50}+2^{75}\right)=\left(\left(3^2\right)^{25}-\left(2^3\right)^{25}\right)\cdot\left(3^{50}+2^{75}\right)=$$

$$=\left(9^{25}-8^{25}\right)\left(3^{50}+2^{75}\right)>3^{50}+2^{75},$$

gdyż $9^{25}-8^{25}>1$, bowiem $9^{25}-8^{25}=(9-8)\left(9^{24}+9^{23}\cdot 8+\ldots+9\cdot 8^{23}+8^{24}\right)>1$.

Przykład 4*. Wykaż, że liczba $\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}$ jest całkowita.

Rozwiązanie:
I sposób:

Przyjmijmy oznaczenie $x = \sqrt{29+12\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}}$ i obliczmy x^2. Otrzymujemy

$$x^2 = 29+12\sqrt{5} - 2\sqrt{29+12\sqrt{5}}\cdot\sqrt{29-12\sqrt{5}} + 29 - 12\sqrt{5} =$$

$$= 58 - 2\sqrt{\left(29+12\sqrt{5}\right)\left(29-12\sqrt{5}\right)} = 58 - 2\sqrt{29^2 - \left(12\sqrt{5}\right)^2} =$$

$$= 58 - 2\sqrt{(30-1)^2 - 144\cdot 5} = 58 - 2\sqrt{900-60+1-720} = 58 - 2\sqrt{901-780} =$$

$$= 58 - 2\sqrt{121} = 58 - 2\cdot 11 = 58 - 22 = 36.$$

Stąd $x^2 = 36$, więc $x = 6$ (bo $x > 0$).

II sposób:

Zauważmy, że

$$29+12\sqrt{5} = \left(2\sqrt{5}+3\right)^2 \text{ oraz } 29-12\sqrt{5} = \left(2\sqrt{5}-3\right)^2.$$

I wobec tego

$$\sqrt{25+12\sqrt{5}} - \sqrt{29-12\sqrt{5}} = \sqrt{\left(2\sqrt{5}+3\right)^2} - \sqrt{\left(2\sqrt{5}-3\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{5}+3 - \left(2\sqrt{5}-3\right) = 3+3 = 6.$$

Przykład 5*. Oblicz $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$.

Rozwiązanie:

Mamy

$$\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}} = \left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\cdot\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)^2}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} =$$

$$= \sqrt{\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)^2}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4-\sqrt{15}} =$$

$$= \sqrt{10-2\sqrt{10}\sqrt{6}+6}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{\left(4+\sqrt{15}\right)\left(4-\sqrt{15}\right)} =$$

$$= \sqrt{16-2\sqrt{60}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4^2-15} = \sqrt{4\left(4-\sqrt{15}\right)}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}} =$$

$$= 2\sqrt{4-\sqrt{15}}\cdot\sqrt{4+\sqrt{15}} = 2\sqrt{\left(4-\sqrt{15}\right)\left(4+\sqrt{15}\right)} = 2\cdot 1 = 2.$$

Przykład 6*. Oblicz $\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}$.

Rozwiązanie:

Mamy

$$\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\sqrt[3]{\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)^3\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}=\sqrt[3]{\left[\left(\sqrt[3]{2}\right)^3+3\cdot\left(\sqrt[3]{2}\right)^2+3\sqrt[3]{2}+1\right]\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(2+3\sqrt[3]{4}+3\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}=\sqrt[3]{3\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\cdot\frac{\sqrt[3]{2}-1}{3}}=$$

$$=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2}-1\right)}=\sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{2}\right)^3-1^3}=\sqrt[3]{2-1}=\sqrt[3]{1}=1.$$

Przykład 7*. Przedstaw w najprostszej postaci liczby:

a) $\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{49}-1\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)$; b) $\sqrt[3]{1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\left(\sqrt[3]{26}\right)^2}+\sqrt[3]{26}.$

Rozwiązanie:

a) $\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{49}-1\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)=$

$$=\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^2-1^2\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{7}-1\right)\left(\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)=$$

$$=\left(\sqrt[3]{7}-1\right)\left(\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{7}+1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{7}+1\right)\left(\sqrt[3]{49}-\sqrt[3]{7}+1\right)=$$

$$=\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^3-1^3\right)\cdot\left(\left(\sqrt[3]{7}\right)^3+1^3\right)=(7-1)(7+1)=6\cdot 8=48.$$

b) Ponieważ

$$1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\left(\sqrt[3]{26}\right)^2=27-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\left(\sqrt[3]{26}\right)^2-26=$$

$$=3^3-3\cdot 3^2\cdot\sqrt[3]{26}+3\cdot 3\cdot\left(\sqrt[3]{26}\right)^2-\left(\sqrt[3]{26}\right)^3=\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3,$$

więc

$$\sqrt[3]{1-27\cdot\sqrt[3]{26}+9\cdot\left(\sqrt[3]{26}\right)^2}+\sqrt[3]{26}=\sqrt[3]{\left(3-\sqrt[3]{26}\right)^3}+\sqrt[3]{26}=3-\sqrt[3]{26}+\sqrt[3]{26}=3.$$

Przykład 8*. Oblicz:

a) $\sqrt{2001^2+2001^2\cdot 2002^2+2002^2}$;

b) $\sqrt{1997\cdot 1999\cdot 2001\cdot 2003+16}$;

c) $\sqrt[3]{2002+2001\cdot 2002\cdot 2003}.$

Rozwiązanie:

a) Wyrażenie pod pierwiastkiem ma postać

$$(n-1)^2+(n-1)^2\cdot n^2+n^2,\ \text{gdzie } n=2002.$$

Zauważmy, że

$$(n-1)^2+(n-1)^2\cdot n^2+n^2=(n-1)^2\cdot n^2+(n-1)^2+n^2=\left((n-1)n\right)^2+n^2-2n+1+n^2=$$

$$=\left((n-1)n\right)^2+2n^2-2n+1=\left((n-1)n\right)^2+2(n-1)n+1=\left((n-1)n+1\right)^2.$$

Wobec tego

$$\sqrt{(n-1)^2+(n-1)^2n^2+n^2}=\sqrt{\left((n-1)n+1\right)^2}=(n-1)n+1.$$

Podstawiając tutaj $n=2002$, otrzymujemy ostateczny wynik:

$$2001\cdot 2002+1=2002\cdot(2000+1)+1=2002\cdot 2000+2002+1=$$

$$=4\,004\,000+2003=4\,006\,003.$$

b) Podobnie jak w poprzednim przykładzie przyjmijmy, że $n=1997$. Wówczas

$$1997\cdot 1999\cdot 2001\cdot 2003+16=n(n+2)(n+4)(n+6)+16=$$

$$=n(n+6)\left((n+2)(n+4)\right)+16=n(n+6)\left(n^2+6n+8\right)+16=$$

$$=n(n+6)\left(n(n+6)+8\right)+16=\left(n(n+6)\right)^2+8n(n+6)+16=$$

$$=\left(n(n+6)+4\right)^2=(1997\cdot 2003+4)^2.$$

Stąd

$$\sqrt{1997\cdot 1999\cdot 2001\cdot 2003+16}=1997\cdot 2003+4=(2000-3)(2000+3)+4=$$

$$=2\,000^2-9+4=4\,000\,000-5=3\,999\,995.$$

c) Podstawmy $2002=a$. Wówczas

$$2002+2001\cdot 2002\cdot 2003=a+(a-1)\cdot a\cdot(a+1)=a+a(a-1)(a+1)=$$

$$=a+a\left(a^2-1\right)=a+a^3-a=a^3=2002^3,\ \text{skąd}\ \sqrt[3]{2002+2001\cdot 2002\cdot 2003}=2002.$$

Pytania i zadania

1. Oblicz:

a) $\dfrac{5\cdot 4^{15}\cdot 9^9-4\cdot 3^{20}\cdot 8^9}{5\cdot 2^9\cdot 6^{19}-7\cdot 2^{29}\cdot 27^6}$;

b) $\dfrac{10^{12}+5^{11}\cdot 2^9-5^{13}\cdot 2^8}{4\cdot 5^5\cdot 10^6}$;

c) $\dfrac{12\cdot 5^{2n+1}-8\cdot 5^{2n}+4\cdot 5^{2n-1}}{4\cdot 5^{2n-2}}$;

d) $\dfrac{36\cdot 18^n-8\cdot 2^{n-4}\cdot 9^n-3^{n+1}\cdot 6^{n+1}}{18^{n-1}}$.

2. Oblicz:

a) $\sqrt{24-2\sqrt{80}}-\sqrt{2\sqrt{20}+21}$; b) $\sqrt{6+4\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

3*. Wykaż, że

$$\sqrt{8-2\sqrt{15}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{8+2\sqrt{2}-2\sqrt{5}-2\sqrt{10}}=1.$$

4*. Oblicz

$$\sqrt{2}\cdot\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}\right).$$

6. Przekształcanie wyrażeń algebraicznych

Umiemy działać na potęgach i pierwiastkach, poznaliśmy wiele wzorów skróconego mnożenia. Wykorzystajmy więc zdobytą wiedzę do przekształcania wyrażeń algebraicznych.

Przykład 1. Wykonaj działania

$$\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right).$$

Rozwiązanie:

$$\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a^2+b^2-ab}{b}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}:\frac{a-b}{ab}=$$

$$=\frac{a^2-ab+b^2}{b}\cdot\frac{(a-b)(a+b)}{(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)}\cdot\frac{ab}{a-b}=a,$$

przy założeniu, że $a\neq b$, $a\neq -b$, $a\neq 0$ i $b\neq 0$. (Wykonywaliśmy tutaj dzielenie przez a, $b, a-b$ i $a+b$).

Przykład 2. Oblicz wartość wyrażenia

$$w=\frac{n+2+\sqrt{n^2-4}}{n+2-\sqrt{n^2-4}}+\frac{n+2-\sqrt{n^2-4}}{n+2+\sqrt{n^2-4}},\ \text{gdy } n=2002.$$

Rozwiązanie:

Oznaczając $a=n+2$, $b=\sqrt{n^2-4}$, mamy

$$w=\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}=\frac{(a+b)^2+(a-b)^2}{(a-b)(a+b)}=\frac{\left(a^2+2ab+b^2\right)+\left(a^2-2ab+b^2\right)}{a^2-b^2}=\frac{2\left(a^2+b^2\right)}{a^2-b^2}=$$

$$=\frac{2\left((n+2)^2+\left(\sqrt{n^2-4}\right)^2\right)}{(n+2)^2-\left(\sqrt{n^2-4}\right)^2}=\frac{2\left(n^2+4n+4+n^2-4\right)}{n^2+4n+4-\left(n^2-4\right)}=\frac{4n(n+2)}{4(n+2)}=n.$$

Zatem, gdy $n=2002$, dane wyrażenie $w=2002$.

Przykład 3*. Wiadomo, że $x^2+xy+y^2=4$, $x^4+x^2y^2+y^4=8$. Wyznacz $x^6+x^3y^3+y^6$.
Rozwiązanie:

Ponieważ

$$8=x^4+x^2y^2+y^4=\left(x^4+2x^2y^2+y^4\right)-x^2y^2=\left(x^2+y^2\right)^2-(xy)^2=$$

$$=\left(x^2+y^2-xy\right)\left(x^2+y^2+xy\right)=4\left(x^2-xy+y^2\right),$$

więc $4\left(x^2-xy+y^2\right)=8$, czyli $x^2-xy+y^2=2$.

Z równości $x^2-xy+y^2=2$ i $x^2+xy+y^2=4$ po odjęciu ich stronami otrzymujemy $xy=1$, a po dodaniu ich stronami otrzymujemy równość $2\left(x^2+y^2\right)=6$, czyli równość $x^2+y^2=3$.

Stąd $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy=3+2\cdot 1=5$.

I wobec tego $x^6+x^3y^3+y^6=\left(x^3+y^3\right)^2-(xy)^3=\left((x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)\right)^2-(xy)^3=$

$$=(x+y)^2\left(x^2-xy+y^2\right)^2-(xy)^3=5\cdot 2^2-1^3=5\cdot 4-1=19.$$

Przykład 4*. Uprość wyrażenie

$$w=\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-\sqrt[4]{b^3}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{a}{b}}+1\right),\ \text{jeśli}\ a\geqslant 0,\ b>0,\ a\neq b.$$

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że $x=\sqrt[4]{a}$, $y=\sqrt[4]{b}$.

Wówczas $w=\left(\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}-x-y\right)\left(\dfrac{x}{y}+1\right)=\left(\dfrac{(x-y)\left(x^2+xy+y^2\right)}{(x-y)(x+y)}-(x+y)\right)\cdot\dfrac{x+y}{y}=$

$$=\frac{x^2+xy+y^2-(x+y)^2}{x+y}\cdot\frac{x+y}{y}=\frac{-xy}{y}=-x.$$

Zatem $w=-\sqrt[4]{a}$.

Przykład 5*. Uprość wyrażenie

$$w=\frac{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}\right)^{-1}+\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}\right)^{-1}}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}\right)^{-1}-\left(\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}\right)^{-1}}.$$

Rozwiązanie:

Podstawmy tutaj $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}+\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}=x$, $\dfrac{1}{\sqrt{a+b}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-b}}=y$, gdy $a>b$, $a>-b$ i $b\neq 0$.

Wówczas $x+y=\frac{2}{\sqrt{a+b}}$, $x-y=\frac{2}{\sqrt{a-b}}$

i oczywiście $w=\frac{x^{-1}+y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}=\frac{x^{-1}y^{-1}(x+y)}{-x^{-1}y^{-1}(x-y)}=-\frac{x+y}{x-y}=-\frac{\frac{2}{\sqrt{a+b}}}{\frac{2}{\sqrt{a-b}}}=-\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}$.

Przykład 6*. Udowodnij, że jeżeli $a+b+c=0$, to $a^3+b^3+c^3=3abc$.

Rozwiązanie:

I sposób:

Skoro $a+b+c=0$, to $c=-(a+b)$ oraz $a+b=-c$.

Wówczas

$$a^3+b^3+c^3=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^2)=$$

$$=-3a^2b-3ab^2=-3ab(a+b)=-3ab(-c)=3abc.$$

II sposób:

$$a^3+b^3+c^3=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)-3a^2b-3ab^2+c^3=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b)=$$

$$=(a+b+c)\left((a+b)^2-(a+b)c+c^2\right)-3ab(-c)=$$

$$=0\cdot\left((a+b)^2-(a+b)c+c^2\right)+3abc=3abc.$$

Przykład 7*. Oblicz wartość wyrażenia $x^2+y^2+z^2-xyz$

dla $x=999\frac{1}{999}$; $y=1000\frac{1}{1000}$; $z=999\,000\frac{1}{999\,000}$.

Rozwiązanie:

Przyjmując, że $a=999, b=1000$, otrzymamy: $x=a+\frac{1}{a}$; $y=b+\frac{1}{b}$; $z=ab+\frac{1}{ab}$.

I wówczas

$$x^2+y^2+z^2-xyz=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2+\left(ab+\frac{1}{ab}\right)^2-\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\left(ab+\frac{1}{ab}\right)=$$

$$=a^2+2+\frac{1}{a^2}+b^2+2+\frac{1}{b^2}+a^2b^2+2+\frac{1}{a^2b^2}-a^2b^2-1-1-a^2-b^2-\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2b^2}=4.$$

Przykład 8*. Udowodnij, że jeżeli

$$b\neq c \text{ i } a^2+b^2=(a+b-c)^2, \text{ to } \frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{a-c}{b-c}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ $a^2+b^2=(a+b-c)^2$, więc

$$a^2=(a+b-c)^2-b^2=(a+b-c-b)(a+b-c+b)=(a-c)(a+2b-c) \text{ oraz}$$

$$b^2=(a+b-c)^2-a^2=(a+b-c-a)(a+b-c+a)=(b-c)(2a+b-c).$$

I wówczas

$$\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c+a-c)}{(b-c)(2a+b-c+b-c)}=$$

$$=\frac{(a-c)(2a+2b-2c)}{(b-c)(2a+2b-2c)}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c},$$

gdyż $a+b-c\neq 0$ (na mocy podanych w zadaniu założeń).

Pytania i zadania

1. Uprość wyrażenia:

a) $\frac{1}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)+\frac{2}{(x+y)^3}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right);$

b) $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\cdot\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1+c)-a}{bc}.$

2. Uprość wyrażenie

$$\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^{-2}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}-\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^{-2}.$$

3. Wykaż, że

$$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a).$$

4. Wykaż, że jeżeli $b=a-1$, to

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)(a^8+b^8)(a^{16}+b^{16})(a^{32}+b^{32})=a^{64}-b^{64}.$$

5*. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:

a) $\left(\frac{1-2x^3}{1+x^3}\right)^3+\left(\frac{x(2-x^3)}{1+x^3}\right)^3+x^3;$

b) $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}.$

6*. Zapisz najprostszą postać sumy

$$\sqrt{3-\sqrt{2}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{7-2\sqrt{12}}+\sqrt{9-2\sqrt{20}}+\ldots+\sqrt{21-2\sqrt{110}}.$$

7. Zasada indukcji matematycznej

Bardzo wiele twierdzeń w matematyce orzeka coś o liczbach naturalnych. Najczęściej jest to jakaś równość, nierówność, podzielność bądź też pewien wzór. Oto przykłady takich twierdzeń:

1. Dla każdej liczby naturalnej n

   $$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Dla każdej liczby naturalnej n

   $$2^n>n.$$

3. Dla każdej liczby naturalnej n

   $$6 \mid 10^n-4.$$

4. Dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 3 suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wypukłego wynosi $(n-2)\cdot 180°$.

Jak dowodzić takich twierdzeń? Zanim o tym opowiemy – krótka anegdota.

Student na egzaminie z analizy matematycznej miał udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej zachodzi równość – i tu pan profesor napisał na tablicy pewną równość. Chwila ciszy, po której profesor zapytał studenta: „Jak pan będzie postępował?".

Student: *Sprawdzę prawdziwość równości dla* 1.
Profesor: *Dobrze, i co dalej?*
Student: *Sprawdzę słuszność dla* 2.
Profesor: *No dobrze ...*
Student: *Sprawdzę prawdziwość dla* 3.
Profesor: ...
Student: *Sprawdzę prawdziwość równości dla* 4, *dla* 5, *dla* 6, ...
Profesor: *Jak długo zamierza pan to jeszcze sprawdzać? – zapytał studenta zirytowany profesor.*
Student: *No..., aż do ... n – odparł niefrasobliwy student.*

Metodą dowodzenia twierdzeń o liczbach naturalnych jest indukcja matematyczna, zwana też indukcją zupełną. Opiera się ona na następującej zasadzie:

Zasada indukcji matematycznej. Jeśli $T(n)$ oznacza pewne twierdzenie mówiące o liczbie naturalnej n, to aby udowodnić, że twierdzenie to jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 (n_0 może być 1 albo inną ustaloną liczbą naturalną), wystarczy:

1. Dowieść, że jest ono prawdziwe dla liczby n_0, to znaczy sprawdzić, że zachodzi $T(n_0)$.
2. Dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0, wychodząc z założenia, że twierdzenie to jest prawdziwe dla liczby n, wyprowadzić, że jest ono prawdziwe dla $n+1$, chodzi bowiem o to, aby wykazać, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 prawdziwa jest implikacja

   $$T(n)\Rightarrow T(n+1).$$

Przykład. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 zachodzi równość:

$$T(n):\ 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Mamy wykazać, że suma n początkowych liczb naturalnych równa jest $\frac{n(n+1)}{2}$.

Sprawdzamy najpierw prawdziwość zdania $T(1)$, czyli zdania: $1=\frac{1\cdot(1+1)}{2}$. Równość ta oczywiście zachodzi.

Wykażemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1, jeśli

$$(*)\,T(n):\ 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}, \text{ to}$$

$$T(n+1):\ 1+2+3+\ldots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Istotnie,

$$\underbrace{\underbrace{1+2+3+\ldots+n}+(n+1)=\underbrace{\frac{n(n+1)}{2}}}_{\text{na mocy }(*)}+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{2(n+1)}{2}=$$

$$=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

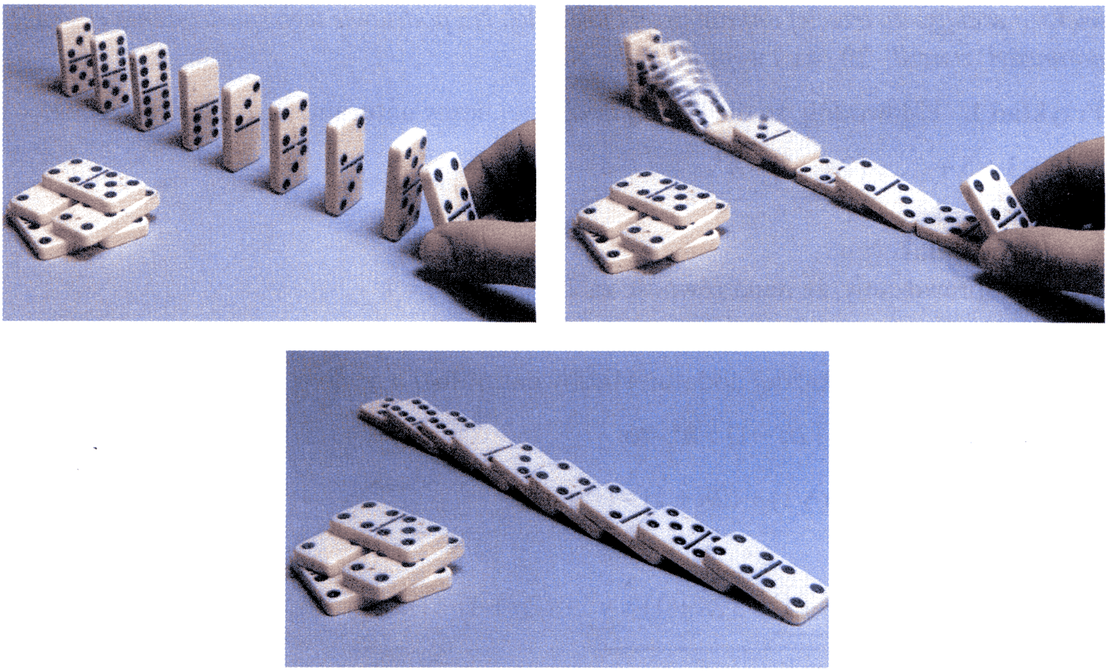
Zatem:
- sprawdziliśmy prawdziwość zdania $T(1)$,
- dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1 wykazaliśmy implikację $T(n)\Rightarrow T(n+1)$.

Na mocy zasady indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość zdania $T(n)$ dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od 1.

Dowód przeprowadzony metodą indukcji matematycznej nazywamy **dowodem indukcyjnym**. Składa się on z dwóch etapów:
- sprawdzenia, że $T(n_0)$ jest prawdziwe (w naszym przykładzie $n_0=1$);
- dowodu, że dla każdej liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0, jeśli $T(n)$ jest prawdziwe, to $T(n+1)$ jest prawdziwe.

Pierwszy etap to **sprawdzenie**, drugi etap to tak zwany **krok indukcyjny**; zakładamy w nim, że dla liczby naturalnej n nie mniejszej od n_0 zdanie $T(n)$ jest prawdziwe – **założenie indukcyjne** i na tej podstawie wyprowadzamy prawdziwość zdania $T(n+1)$ – **teza indukcyjna**.

Zasadę indukcji matematycznej można zilustrować na kostkach domina. Wyobraźmy sobie bowiem kostki domina ustawione jedna za drugą w odległości mniejszej niż wysokość kostki (ryc. 3.2).



Ryc. 3.2. Zasada indukcji matematycznej

Co trzeba wiedzieć, by przewidzieć, że wszystkie kostki się przewrócą? Oczywiście, że:
- przewrócono pierwszą kostkę;
- upadek którejkolwiek kostki obala następne.

Zasada, która mówi, że sztuka z kostkami domina musi się wtedy udać, to właśnie zasada indukcji matematycznej.

8. Dowodzenie przez indukcję matematyczną

Rozdział ten poświęcimy licznym przykładom dowodów indukcyjnych, ale najpierw – krótka anegdota, która wiąże się ze wzorem na sumę kolejnych liczb naturalnych od jeden do n. Historia ta dotyczy sławnego matematyka niemieckiego Carla Friedericha Gaussa zwanego księciem matematyków.

Siedmioletniego Gaussa uczył matematyki surowy, starszy wiekiem nauczyciel. Chcąc w spokoju poprawiać podczas lekcji uczniowskie zeszyty, zadał swym wychowankom następujące zadanie do samodzielnego rozwiązania: „Znaleźć sumę wszystkich liczb od 1 *do* 40*". Nauczyciel liczył na dłuższą chwilę spokoju, a tymczasem mały Gauss błyskawicznie zorientował się w rozwiązaniu tego zadania. Oto schemat rozumowania genialnego chłopca:*

$$\begin{array}{c} 1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ldots, 20 \\ 40, 39, 38, \ldots, 21 \\ \hline 41, 41, 41, \ldots, 41 \end{array}$$

Największa i najmniejsza liczba ciągu dają w sumie 41*. To samo otrzymamy, dodając drugą z kolei liczbę ciągu do drugiej od dołu; ten sam też wynik uzyskamy, dodając trzecią naj-*

większą w ciągu do trzeciej najmniejszej i tak dalej. Na podstawie tego spostrzeżenia chłopiec pomnożył w myśli $20 \cdot 41$ *i wypisał liczbę:* 820.

Przykład 1. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi równość

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzamy, że dana równość zachodzi, gdy $n = 1$:

$$1 = 1^2 = 1.$$

2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli

$$(*)\ 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, \text{ to}$$

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Rzeczywiście,

$$\underbrace{\underbrace{1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)} + (2n + 1) = \underbrace{n^2}}_{\text{na mocy } (*)} + (2n + 1) = (n + 1)^2.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość dowodzonej równości dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Przykład 2. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie równości, gdy $n = 1$.

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1 + 1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = 1.$$

2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli

$$(*)\ 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}, \text{ to}$$

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 + (n + 1)^2 = \frac{(n + 1)(n + 2)(2n + 3)}{6}.$$

Istotnie,

$$\underbrace{\underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2} + (n + 1)^2 = \underbrace{\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}}}_{\text{na mocy } (*)} + (n + 1)^2 =$$

$$= \frac{n(n + 1)(2n + 1) + 6(n + 1)^2}{6} = \frac{(n + 1)(n(2n + 1) + 6(n + 1))}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)\left((2n^2+4n)+(3n+6)\right)}{6} =$$

$$= \frac{(n+1)\left(2n(n+2)+3(n+2)\right)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Stwierdziliśmy, że równość ta zachodzi gdy $n = 1$ i dla każdej dodatniej liczby naturalnej z prawdziwości jej dla n wynika jej prawdziwość dla $n + 1$. Zatem na podstawie zasady indukcji matematycznej równość ta jest prawdziwa dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Przykład 3. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n

$6 \mid 10^n - 4.$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie dla $n = 1$.
   Liczba $10^1 - 4 = 6$ jest oczywiście podzielna przez 6, czyli $6 \mid 10^1 - 4$.
2. Udowodnimy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli

   $(*)$ $6 \mid 10^n - 4$, to $6 \mid 10^{n+1} - 4$.

   Faktycznie, $10^{n+1} - 4 = 10^n \cdot 10 - 4 = \underbrace{(10^n - 4)}_{(*)} \cdot 10 + 36$, więc liczba $10^{n+1} - 4$, jako suma dwóch składników podzielnych przez 6, jest podzielna przez 6.

Zatem na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $6 \mid 10^n - 4$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Przykład 4. Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej n

$133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}.$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 0$.

   $11^{0+2} + 12^{2\cdot 0+1} = 11^2 + 12^1 = 121 + 12 = 133.$

   Rzeczywiście,

   $133 \mid 11^{0+2} + 12^{2\cdot 0+1}.$
2. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej, jeśli

   $133 \mid 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, to $133 \mid 11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1}$.

   Istotnie,

   $11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1} = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2n+1} \cdot 12^2 = 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2n+1} \cdot 144 =$

   $= 11 \cdot 11^{n+2} + 12^{2n+1} \cdot (11 + 133) = 11\left(11^{n+2} + 12^{2n+1}\right) + 133 \cdot 12^{2n+1}$

i widzimy, że liczba $11^{n+3} + 12^{2(n+1)+1}$ jest podzielna przez 133, jako suma dwóch składników podzielnych przez 133, przy czym pierwszy z tych składników jest podzielny przez 133 na mocy założenia indukcyjnego. Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $133 | 11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dla każdej liczby naturalnej n.

Przykład 5. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi nierówność $2^n > n$.

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 1$.

$2^1 = 2 > 1.$

2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n

$2^n > n \Rightarrow 2^{n+1} > (n+1).$

Rzeczywiście,

$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 > n \cdot 2 = n + n \geqslant n + 1$, czyli

$2^{n+1} > n + 1$, jeśli $2^n > n$.

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy, że $2^n > n$ dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Przykład 6. Wykaż, że dla każdej liczby x większej od -1 oraz dla każdej liczby naturalnej n

$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie dla $n = 0$.

$(1+x)^1 = 1 + x \geqslant 1 + 1 \cdot x.$

2. Wykażemy, że dla każdej liczby x większej od -1 oraz dla każdej liczby naturalnej n

$(1+x)^n \geqslant 1 + nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x.$

Faktycznie,

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geqslant (1+nx)(1+x) = 1 + (n+1)x + nx^2 \geqslant 1 + (n+1)x,$$

gdyż $nx^2 \geqslant 0$ oraz $1 + x > 0$, gdy $x > -1$.

Zatem na mocy indukcji matematycznej wnioskujemy, że dowodzona nierówność jest prawdziwa dla każdej liczby naturalnej n.

Uwaga. Udowodniona przed chwilą nierówność to tak zwana nierówność Jakoba Bernoulliego (czyt. bernuliego).

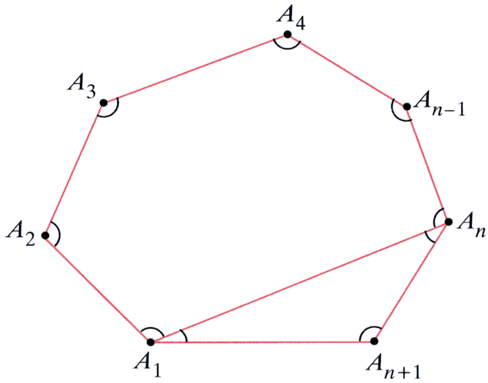
Przykład 7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wypukłego równa jest $(n-2) \cdot 180°$.

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Sprawdzenie, gdy $n = 3$, jest oczywiste, gdyż suma kątów wewnętrznych dowolnego trójkąta jest rzeczywiście równa 180°.
2. Wykażemy, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2, jeśli suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wypukłego równa jest $(n-2)\cdot 180°$, to suma kątów wewnętrznych dowolnego $(n+1)$ kąta wypukłego jest równa $(n-1)\cdot 180°$.

Niech $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n A_{n+1}$ będzie dowolnym $(n+1)$-kątem wypukłym. Wtedy oczywiście $A_1 A_2 A_3 \ldots A_{n-2} A_{n-1} A_n$ będzie n-kątem wypukłym (ryc. 3.3) oraz suma kątów wewnętrznych $(n+1)$-kąta równa jest sumie kątów wewnętrznych tego n-kąta oraz kątów wewnętrznych trójkąta $A_n A_{n+1} A_1$, to jest liczb $(n-2)\cdot 180°$ i 180°. Zatem suma kątów wewnętrznych rozważanego $(n+1)$-kąta wynosi



Ryc. 3.3.

$$(n-2)\cdot 180° + 180° = (n-1)\cdot 180° = ((n+1)-2)\cdot 180°.$$

Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy więc, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 suma kątów wewnętrznych dowolnego n-kąta wypukłego wynosi $(n-2)\cdot 180°$.

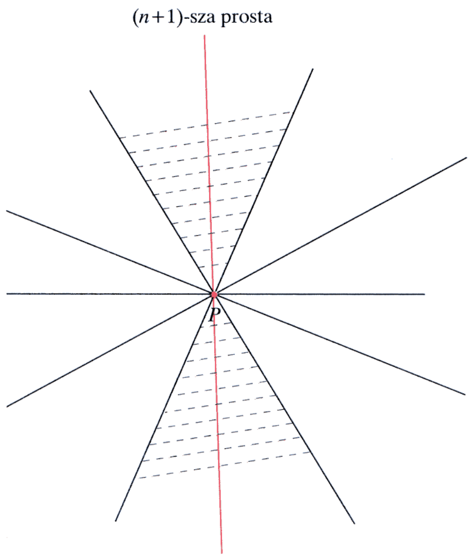
Przykład 8. Udowodnij, że n różnych prostych na płaszczyźnie przechodzących przez dany punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części.

Rozwiązanie:

Dowód indukcyjny.

1. Dla $n = 1$ twierdzenie zachodzi, gdyż jedna prosta, leżąca na płaszczyźnie i przechodząca przez punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części.
2. Wykażemy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli n prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt P dzieli tę płaszczyznę na $2n$ części, to $n+1$ prostych na tej płaszczyźnie przechodzących przez punkt P dzieli ją na $2n+2$ części.

Istotnie, rozważmy n prostych na płaszczyźnie przechodzących przez punkt P i poprowadźmy przez ten punkt jeszcze jedną prostą (ryc. 3.4).



Ryc. 3.4.

Ta $(n+1)$-sza (czyt. „n plus pierwsza”) prosta dzieli tylko dwie spośród $2n$ części płaszczyzny, przy czym każdą z nich na dwie części. W ten sposób części, na które została podzielona płaszczyzna, mamy o dwie więcej. Jest ich więc $2n+2=2(n+1)$. Na mocy indukcji matematycznej stwierdzamy prawdziwość twierdzenia dla każdej dodatniej liczby naturalnej n.

Pytania i zadania

1. Podaj zasadę indukcji matematycznej.
2. Co to jest:
   a) założenie indukcyjne,
   b) teza indukcyjna,
   c) krok indukcyjny?
3. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą równości:

   a) $1^3+2^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$; b) $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

   c) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

   d) $1^2-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$;

   e) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}$;

   f) $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}$; g) $\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\ldots+\frac{n}{2^n}=2-\frac{n+2}{2^n}$.
4. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą podzielności:

   a) $9|10^n-1$; b) $11|10^n-(-1)^n$; c) $43|6^{n+2}+7^{2n+1}$; d) $11|2^{6n+1}+3^{2n+2}$;

   e) $41|5\cdot 7^{2n+2}+2^{3n}$; f) $11|5^{5n+1}+4^{5n+2}+3^{5n}$; g) $10|9\cdot 3^{4n}+1$;

   h) $25|2^{n+2}3^n+5n-4$; i) $169|3^{3n}-26n-1$.
5. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n:

   a) $3|4^n+5$; b) $133|11^{n+2}+12^{2n-1}$; c) $1001|10^{3n}-(-1)^n$; d) $19|5^{2n+1}+3^{n+2}\cdot 2^{n-1}$.
6. Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n:

   a) $3^n>n^3$; b) $3n>\sqrt{n}+1$; c) $(n-1)^2>\frac{n-8}{n+1}$; d) $\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}\geqslant\sqrt{n}$.
7. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 2 każdy n-kąt wypukły ma $\frac{n(n-3)}{2}$ przekątnych.
8. Udowodnij, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, n prostych dzieli płaszczyznę najwyżej na 2^n części.

9. Pojęcie silni. Symbol Newtona i jego algebraiczne własności

Niech n będzie liczbą naturalną.

Symbol n! (czyt.: „n silnia") oznacza:
a) liczbę 1, gdy $n = 0$ lub $n = 1$;
b) iloczyn wszystkich liczb naturalnych od 1 do n włącznie, gdy $n \geqslant 2$.

Tak więc: $n! = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 0 \text{ lub } n = 1 \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n, & \text{gdy } n \geqslant 2. \end{cases}$

Na przykład:

$4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24;\quad 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720;\quad \frac{7!}{5!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7}{5!} = 6 \cdot 7 = 42;$

$\frac{4! - 3!}{4! + 3!} = \frac{3!(4-1)}{3!(4+1)} = \frac{3}{5};\quad \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n \cdot (n+1)}{(n-1)!} = n(n+1);$

$\frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{(n-1)!(n+1)!}{n! \cdot n!} = \frac{(n-1)! \cdot n! \cdot (n+1)}{(n-1)! \cdot n \cdot n!} = \frac{n+1}{n}.$

Niech n i k będą dowolnymi liczbami naturalnymi.

Symbol Newtona $\binom{n}{k}$ – czytamy „n nad k" lub „n po k" – oznacza liczbę określoną wzorem:

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{gdy } 0 \leqslant k \leqslant n \\ 0, & \text{gdy } k > n. \end{cases}$$

Na przykład:

$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1;\quad \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{(n-1)! \cdot n}{(n-1)!} = n;$

$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0! \cdot 0!} = 1;\quad \binom{8}{6} = \frac{8!}{6! \cdot 2!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8}{6! \cdot 2} = 28,$ ale $\binom{6}{8} = 0.$

Twierdzenie 1.

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n$ spełniona jest równość

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

□ Dowód. Ponieważ $k = n - (n-k)$, więc

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \binom{n}{n-k}. \quad \square$$

Na przykład:

$$\binom{8}{3}=\binom{8}{8-3}=\binom{8}{5};\quad \binom{10}{4}=\binom{10}{10-4}=\binom{10}{6};\quad \binom{n}{3}=\binom{n}{n-3}.$$

Twierdzenie 2.

Dla każdej liczby naturalnej n i każdej liczby naturalnej k takiej, że $0 \leqslant k \leqslant n$ zachodzi równość

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

□ Dowód.

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{n!(k+1)}{k!(k+1)(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k-1)!(n-k)}=\frac{n!(k+1)}{(k+1)!(n-k)!}+\frac{n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!(k+1)+n!(n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n!(k+1+n-k)}{(k+1)!(n-k)!}=\frac{n!(n+1)}{(k+1)!(n-k)!}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{(k+1)!((n+1)-(k+1))!}=\binom{n+1}{k+1}. \quad \square$$

Na przykład:

$$\binom{6}{2}+\binom{6}{3}=\binom{7}{3};\quad \binom{10}{7}+\binom{10}{8}=\binom{11}{8};\quad \binom{n}{2}+\binom{n}{3}=\binom{n+1}{3};\quad \binom{n+1}{n-1}+\binom{n+1}{n}=\binom{n+2}{n}.$$

Pytania i zadania

1. Podaj określenie symbolu $n!$
2. Podaj określenie symbolu Newtona $\binom{n}{k}$.
3. Oblicz:

   a) $8!$; b) $\dfrac{8!}{6!\cdot 3!}$; c) $\dfrac{n!(n+1)!}{(n-1)!(n+2)!}$; d) $\dfrac{(n+1)!-(n-1)!}{(n+1)!+(n-1)!}$.
4. Oblicz:

   a) $\binom{4}{2}$; b) $\binom{6}{4}$; c) $\binom{10}{8}$; d) $\binom{13}{5}$; e) $\binom{8}{3}+\binom{8}{4}$; f) $\binom{7}{5}+\binom{7}{6}$; g) $\binom{n}{n-2}+\binom{n}{n-1}$.
5. Wykaż, że:

   a) $n\cdot n!=(n+1)!-n!$; b*) $1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n!=(n+1)!-1$.
6. Udowodnij, że:

   a) $k\cdot\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$; b) $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{l}=\binom{n}{l}\cdot\binom{n-l}{k-l}$; c) $\binom{2n}{n}=2\cdot\binom{2n-1}{n}$.

7*. Udowodnij, że:

a) $\dfrac{\binom{2}{1}+\binom{4}{2}+\binom{6}{3}+\ldots+\binom{2n}{n}}{\binom{1}{1}+\binom{3}{2}+\binom{5}{3}+\ldots+\binom{2n-1}{n}}=2;$ b) $\dfrac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{2n}{n}}{\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{2n-1}{n}}=2^n;$

c) $\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\ldots+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3};$ d) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\ldots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k+1}.$

10. Trójkąt Pascala i wzór dwumianowy Newtona

Wiemy już, jak obliczać wartość symbolu Newtona $\binom{n}{k}$. Stosujemy oczywiście poznany wzór

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \text{gdy} \quad 0 \leqslant k \leqslant n$$

i jego własności

$$\binom{n}{0}=1, \quad \binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}, \quad \binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}.$$

Czasem jednak i one wymagają wykonania uciążliwych obliczeń. W jaki sposób można zatem sobie te rachunki ułatwić? Z pomocą przychodzi tutaj nam następująca tablica liczb, zwana **trójkątem Pascala**:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Tablicę tę tworzymy następująco: pierwszą i ostatnią liczbą w każdym wierszu jest jedynka, natomiast każda inna liczba jest sumą dwóch liczb poprzedniego wiersza stojących najbliżej tej liczby. Na przykład, liczba 10 w szóstym wierszu jest sumą liczb 4 i 6 z poprzedniego wiersza, a liczba 15 w siódmym wierszu jest sumą liczb 10 i 5 z poprzedniego wiersza.

Liczby wypisane w trójkącie Pascala mają właśnie postać $\binom{n}{k}$. Zauważmy, że w n-tym wierszu stoją kolejno liczby: $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots, \binom{n}{n-1}, \binom{n}{n}$.

Przykładowo, w czwartym wierszu mamy: $\binom{3}{0} = 1, \binom{3}{1} = 3, \binom{3}{2} = 3, \binom{3}{3} = 1$, a – dajmy na to – w szóstym są to liczby: $\binom{5}{0} = 1,\ \binom{5}{1} = 5,\ \binom{5}{2} = 10,\ \binom{5}{3} = 10,\ \binom{5}{4} = 5,\ \binom{5}{5} = 1.$

Trójkąt Pascala składa się więc z liczb:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\binom{n}{0} & \binom{n}{1} & \ldots & \binom{n}{k-1} & \binom{n}{k} & \ldots & \binom{n}{n-1} & \binom{n}{n} & \\
\binom{n+1}{0} & \binom{n+1}{1} & \ldots & & \binom{n+1}{k} & \ldots & \binom{n+1}{n} & \binom{n+1}{n+1} & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

gdyż, jak już wiemy, $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ oraz $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

W podrozdziale 4 tego rozdziału poznaliśmy między innymi takie oto wzory skróconego mnożenia:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Przyjrzyjmy się bliżej ich budowie. Używając symboli Newtona, możemy je zapisać równoważnie:

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2,$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.$$

Stąd nietrudno zgadnąć, że na przykład:

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$

zaś $$(a+b)^5=\binom{5}{0}a^5+\binom{5}{1}a^4b+\binom{5}{2}a^3b^2+\binom{5}{3}a^2b^3+\binom{5}{4}ab^4+\binom{5}{5}b^5=$$
$$=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5.$$

Wyprowadzimy teraz ogólniejszy wzór, za pomocą którego można obliczać n-tą potęgę sumy dwóch wyrażeń, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną. Nosi on nazwę **wzoru dwumianowego Newtona**.

Twierdzenie

Dla dowolnych wyrażeń a i b oraz dla dowolnej dodatniej liczby naturalnej n zachodzi wzór
$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n.$$

☐ Dowód. Zastosujemy metodę indukcji matematycznej.

1. Sprawdzenie dla $n=1$ jest oczywiste, bowiem
$$(a+b)^1=a+b=1\cdot a+1\cdot b=\binom{1}{0}a^1+\binom{1}{1}b^1.$$
2. Wykażemy teraz, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n, jeśli
$$(*)\ (a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n,$$
to
$$(**)\ (a+b)^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}.$$

Istotnie, korzystając z własności symboli $\binom{n}{k}$, otrzymujemy:
$$(a+b)^{n+1}=$$
$$=\underbrace{\underbrace{(a+b)^n}\cdot(a+b)=\underbrace{\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\right]}}_{\text{na mocy}\,(*)}.$$
$$(a+b)=\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\right]\cdot a+\left[\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n\right]\cdot b=\left[\binom{n}{0}a^{n+1}+\binom{n}{1}a^nb+\binom{n}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\right.$$
$$\left.+\binom{n}{n-1}a^2b^{n-1}+\binom{n}{n}ab^1\right]+\left[\binom{n}{0}a^nb+\binom{n}{1}a^{n-1}b^2+\binom{n}{2}a^{n-2}b^3+\ldots+\right.$$

$$+\binom{n}{n-1}ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}\Bigg]=\binom{n}{0}a^{n+1}+\left[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}\right]a^nb+\left[\binom{n}{1}+\binom{n}{2}\right]a^{n-1}b^2+\ldots+$$

$$+\left[\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}\right]ab^n+\binom{n}{n}b^{n+1}=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\binom{n+1}{1}a^nb+$$

$$+\binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2+\ldots+\binom{n+1}{n}ab^n+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1},$$

czyli wzór (∗∗). Wobec tego na mocy zasady indukcji matematycznej dowodzony wzór zachodzi dla każdej dodatniej liczby naturalnej n. ▢

Ze wzoru Newtona otrzymujemy szereg ważnych wniosków.

Wniosek 1. Dla dowolnej dodatniej liczby liczby naturalnej n oraz dla dowolnych wyrażeń a i b zachodzi wzór

$$(a-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+\ldots+$$

$$+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}b^n.$$

▢ Dowód. Podstawiając do wzoru Newtona $-b$ w miejsce b, otrzymujemy

$$(a-b)^n=(a+(-b))^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}(-b)+\binom{n}{2}a^{n-2}(-b)^2+\binom{n}{3}a^{n-3}(-b)^3+\ldots+$$

$$+\binom{n}{n-1}a(-b)^{n-1}+\binom{n}{n}(-b)^n=\binom{n}{0}a^n-\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2-\binom{n}{3}a^{n-3}b^3+$$

$$+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+(-1)^n\binom{n}{n}b^n,$$

gdyż

$$\binom{n}{k}a^{n-k}(-b)^k=\binom{n}{k}a^{n-k}((-1)b)^k=\binom{n}{k}a^{n-k}(-1)^kb^k=(-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k. \square$$

Wniosek 2. Suma wszystkich współczynników rozwinięcia dwumianu Newtona, to jest suma

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n-1}+\binom{n}{n}$, jest równa 2^n.

▢ Dowód. Podstawmy do wzoru Newtona $a=b=1$. Otrzymamy wtedy

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}. \square$$

Wniosek 3. Suma wszystkich współczynników rozwinięcia dwumianu Newtona opatrzonych na przemian znakami + i –, to jest suma

$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\binom{n}{n-1}+(-1)^n\cdot\binom{n}{n}$, równa jest zeru.

▢ Dowód. Wystarczy podstawić we wzorze dwumianowym Newtona $a=1,\ b=-1$. ▢

Przykład 1. Napisz rozwinięcie dwumianu

$$\left(2x^2+\frac{1}{x^3}\right)^4.$$

Rozwiązanie:

$$\left(2x^2+\frac{1}{x^3}\right)^4=\binom{4}{0}\left(2x^2\right)^4+\binom{4}{1}\left(2x^2\right)^3\left(\frac{1}{x^3}\right)+\binom{4}{2}\left(2x^2\right)^2\left(\frac{1}{x^3}\right)^2+\binom{4}{3}\left(2x^2\right)\left(\frac{1}{x^3}\right)^3+\binom{4}{4}\left(\frac{1}{x^3}\right)^4=$$

$$=2^4x^8+4\cdot 2^3x^6\cdot\frac{1}{x^3}+6\cdot 2^2x^4\cdot\frac{1}{x^6}+4\cdot 2\cdot x^2\cdot\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{12}}=$$

$$=16x^8+32x^3+24\cdot\frac{1}{x^2}+8\cdot\frac{1}{x^7}+\frac{1}{x^{12}}=16x^8+32x^3+24x^{-2}+8x^{-7}+x^{-12}.$$

Przykład 2. Napisz rozwinięcie dwumianu

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5.$$

Rozwiązanie:

$$\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^5=\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{2}}\right)^5=\binom{5}{0}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^5-\binom{5}{1}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^4x^{-\frac{1}{2}}+\binom{5}{2}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2-$$

$$-\binom{5}{3}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^3+\binom{5}{4}x^{\frac{1}{2}}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^4-\binom{5}{5}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^5=x^{\frac{5}{2}}-5x^{\frac{3}{2}}+10x^{\frac{1}{2}}-10x^{-\frac{1}{2}}+5x^{-\frac{3}{2}}-x^{-\frac{5}{2}}.$$

Przykład 3. Znajdź piąty wyraz rozwinięcia dwumianu

$$\left(2x^2-\frac{1}{x^3}\right)^{24}.$$

Rozwiązanie:

Chodzi oczywiście o wyraz

$$(-1)^4\cdot\binom{24}{4}\left(2x^2\right)^{20}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)^4=\frac{24!}{4!\cdot 20!}\cdot 2^{20}x^{40}\cdot x^{-12}=$$

$$=\frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24}{4!}\cdot 2^{20}\cdot x^{28}=21\cdot 22\cdot 23\cdot 2^{20}\cdot x^{28}.$$

Przykład 4. Znajdź środkowy wyraz rozwinięcia dwumianu

$$\left(\frac{a}{\sqrt{x}}-\sqrt{x}\right)^{16}.$$

Rozwiązanie:

Środkowy wyraz tego rozwinięcia to, oczywiście

$$(-1)^8\cdot\binom{16}{8}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{x}}\right)^8\cdot\left(\sqrt{x}\right)^8=\binom{16}{8}\cdot\left(a\cdot x^{-\frac{1}{2}}\right)^8\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8=\binom{16}{8}a^8\cdot x^{-4}\cdot x^4=\binom{16}{8}a^8.$$

Przykład 5. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu

$$\left(\sqrt[3]{x}+\frac{2}{x}\right)^{12},$$

w którym nie występuje x.

Rozwiązanie:

Rozwinięcie to jest sumą składników postaci

$$\binom{12}{k}\left(\sqrt[3]{x}\right)^{12-k}\left(\frac{2}{x}\right)^{k}=\binom{12}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{12-k}\left(2x^{-1}\right)^{k}=$$

$$=\binom{12}{k}\cdot x^{\frac{12-k}{3}}\cdot 2^{k}\cdot x^{-k}=\binom{12}{k}\cdot 2^{k}\cdot x^{\frac{12-k}{3}-k}=\binom{12}{k}\cdot 2^{k}\cdot x^{\frac{12-4k}{3}},\ \text{gdzie } k\in\{0,1,2,\ldots,12\}.$$

Wyrazem, w którym nie występuje x (tzn. w którym x występuje w potędze 0), jest wyraz o takim numerze k, dla którego $\frac{12-4k}{3}=0$, czyli wyraz trzeci.

I rzeczywiście $\binom{12}{3}\cdot 2^{3}\cdot x^{\frac{12-4\cdot 3}{3}}=\binom{12}{3}\cdot 8.$

Pytania i zadania

1. Co to jest trójkąt Pascala?
2. Jakie własności symbolu Newtona $\binom{n}{k}$ można zauważyć w trójkącie Pascala?
3. Napisz wzór dwumianowy Newtona.
4. Napisz rozwinięcie potęgi:

   a) $(2x-y)^{4}$; b) $(x-3y)^{5}$; c) $(2+x)^{6}$.
5. Z ilu wyrazów składa się rozwinięcie dwumianu:

   a) $(x+y)^{18}$; b) $(2-x)^{24}$; c) $(x-y)^{k}$?
6. Zapisz liczbę $\left(1+\sqrt{2}\right)^{5}$ w prostszej postaci.
7. Wykaż, że

   $$2^{5}+\binom{5}{1}2^{4}+\binom{5}{2}2^{3}+\binom{5}{3}2^{2}+\binom{5}{4}2+1=3^{5}.$$
8. Rozstrzygnij, czy liczba

   $\left(1-\sqrt{2}\right)^{6}+\left(1+\sqrt{2}\right)^{6}$ jest całkowita.
9. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{16}$ zawierający x^{3}.
10. Znajdź wyraz rozwinięcia dwumianu $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x}\right)^{12}$ niezawierający x.
11. W rozwinięciu potęgi $\left(\sqrt[3]{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{7}$ znajdź wyraz wprost proporcjonalny do x.

12*. Udowodnij, że

$$\binom{10}{0}+\binom{10}{2}+\binom{10}{4}+\binom{10}{6}+\binom{10}{8}+\binom{10}{10}=\binom{10}{1}+\binom{10}{3}+\binom{10}{5}+\binom{10}{7}+\binom{10}{9}.$$

13. Znajdź te wyrazy rozwinięcia dwumianu, które są liczbami całkowitymi:

    a) $\left(\sqrt[5]{3}+\sqrt[7]{2}\right)^{24}$; b) $\left(\sqrt[3]{3}+\sqrt{2}\right)^{5}$; c) $\left(\sqrt[3]{3}-\sqrt{2}\right)^{5}$.

IV. Zbiór liczb rzeczywistych

1. Liczby naturalne i całkowite

Liczbami naturalnymi nazywamy, jak wiadomo, liczby $0, 1, 2, 3, 4, \ldots, 11, 12, 13, 14, \ldots$ Ich zbiór oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{N}$. Tak więc

$$\boldsymbol{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Z historii wiadomo, iż w starożytnej Grecji, którą zgodnie uznajemy za kolebkę naszej matematyki, zera do liczb naturalnych nie zaliczano. Pojawiło się ono tam znacznie później niż liczby 1, 2, 3, 4,... itd. Z tymi liczbami stykamy się w swoim życiu najwcześniej. Służą nam one do liczenia różnych przedmiotów, numerowania ich itp. Zwyczajowo zbiór tych liczb oznaczać będziemy przez $\boldsymbol{N}_+$ i nazywać zbiorem liczb całkowitych dodatnich. Zatem $\boldsymbol{N}_+ = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Na liczbach naturalnych możemy wykonywać działania dodawania i mnożenia, to znaczy, dodając dwie liczby naturalne a i b, otrzymamy ich sumę $a + b$, która też jest liczbą naturalną, a mnożąc je, otrzymamy ich iloczyn $a \cdot b$, który także jest liczbą naturalną.

Przyjmujemy więc, że najmniejszą liczbą naturalną jest 0. Dodając do niej 1, otrzymamy następną liczbę 1, dodając do 1 znowu 1, otrzymamy kolejną liczbę naturalną 2 i ogólnie, dodając do dowolnej liczby naturalnej n liczbę 1, otrzymamy kolejną liczbę naturalną $n + 1$. W ten sposób uzyskamy wszystkie liczby naturalne.

Niestety, odejmując dwie liczby naturalne, nie zawsze dostaniemy liczbę naturalną. Na przykład różnica $10 - 6 = 4$ jest liczbą naturalną, ale różnica $5 - 8 = -3$ już nie! Dlatego też mówimy, że odejmowanie nie jest wykonalne w zbiorze liczb naturalnych. Aby to zmienić, należało rozszerzyć zbiór liczb naturalnych o wyniki odejmowania liczb naturalnych. Ten nowy zbiór nazywamy zbiorem **liczb całkowitych** i oznaczamy go przez $\boldsymbol{C}$. Liczbami całkowitymi są więc wszystkie liczby naturalne oraz liczby przeciwne do nich, czyli

$$\boldsymbol{C} = \{\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Widzimy, że $\boldsymbol{N} \subset \boldsymbol{C}$.

Podobny kłopot jak z odejmowaniem liczb naturalnych mamy z ich dzieleniem. Nie zawsze, dzieląc liczbę naturalną przez liczbę naturalną, otrzymamy liczbę naturalną. Ba! Nawet rozszerzenie zbioru $\boldsymbol{N}$ do zbioru $\boldsymbol{C}$ niewiele pomaga. Na przykład $-12 : 4 = -3$ i oczywiście $-3 \in \boldsymbol{C}$, zaś $-\frac{12}{5} \notin \boldsymbol{C}$.

Jednak tę kwestię na razie odłóżmy na później, a powróćmy do działań wykonalnych w zbiorze liczb całkowitych, to jest dodawania, odejmowania i mnożenia. Zapewne dobrze znasz własności tych działań. Dlatego teraz przypomnimy je tylko.

Dla dowolnych liczb całkowitych a, b, c:

$$a + b = b + a, \qquad \text{(przemienność dodawania)}$$

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad \text{(łączność dodawania)}$$

$$a \cdot b = b \cdot a, \qquad \text{(przemienność mnożenia)}$$

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \qquad \text{(łączność mnożenia)}$$

$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c,$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)

$a+0=a,$ (0 jako element neutralny dodawania)

$a\cdot 1=a,$ (1 jako element neutralny mnożenia)

$a+(-a)=0,$ (istnienie liczby przeciwnej do dowolnej liczby całkowitej)

$a-b=a+(-b).$ (wykonalność odejmowania)

Ponadto wiemy też, że dla dowolnych liczb całkowitych a i b:

$$(-a)+(-b)=-(a+b),$$

$$(-a)\cdot b=-ab,$$

$$(-a)\cdot(-b)=ab,$$

$$-(-a)=a.$$

Zilustrujmy te własności na przykładach, korzystając także z ustalonej kolejności wykonywania działań.

Przykład 1.

$(-2)+(-3)=-(2+3)=-5;$

$(-7)+3=-(7-3)=-4;$

$(-5)+8=8-5=3;$

$(-2)+2=0;$

$(-2)\cdot(-3)=6;$

$(-3)\cdot(4)=-12;$

$-(-5)=5;$

$5-(-2)=5+2=7.$

Przykład 2.

$2\cdot(-3)+(-2)-(-3)\cdot(-4)\cdot(-2)=-6+(-2)-(-24)=$

$=-6+(-2)+24=-(6+2)+24=-8+24=24-8=16.$

Przykład 3.

$$496 + 497 + 498 + 499 + 500 + 501 + 502 + 503 + 504 =$$
$$=(496 + 504) + (497 + 503) + (498 + 502) + (499 + 501) + 500 =$$
$$= 1000 + 1000 + 1000 + 1000 + 500 = 4 \cdot 1000 + 500 = 4000 + 500 = 4500.$$

Przykład 4.

$$14 \cdot 8 - 14 \cdot 3 = 14 \cdot (8 - 3) = 14 \cdot 5 = (10 + 4) \cdot 5 = 10 \cdot 5 + 4 \cdot 5 = 50 + 20 = 70.$$

Przykład 5.

$$4 \cdot 6 : 3 - 2 + 20 : 5 \cdot 2 = 24 : 3 - 2 + 4 \cdot 2 = 8 - 2 + 8 = 6 + 8 = 14.$$

Przykład 6.

$$\left\{4 \cdot 7 - \left[(4 \cdot 3 + 8 : 4) - (2 \cdot 6 - 10)\right] \cdot 5\right\} + 3(4 \cdot 7 - 26) =$$
$$= \left\{4 \cdot 7 - \left[(12 + 2) - (12 - 10)\right] \cdot 5\right\} + 3(28 - 26) = \left\{4 \cdot 7 - [14 - 2] \cdot 5\right\} + 3 \cdot 2 =$$
$$= \{28 - 12 \cdot 5\} + 6 = \{28 - 60\} + 6 = -32 + 6 = -(32 - 6) = -26.$$

Pytania i zadania

1. Jakie działania są wykonalne na liczbach naturalnych, a jakie na liczbach całkowitych?
2. Jakie własności mają te działania?
3. Podaj umowną kolejność wykonywania działań na liczbach.
4. Oblicz:

   $(-10) + (-3)$; $(-10) + 3$; $10 + (-3)$; $10 + 3$;

   $(-10) - (-3)$; $(-10) - 3$; $10 - (-3)$; $10 - 3$;

   $(-10) \cdot (-3)$; $(-10) \cdot 3$; $10 \cdot (-3)$; $10 \cdot 3$.
5. Oblicz:

   a) $(-1) + (-2) + (-3) + 4$; b) $24 - 30 + 6 - 45 + 15$;

   c) $(-54) - 16 - (-70)$; d) $128 + 129 + 130 + 170 + 171 + 172$.
6. Oblicz:

   a) $(-1) \cdot 2(-3) \cdot 4$; b) $(-2) \cdot \left[-3 - (-13)\right] \cdot 5$;

   c) $5 \cdot (-6) \cdot (-7) \cdot 0$; d) $\left[5 - (-5)\right] \cdot \left[(-10) - 5\right]$.
7. Wykonaj działania:

   a) $\left[4 \cdot (3 \cdot 5 + 4 \cdot 7) + 25 \cdot 36\right] : (36 \cdot 12 - 290 - 2 \cdot 4)$;

   b) $\left[(8 \cdot 15 + 7 \cdot 11) \cdot (3 \cdot 85 - 4 \cdot 62) - 479\right] : (5 \cdot 71 - 55)$;

   c) $\left\{408 \cdot 306 - 18 \cdot \left[(204 \cdot 9 - 93 \cdot 7) : 79 - 1\right]\right\} : 3461$.

8*. Postaw nawiasy tak, aby zachodziły równości:

a) $6 \cdot 8 + 20 : 4 - 2 = 58$; b) $3248 : 16 - 3 \cdot 315 - 156 \cdot 2 = 600$;

c) $350 - 15 \cdot 104 - 1428 : 14 = 320$.

9*. Oblicz sumę

$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \ldots + 97 - 98 + 99 - 100.$

10. Oblicz

$1000 - \big(1000 - \big(1000 - \big(1000 - (1000 - 999)\big)\big)\big).$

2. O podzielności liczb

Jeżeli a i b oznaczają liczby całkowite, przy czym $b \neq 0$, to iloraz $\frac{a}{b}$ może być liczbą całkowitą albo nie. Na przykład liczby $\frac{6}{2}$, $-\frac{8}{4}$, $\frac{12}{-3}$ są całkowite, zaś liczby $\frac{12}{5}$, $\frac{-7}{3}$, $-\frac{10}{3}$ nie są całkowite.

Jeśli iloraz $\frac{a}{b}$ jest liczbą całkowitą, to oznacza to istnienie takiej liczby całkowitej k, że $\frac{a}{b} = k$, czyli $a = k \cdot b$. Mówimy wtedy, że liczba a jest podzielna przez liczbę b lub b jest dzielnikiem liczby a i zapisujemy to symbolem $b \mid a$.

Tak więc

$$\boxed{b \mid a \Leftrightarrow \bigvee_{k \in C} a = k \cdot b}$$

Na przykład $2 \mid 6$, bo $6 = 3 \cdot 2$; $4 \mid (-8)$, bo $-8 = (-2) \cdot 4$; $-3 \mid 12$, bo $12 = -4 \cdot (-3)$.

Jeżeli iloraz $\frac{a}{b}$ nie jest liczbą całkowitą, to mówimy, że liczba a nie jest podzielna przez b, lub że b nie dzieli liczby a, lub że b nie jest dzielnikiem a, i zapisujemy $b \nmid a$.

Na przykład $5 \nmid 12$, bo $\frac{12}{5} \notin C$, podobnie $3 \nmid (-7)$ i $-3 \nmid 10$, gdyż $\frac{-7}{3} \notin C$ i $\frac{10}{-3} \notin C$.

Co to oznacza: podzielić liczbę całkowitą a przez różną od zera liczbę całkowitą b?

Na przykład dzieląc liczbę 6 przez 2, otrzymamy iloraz 3 i resztę 0. Zapisujemy to następująco:

$$\frac{6}{2} = 3 \text{ lub też } 6 = 3 \cdot 2 = 3 \cdot 2 + 0.$$

Dzieląc zaś 12 przez 5, otrzymamy iloraz 2 i resztę 2. Zapiszemy to następująco:

$$\frac{12}{5} = 2 + \frac{2}{5} \text{ lub też } 12 = 2 \cdot 5 + 2.$$

Z kolei dzieląc -7 przez 3, otrzymamy iloraz -3 i resztę 2 (a nie -2 i -1!) i zapiszemy $-\frac{7}{3} = -3 + \frac{2}{3}$, czyli $-7 = (-3) \cdot 3 + 2$, a dzieląc 8 przez -5 otrzymamy iloraz (-1) i resztę 3, to znaczy $\frac{8}{-5} = -1 + \frac{3}{-5}$, czyli $8 = (-1) \cdot (-5) + 3$. Dzieląc wreszcie na przykład (-2) przez (-5): $\frac{-2}{-5} = 1 + \frac{3}{-5}$, czyli $-2 = 1 \cdot (-5) + 3$. Ogólnie, dzieląc daną liczbę całkowitą a przez różną od zera liczbę całkowitą b, otrzymujemy iloraz k i resztę r, co wyraża zapis:

$$\frac{a}{b} = k + \frac{r}{b} \text{ lub } a = k \cdot b + r.$$

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie (o dzieleniu z resztą)

Dla każdej pary liczb całkowitych a i b, gdzie $b \neq 0$, istnieje dokładnie jedna para liczb całkowitych k i r, taka że $a = k \cdot b + r$ i $0 \leqslant r < |b|$.

Dowód tego twierdzenia wykracza znacznie poza ramy naszego podręcznika, więc go pominiemy.

Zapamiętajmy, że reszta z dzielenia liczby a przez różną od zera liczbę całkowitą b jest jedną z liczb całkowitych $0, 1, 2, 3, \ldots, |b| - 1$.

Podzielność liczby a przez b oznacza więc otrzymanie z dzielenia a przez b reszty 0.

Liczby całkowite podzielne przez 2 nazywamy **parzystymi**. Są to więc liczby postaci $2k$, gdzie k jest liczbą całkowitą.

Liczby całkowite niepodzielne przez 2 (dające z dzielenia przez 2 resztę 1) nazywamy **nieparzystymi**. Zatem są to liczby postaci $2k + 1$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Podobnie na przykład $5k + 3$, gdzie k jest liczbą całkowitą, oznacza ogólną postać liczby całkowitej, która z dzielenia przez 5 daje resztę 3.

Dlaczego, omawiając podzielność liczby całkowitej a przez liczbę całkowitą b, uparcie zakładamy, że $b \neq 0$?

Gdyby $0 | a$, to oznaczałoby to istnienie takiej liczby całkowitej k, że $a = k \cdot 0$. Chcemy przecież, aby takie całkowite k istniało tylko jedno. A tymczasem równość $a = k \cdot 0$ zachodzi dla każdego k, gdy $a = 0$, zaś dla żadnego, gdy $a \neq 0$. Zatem 0 nie jest dzielnikiem żadnej liczby całkowitej.

Twierdzenie

Niech a, b, c, d będą liczbami całkowitymi. Wówczas:

1. jeśli $b | a$ i $a | b$, to $|a| = |b|$;
2. jeśli $b | a$ i $a | c$, to $b | c$;
3. jeśli $b | a$ i $b | c$, to $b | a + c$ i $b | a - c$;
4. jeśli $c | a$, to $c | a + b$, wtedy i tylko wtedy, gdy $c | b$;
5. jeśli $b | a$ i $d | c$, to $bd | ac$.

☐ Dowód.

1. Jeśli $b | a$ i $a | b$, to dla pewnych liczb całkowitych k i l mamy równości
   $a = k \cdot b$ i $b = l \cdot a$.
   Stąd $b = l \cdot a = l \cdot k \cdot b$, czyli $b = (k \cdot l) \cdot b$, skąd $k \cdot l = 1$. Zatem $k = l = 1$ lub $k = l = -1$.
   Gdy $k = l = 1$, mamy $a = b$, gdy zaś $k = l = -1$, mamy $a = -b$.
   Wobec tego $|a| = |b|$.
2. Jeśli $b | a$ i $a | c$, to istnieją takie liczby całkowite k i l, że $a = k \cdot b$ i $c = l \cdot a$.
   Stąd $c = l \cdot a = l \cdot (k \cdot b) = (k \cdot l) b$, czyli $c = (k \cdot l) \cdot b$.

Ostatnia równość oznacza podzielność liczby c przez b, gdyż iloczyn $k \cdot l$ jest liczbą całkowitą. Dowody twierdzeń 3–5 spróbuj w podobny sposób przeprowadzić samodzielnie. ▢

Powróćmy do liczb naturalnych. Zauważmy, że dla każdej dodatniej liczby naturalnej n zachodzą podzielności $1|n$ i $n|n$, które wynikają z oczywistej równości $n \cdot 1 = n$.

Każdą liczbę naturalną można zapisać w dziesiątkowym systemie pozycyjnym za pomocą dziesięciu cyfr arabskich: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.

Jeżeli $\overline{c_n c_{n-1} c_{n-2} \ldots c_1 c_0}$ oznacza zapis liczby naturalnej A w dziesiątkowym systemie pozycyjnym, to piszemy też

$$A = \overline{c_n c_{n-1} c_{n-2} \ldots c_1 c_0} = c_n \cdot 10^n + c_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + c_1 \cdot 10 + c_0.$$

Cyfry $c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$ nazywamy cyframi odpowiednio: jedności, dziesiątek, setek, tysięcy,..., rzędu n liczby A. Na przykład:

$$1998 = 1 \cdot 1000 + 9 \cdot 100 + 9 \cdot 10 + 8 \cdot 1 = 1 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

Aby sprawdzić, czy dana liczba naturalna A jest podzielna przez liczbę naturalną B, gdy B jest jedną z liczb $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$, wystarczy skorzystać z tak zwanych **cech podzielności**. Podaje je poniższa tabelka:

Dzielnik	Cecha podzielności
2	ostatnią cyfrą liczby A jest 0, 2, 4, 6 albo 8
3	suma cyfr liczby A dzieli się przez 3
4	liczba utworzona przez dwie ostatnie cyfry liczby A dzieli się przez 4
5	ostatnią cyfrą liczby A jest 0 albo 5
6	liczba A jest podzielna przez 2 i przez 3
8	liczba utworzona przez trzy ostatnie cyfry liczby A dzieli się przez 8
9	suma cyfr liczby A dzieli się przez 9

Liczbę naturalną n nazywamy liczbą **pierwszą**, gdy ma dwa dzielniki: 1 i n.

Liczbę naturalną n większą od 1, która nie jest liczbą pierwszą, nazywamy **liczbą złożoną**.

Na przykład liczby $2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 17, \ldots$ są pierwsze, a liczby $4, 6, 8, 9, 10, \ldots$ są złożone. Zauważ, że 2 jest jedyną liczbą pierwszą parzystą.

Liczby naturalne 0 i 1 nie są ani pierwsze, ani złożone.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Każdą liczbę złożoną można jednoznacznie przedstawić w postaci iloczynu liczb pierwszych. Przedstawienie liczby naturalnej w postaci iloczynu liczb pierwszych jest z dokładnością do porządku czynników tylko jedno i nazywamy je rozkładem liczby naturalnej na czynniki pierwsze.

Na przykład:

$$
\begin{array}{r|l}
224 & 2 \\
112 & 2 \\
56 & 2 \\
28 & 2 \\
14 & 2 \\
7 & 7 \\
1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|l}
600 & 2 \\
300 & 2 \\
150 & 2 \\
75 & 3 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
$$

Po prawej stronie pionowej kreski notujemy kolejne dzielniki. Stąd $224 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7$, $600 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Posługując się rozkładem liczb na czynniki pierwsze, wyznaczamy tak zwany **największy wspólny dzielnik** oraz **najmniejszą wspólną wielokrotność** liczb.

Największym wspólnym dzielnikiem liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy największą liczbę naturalną, która dzieli każdą z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$.
Oznaczamy go symbolem **NWD** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lub krótko $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

NWD dwóch lub więcej liczb naturalnych wyznaczamy następująco: rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze, a następnie wybieramy czynniki wspólne i mnożymy je.

Przykład 1. Ponieważ $224 = 2^5 \cdot 7$, zaś $600 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^1$, więc NWD $(224, 600) = 2^3 = 8$.

Chcąc wyznaczyć NWD dużych liczb naturalnych, których rozkład na czynniki nie jest łatwy do uzyskania, lepiej posłużyć się tak zwanym **algorytmem Euklidesa**.

Załóżmy, że szukamy NWD (a, b), gdzie a i b są liczbami naturalnymi większymi od 1, przy czym $a > b$.

Dzielimy a przez b i otrzymujemy $a = k \cdot b + r$, gdzie $k \in N$ i $r \in \{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$. Jeśli $r = 0$, to NWD $(a, b) = b$. Gdy zaś $r \neq 0$, to dzielimy b przez r i otrzymujemy $b = k_1 \cdot r + r_1$, gdzie $k_1 \in N$ i $r_1 \in \{0, 1, 2, \ldots, r-1\}$. Jeśli $r_1 = 0$, to NWD (a, b) = NWD $(b, r) = r$.

Gdy $r_1 \neq 0$, to dzielimy r przez r_1 itd...

Otrzymujemy w ten sposób równości:

$$
\begin{array}{ll}
a = k \cdot b + r & (a, b) = (b, r) \\
b = k_1 \cdot r + r_1 & (b, r) = (r, r_1) \\
r = k_2 \cdot r_1 + r_2 & (r, r_1) = (r_1, r_2) \\
r_1 = k_3 \cdot r_2 + r_3 & (r_1, r_2) = (r_2, r_3) \\
\vdots & \vdots \\
r_{n-2} = k_n \cdot r_{n-1} + r_n & (r_{n-2}, r_{n-1}) = (r_{n-1}, r_n) \\
r_{n-1} = k_{n+1} \cdot r_n &
\end{array}
$$

Oczywiście $r_1 > r_2 > \ldots r_n > 0$, więc po skończenie wielu krokach otrzymamy zerową resztę. Ostatnia niezerowa reszta jest szukanym NWD liczb a i b.

Przykład 2. Znajdziemy z zastosowaniem algorytmu Euklidesa NWD$(580, 3920)$.

Mamy:

$3920 = 6 \cdot 580 + 440;$

$580 = 1 \cdot 440 + 140;$

$440 = 3 \cdot 140 + 20;$

$140 = 7 \cdot 20 + 0;$

$74 = 2 \cdot 37 + 0.$

Stąd NWD $(580, 3920) = 20.$

Przykład 3. Wyznacz NWD$(1517, 1073)$.

Mamy:

$1517 = 1 \cdot 1073 + 444;$

$1073 = 2 \cdot 444 + 185;$

$444 = 2 \cdot 185 + 74;$

$185 = 2 \cdot 74 + 37;$

$74 = 2 \cdot 37 + 0.$

Stąd NWD $(1517, 1073) = 37.$

Dwie liczby naturalne nazywamy **względnie pierwszymi**, gdy ich NWD jest równy 1.

Na przykład każde dwie liczby pierwsze są względnie pierwsze; każde dwie kolejne liczby naturalne są względnie pierwsze.

Najmniejszą wspólną wielokrotnością liczb całkowitych dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy najmniejszą liczbę naturalną, która dzieli się przez każdą z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ i oznaczamy ją symbolem **NWW** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ lub krótko $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$.

Aby wyznaczyć NWW dwóch lub więcej liczb naturalnych, rozkładamy dane liczby na czynniki pierwsze, a następnie wypisujemy wszystkie czynniki jednej z nich i dopisujemy do nich te czynniki z pozostałych rozkładów, których nie ma wśród wypisanych uprzednio w dostatecznej ilości. Iloczyn wybranych w ten sposób czynników jest szukanym NWW tych liczb.

Przykład 4. NWW$(12, 16, 22) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 11 = 528$,
gdyż $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, $16 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$, $22 = 2 \cdot 11$.

Pytania i zadania

1. Co oznacza podzielić dwie liczby całkowite przez siebie? Sformułuj twierdzenie o dzieleniu z resztą.
2. Co to jest liczba: a) parzysta, b) nieparzysta c) pierwsza, d) złożona?
3. Znajdź iloraz i resztę z dzielenia liczby a przez b, jeśli:
   a) $a = 13, b = 4$; b) $a = 13, b = -4$; c) $a = -13, b = 4$; d) $a = -13, b = -4$.
4. Napisz w postaci ogólnej liczbę całkowitą, która:
   a) z dzielenia przez 3 daje resztę 2,

b) z dzielenia przez 7 daje resztę 4,
c) jest podzielna przez 5.
5. Wymień znane ci cechy podzielności liczb naturalnych.
6. Co oznacza rozkład liczby naturalnej na czynniki pierwsze?
7. Co oznaczają symbole: $NWD(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ i $NWW(a_1, a_2, \ldots, a_n)$?
8. Uzasadnij cechy podzielności liczb naturalnych przez: a) 2, b) 3 i 9, c) 4, d) 5, e) 8.
9. Wyznacz NWD i NWW wybranych przez siebie liczb naturalnych.
10. Wykaż, że każde dwie kolejne liczby naturalne są względnie pierwsze.
11. Wyznacz liczbę, której suma cyfr wynosi 12 i która ma dokładnie cztery dzielniki, których suma wynosi 176.
12. Suma dwóch różnych liczb dwucyfrowych wynosi 168. Liczba 12 jest ich wspólnym dzielnikiem. Wyznacz NWD tych liczb.
13. Przez jaką liczbę należy podzielić liczby 2294 i 1848, aby otrzymać reszty odpowiednio 19 i 23?
14. Liczba naturalna n jest większa od 2000. Wiadomo, że n i $n+2$ są liczbami pierwszymi. Wykaż, że $n+1$ jest liczbą podzielną przez 6.
15. Dane są takie liczby naturalne a, b, c, d, że każda z liczb: $a+b, b+c, c+d$ jest nieparzysta. Wykaż, że iloczyn $a \cdot b \cdot c \cdot d$ jest podzielny przez 4.
16. Wykaż, że dla liczb całkowitych a i b:
a) jeśli $3|(a+1)$, to $3|(4+7a)$;
b) jeśli $11|(a+2)$ i $11|(35-b)$, to $11|(a+b)$.
17. Udowodnij, że suma kwadratów trzech kolejnych liczb całkowitych z dzielenia przez 3 daje resztę 2.
18*. Wykaż, że dla dowolnych liczb naturalnych a i b
$NWD(a,b) \cdot NWW(a,b) = a \cdot b$.
19*. Dyrektor pewnego banku zapomniał, jakie są dwie ostatnie cyfry dziesięciocyfrowego kodu do sejfu. Pamięta tylko osiem pierwszych cyfr: 20002001**. Pamięta także, że cały numer był liczbą podzielną przez 15. Jaki to mógł być numer?
20*. W miejsce gwiazdek wpisz takie cyfry, aby liczba 32*35717* była podzielna przez 12.
21*. Niech a będzie liczbą całkowitą, zaś p – liczbą pierwszą. Udowodnij, że jeżeli $p|(5a-1)$ i $p|(a-10)$, to $p|(a-3)$.

3. Liczby wymierne

Rozszerzenie zbioru N liczb naturalnych do zbioru C liczb całkowitych pozwala nam wykonywać trzy z czterech działań arytmetycznych: dodawanie, odejmowanie i mnożenie. Ciągle jednak nie możemy swobodnie dzielić liczb. Ani wynik dzielenia $5:2$, ani $-8:3$ nie jest liczbą całkowitą, choć na przykład $6:2$ oczywiście jest liczbą całkowitą!

Stąd myśl, aby zbiór C rozszerzyć do takiego zbioru, w którym da się wykonywać dzielenie liczb. Wystarczy mianowicie do wszystkich liczb całkowitych dołączyć wszystkie te wyniki dzielenia liczb całkowitych, które nie są liczbami całkowitymi. Otrzymamy w ten sposób zbiór liczb postaci $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są całkowite, przy czym $n \neq 0$, który nazywamy zbiorem liczb wymiernych, a jego elementy – liczbami wymiernymi. Zbiór ten oznaczać będziemy literą $\boldsymbol{W}$. Tak więc:

Liczbą wymierną nazywamy każdą liczbę postaci $\frac{m}{n}$, gdzie $\boldsymbol{m, n \in C}$ i $\boldsymbol{n} \neq 0$, zaś zbiór takich liczb to znaczy zbiór

$$W = \left\{ \frac{m}{n};\, m, n \in C \; i \; n \neq 0 \right\}$$

nazywamy **zbiorem liczb wymiernych.**

Widzimy zatem, że każda liczba całkowita n jest liczbą wymierną, bo $n = \frac{n}{1}$. Stąd $C \subset W$.

Przykłady liczb wymiernych: $\frac{1}{2}$, $\frac{8}{4}$ (czyli 2); $\frac{0}{5}$ (czyli 0); $-\frac{3}{2}$, $\frac{9}{-3}$ (czyli -3).

Prawdziwe są równości

$$\frac{-a}{b} = -\frac{a}{b} = \frac{a}{-b} \quad \text{oraz} \quad \frac{+a}{+b} = \frac{a}{b} = \frac{-a}{-b}.$$

Ponieważ (zgodnie ze znanymi regułami dodawania ułamków zwykłych) dla dowolnych liczb całkowitych m, n, p i $q \left(n \neq 0, q \neq 0 \right)$ zachodzą równości:

$$\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{mq + np}{nq}, \quad \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{n \cdot q}, \quad \frac{m}{n} \cdot \frac{p}{q} = \frac{m \cdot p}{n \cdot q},$$

$$\frac{m}{n} : \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{m \cdot q}{n \cdot p} \quad (\text{o ile } p \neq 0)$$

oraz liczby $n \cdot q, n \cdot p, m \cdot q + n \cdot p,\ m \cdot q - n \cdot p$ są całkowite i $n \cdot q \neq 0, n \cdot p \neq 0$, więc możemy wysnuć następujący wniosek.

Wniosek. W zbiorze W liczb wymiernych są wykonalne wszystkie cztery działania arytmetyczne: dodawania, odejmowania, mnożenia i dzielenia (przez liczbę różną od zera).

Przykład 1*. Udowodnij, że jeżeli liczby $a + b$ i $a - b$ są wymierne, to liczby a i b również są wymierne.

Rozwiązanie:

Oznaczmy:

$a + b = w_1$

$a + b = w_2$, gdzie $w_1, w_2 \in W$.

Rozwiązując układ powyższych równań z niewiadomymi a i b, otrzymujemy:

$a = \frac{w_1 + w_2}{2}$ i $b = \frac{w_1 - w_2}{2}$. I widzimy, że a i b są liczbami wymiernymi.

Przykład 2*. Wykaż, że jeżeli liczby a^5 i a^7 są wymierne, to liczba a również jest liczbą wymierną.

Rozwiązanie:

Jeśli $a = 0$, to oczywiście a jest liczbą wymierną. Niech $a \neq 0$. Skoro liczby a^5 i a^7 są wymierne, to liczby $\left(a^5\right)^3$ i $\left(a^7\right)^2$ również są wymierne. Stąd wynika, że liczba

$$a = \frac{a^{15}}{a^{14}} = \frac{\left(a^5\right)^3}{\left(a^7\right)^2} \text{ także jest wymierna.}$$

Pytania i zadania

1. Co to są liczby wymierne? Podaj przykłady.
2. Czy suma, różnica, iloczyn i iloraz liczb wymiernych jest liczbą wymierną?
3. Wykonaj działania:

a) $$\frac{\left(\frac{7}{15}+\frac{14}{45}+\frac{2}{9}\right)\cdot 10\frac{1}{3}-1\frac{1}{11}\left(2\frac{2}{3}-1\frac{3}{4}\right)}{\left(\frac{3}{7}-\frac{1}{4}\right):\frac{3}{28}-1};$$

b) $$\frac{\left[5\frac{1}{84}+\frac{31}{63}-\left(2\frac{31}{252}+3\frac{5}{21}\right)\right]\cdot\left[24:\left(1\frac{1}{2}:4\frac{3}{8}\right)\right]}{\left(1\frac{15}{26}+\frac{1}{39}-\frac{7}{156}\right):\left(20\frac{1}{4}:26\right)}.$$

4. Wykonaj działania:

a) $\left(\frac{a-b}{a+b}+\frac{a+b}{a-b}\right)\left(\frac{a^2+b^2}{2ab}+1\right)\frac{ab}{a^2+b^2}$; b) $\left(\frac{a^2+b^2}{b}-a\right)\cdot\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}:\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)$.

5*. Liczby $\frac{a+1}{a^2+2}$ i $\frac{a^2+3}{a^2+4}$ są wymierne. Wykaż, że a jest liczbą wymierną.

6*. Wykaż, że jeżeli $a+\frac{b^2}{a}=b+\frac{a^2}{b}$, to $a=b$.

7. Znajdź takie dwie liczby a i b, aby $a+b=a\cdot b=\frac{a}{b}$.

8*. Udowodnij, że jeżeli różna od zera liczba wymierna w jest sumą kwadratów dwóch liczb wymiernych, to liczba $\frac{1}{w}$ również jest sumą kwadratów dwóch liczb wymiernych.

4. Liczby niewymierne

Jak już wiemy, każda liczba wymierna to taka, którą można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi $(n\neq 0)$. Tylko, czy każdą liczbę można tak przedstawić? Okazuje się, że nie! Odkrycie to (kiedyś – wielkie!) zawdzięczamy starożytnym Grekom, a konkretnie Pitagorasowi (ok. 582–507 p.n.e.) i jego uczniom. To oni jako pierwsi zauważyli, że długość przekątnej kwadratu o boku 1 nie jest liczbą wymierną. Fakt ten (przedtem nikomu nieznany!) tak nimi wstrząsnął, że okryli go głęboką tajemnicą, której zdrada groziła śmiercią. A jak do takiego wniosku doszli? Otóż łatwo zauważyć, że gdy x oznacza długość przekątnej kwadratu o boku 1, to na mocy twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy do rozwiązania równanie $x^2=2$. I okazuje się, że równania tego nie spełnia żadna liczba wymierna. Gdyby bowiem założyć przeciwnie, że istnieje liczba wymierna $\frac{m}{n}$, której kwadrat jest równy 2, to oznaczałoby to równość $\frac{m^2}{n^2}=2$, czyli równość $m^2=2n^2$.

Po rozłożeniu na czynniki pierwsze obu jej stron otrzymalibyśmy czynnik 2 po prawej stronie w potędze nieparzystej, a po lewej – w potędze parzystej (w tym być może również w zerowej), a zatem sprzeczność, która dowodzi nieistnienia liczby wymiernej spełniającej równanie $x^2=2$.

Podobnie można wykazać, że nie istnieją liczby wymierne, które spełniają równania $x^2=3$, $x^2=5$, $x^3=3$ i wiele innych.

Liczby takie przyjęto nazywać niewymiernymi.

Liczbę nazywamy **niewymierną**, gdy nie jest wymierna.

Liczby niewymierne są to więc takie liczby, których nie można przedstawić w postaci ułamka $\frac{m}{n}$, gdzie $m, n \in C$ i $n \neq 0$.

Zbiór takich liczb oznaczać będziemy symbolem ***IW***.

Liczbami niewymiernymi są na przykład liczby $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[3]{3}$ itp.

Można wykazać, że jeżeli $n \geqslant 2$ jest liczbą naturalną, to liczba $\sqrt[n]{n}$ jest niewymierna. Zauważmy, że wynik dowolnego działania arytmetycznego na liczbach niewymiernych może być liczbą niewymierną lub wymierną.

Przykład 1. Liczba $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ (czyli $\sqrt{6}$) jest niewymierna.

Istotnie, gdyby była ona liczbą wymierną, to musiałaby zachodzić równość $\sqrt{6}=\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi.

Stąd otrzymalibyśmy, że $6=\frac{m^2}{n^2}$, czyli, że $6n^2=m^2$.

Rozkładając obie strony tej równości na czynniki pierwsze, otrzymalibyśmy na przykład czynnik 3 po lewej stronie w potędze nieparzystej, a po prawej – w potędze parzystej. I sprzeczność, która kończy dowód niewymierności liczby $\sqrt{6}$.

Przykład 2. Liczba $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ jest niewymierna.

Istotnie, gdyż w przeciwnym razie musiałyby istnieć takie liczby całkowite m i n $(n \neq 0)$, dla których zachodziłyby kolejno równości:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\frac{m}{n}, \text{ (podnosimy obustronnie do kwadratu)}$$

$$2+3+2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=\frac{m^2}{n^2},$$

$$5+2\sqrt{6}=\frac{m^2}{n^2},$$

$$\sqrt{6}=\frac{m^2-5n^2}{2n^2}.$$

Ostatnia równość dowodziłaby wymierności liczby $\sqrt{6}$, która – jak wiemy z przykładu 1 – jest niewymierna.

Przykład 3. Liczba $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)=2-3=-1$ jest wymierna.

Przykład 4. Liczba $\left(3+\sqrt{2}\right)+\left(-1-\sqrt{2}\right)=2$ jest wymierna. (Sprawdź, że liczby $3+\sqrt{2}$ i $-1-\sqrt{2}$ są niewymierne).

Do często spotykanych przekształceń liczb niewymiernych należy **usuwanie niewymierności z mianownika** ułamka.

Przykłady:

1. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$;

2. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$;

3. $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)} = \dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a-b}$, gdy $a \geqslant 0,\ b \geqslant 0,\ a \neq b$;

4. $\dfrac{3}{1+\sqrt[3]{2}} = \dfrac{3\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{\left(1+\sqrt[3]{2}\right)\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)} = \dfrac{3\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{1^3+\left(\sqrt[3]{2}\right)^3} = \dfrac{3\left(1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}\right)}{3} = 1-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$;

5. $\dfrac{1}{2+\sqrt{5}+2\sqrt{2}+\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\left(2+2\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{5}+\sqrt{10}\right)} = \dfrac{1}{2\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{5}\left(1+\sqrt{2}\right)} =$

$= \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)} = \dfrac{1}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)}\cdot\dfrac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2-\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}} =$

$= \dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{2}\right)\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)} = \dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{\left(1^2-\sqrt{2}^2\right)\left(2^2-\sqrt{5}^2\right)} = \dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{(1-2)(4-5)} =$

$= \dfrac{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)}{(-1)(-1)} = \left(1-\sqrt{2}\right)\left(2-\sqrt{5}\right)$;

6. $\dfrac{\sqrt[3]{2^2\cdot\sqrt{2}}}{\sqrt[4]{2^3\cdot\sqrt[3]{2}}} = \dfrac{\sqrt[12]{\left(2^2\cdot\sqrt{2}\right)^4}}{\sqrt[12]{\left(2^3\cdot\sqrt[3]{2}\right)^3}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^8\cdot 2^2}}{\sqrt[12]{2^9\cdot 2}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^{10}}}{\sqrt[12]{2^{10}}} = 1.$

Pytania i zadania

1. Jakie liczby nazywamy niewymiernymi?
2. Podaj przykłady dwóch liczb niewymiernych, których suma, różnica, iloczyn i iloraz jest liczbą:
   a) niewymierną,
   b) wymierną.
3. Jaką liczbą (wymierną czy niewymierną) jest:
   a) suma liczby wymiernej i niewymiernej,
   b) różnica liczby wymiernej i niewymiernej,
   c) iloczyn liczby wymiernej i niewymiernej?
4. Wykaż, że liczby $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt{3}+\sqrt{5}$, $1+\sqrt{3}$, $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ są niewymierne.
5. Usuń niewymierność z mianownika:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1};\quad \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}};\quad \frac{1-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}};\quad \frac{2+\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{4}};\quad \frac{30}{\sqrt{5}-\sqrt{3}+\sqrt{2}};\quad \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}};$$

$$\frac{1}{\sqrt{10}-\sqrt{15}+\sqrt{14}-\sqrt{21}};\quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}-\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}};\quad \frac{3}{\sqrt[3]{4}-1};\quad \frac{4}{\sqrt[3]{3}+1}.$$

6. Udowodnij, że jeżeli $a+b+c \in W$, zaś $a+b \in IW$, to co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są niewymierne.

7*. Wykaż, że liczba $\sqrt{29+12\sqrt{5}}-\sqrt{29-12\sqrt{5}}$ jest całkowita.

8*. Udowodnij, że liczba $\left(4+\sqrt{15}\right)\left(\sqrt{10}-\sqrt{6}\right)\sqrt{4-\sqrt{15}}$ jest całkowita.

9*. Rozstrzygnij, czy liczba $\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}$ jest wymierna czy niewymierna.

10*. Rozwiąż w liczbach wymiernych x, y równanie $x^2-y^2=2xy$.

5. Rozwinięcia dziesiętne liczb rzeczywistych

Wszystkie liczby, którymi się dotąd zajmowaliśmy, obejmujemy wspólną nazwą – **liczby rzeczywiste**.

Zbiór liczb rzeczywistych oznaczać będziemy symbolem $\boldsymbol{R}$. Każda liczba rzeczywista jest albo **wymierna**, albo **niewymierna**. Zachodzą więc następujące zależności:

$$N \subset C \subset W \subset R,\ W \cup IW = R \text{ oraz } W \cap IW = \varnothing.$$

Przyjmijmy jeszcze oznaczenia:

R_+ oznacza zbiór liczb rzeczywistych dodatnich,

R_- oznacza zbiór liczb rzeczywistych ujemnych.

Obecnie zajmiemy się przedstawieniem liczb rzeczywistych w postaci ułamków dziesiętnych. Takie przedstawienie liczb rzeczywistych nazywamy ich rozwinięciem dziesiętnym.

Chcąc zamienić liczbę wymierną $\frac{m}{n}$, gdzie m i n są liczbami całkowitymi ($n \neq 0$), na ułamek dziesiętny, dzielimy m przez n. Wykonując to dzielenie, otrzymujemy kolejne reszty, z których każda jest mniejsza od n. Mamy wówczas dwie możliwości:

1. Któraś kolejna reszta jest równa 0 i otrzymany ułamek dziesiętny jest skończony.
   Na przykład: $15:4 = 3,75$. Kolejne reszty są odpowiednio równe: $r_1 = 3$, $r_2 = 2$, $r_3 = 0$.
2. Żadna z otrzymanych reszt nie jest zerem i po co najwyżej $n-1$ dzieleniach któraś reszta musi się powtórzyć, a zatem powtórzą się i dalsze reszty i otrzymany ułamek dziesiętny jest okresowy.
   Na przykład: $22:7 = 3,142857142857142857\ldots$; kolejne reszty są odpowiednio równe: $r_1 = 1$, $r_2 = 3$, $r_3 = 2$, $r_4 = 6$, $r_5 = 4$, $r_6 = 5$, $r_7 = 1$ itd.

Zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Każdą liczbę wymierną można w jeden tylko sposób przedstawić w postaci ułamka dziesiętnego skończonego lub nieskończonego okresowego. I na odwrót, każdy ułamek dziesiętny skończony lub nieskończony okresowy jest rozwinięciem jednej liczby wymiernej.

Ułamek dziesiętny okresowy, w którym powtarza się pewna grupa cyfr, zapisujemy, ujmując w nawias tę grupę cyfr. Na przykład:

$$0,333\ldots = 0,(3);$$
$$0,121212\ldots = 0,(12);$$
$$1,375375375\ldots = 1,(375).$$

Tę powtarzającą się grupę cyfr nazywamy **okresem ułamka**.

Często zachodzi potrzeba zamiany ułamka dziesiętnego na ułamek zwykły. Gdy ułamek dziesiętny jest skończony, sprawa jest prosta. Przykłady:

$$0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5};$$
$$0,64 = \frac{64}{100} = \frac{16}{25};$$
$$0,0128 = \frac{128}{10000} = \frac{8}{625}.$$

Gdy zaś ułamek dziesiętny jest nieskończony okresowy, problem zamiany takiego ułamka na ułamek zwykły trochę się komplikuje. Nie da się przecież powtórzyć algorytmu zamiany ułamka dziesiętnego skończonego na ułamek zwykły. Jak zatem należy postąpić? Prześledźmy to na przykładach.

Przykład 1. Zamień ułamek dziesiętny okresowy $0,(6)$ na ułamek zwykły.
Rozwiązanie:

Wiemy oczywiście, że $0,(6) = 0,6666\ldots$

Oznaczmy $x = 0,(6)$. Wówczas $10x = 6,(6) = 6 + 0,(6) = 6 + x$.

Stąd $10x - x = 6$, czyli $9x = 6$ i ostatecznie $x = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Zatem $0,(6) = \frac{2}{3}$.

Przykład 2. Zamień ułamek dziesiętny okresowy $1,(12)$ na ułamek zwykły.
Rozwiązanie:

Oczywiście $1,(12) = 1 + 0,(12)$.

Oznaczamy $x = 0,(12)$. Wówczas $100x = 12,(12) = 12 + 0,(12) = 12 + x$.

Stąd $100x - x = 12$, $99x = 12$ i ostatecznie $x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$.

Zatem $1,(12) = 1 + \frac{4}{33} = 1\frac{4}{33}$.

Przykład 3. Zamień ułamek dziesiętny okresowy $0,(9)$ na ułamek zwykły.
Rozwiązanie:

Ponieważ $0,(9) = 0,999\ldots$, więc oznaczając $x = 0,(9)$, otrzymujemy:

$10x = 9,(9) = 9 + 0,(9) = 9 + x$.

Stąd $9x = 9$, czyli $x = 1$. Tak więc $0,(9) = 1$.

Uwaga. Każdy ułamek skończony mający k cyfr za przecinkiem można uważać za ułamek nieskończony okresowy, w którym – poczynając od $(k+1)$-szego miejsca – występują same zera. Na przykład $0,216 = 0,2160000\ldots$

Każdy ułamek dziesiętny okresowy mający okres 9 można zastąpić ułamkiem dziesiętnym skończonym. Na przykład: $0,1999\ldots = 0,1(9) = 0,2$.

Z twierdzenia o rozwinięciach dziesiętnych liczb wymiernych wynika, że rozwinięcia dziesiętne **liczb niewymiernych** są **ułamkami nieskończonymi nieokresowymi**. Na przykład:

$$\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$$
$$\sqrt{3} = 1,7320508\ldots$$

Liczbami niewymiernymi są również na przykład liczby:
$0,1248163264128\ldots$ (w rozwinięciu tym widzimy kolejne potęgi dwójki),
$0,123456789101112\ldots$ (tutaj z kolei występują kolejne liczby naturalne), w rozwinięciach tych bowiem nie powtarza się żadna grupa.

Otrzymujemy więc następujący wniosek.

Wniosek. Każda liczba rzeczywista ma rozwinięcie dziesiętne, przy tym:
- każda liczba **wymierna** – rozwinięcie dziesiętne **skończone** lub **nieskończone okresowe**,
- każda liczba **niewymierna** – rozwinięcie dziesiętne **nieskończone nieokresowe**.

Pytania i zadania

1. Omów rozwinięcia dziesiętne liczb wymiernych.
2. Jakie rozwinięcia dziesiętne mają liczby niewymierne?
3. Wykonaj działania:
   a) $2,96 + 3,97 + 4,98 + 5,99$;
   b) $2,89 - 3 \cdot 1,22 + 5,16 - 1,39$;
   c) $23 \cdot 19,99 - 29 \cdot 19,99 + 16 \cdot 19,99$.
4. Z ilu cyfr składa się okres rozwinięcia dziesiętnego ułamka $\frac{2}{17}$?
5. Zamień na ułamki zwykłe następujące ułamki dziesiętne:
   a) $0,375$; b) $1,36$; c) $0,(3)$; d) $2,(47)$; e) $0,2(34)$; f) $1,(213)$.
6. Jaka jest 69. cyfra za przecinkiem w rozwinięciu dziesiętnym liczby $\frac{12}{99}$?
7. Podaj 2002. cyfrę rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{22}{7}$.

6. Uporządkowanie zbioru liczb rzeczywistych

Każde dwie liczby rzeczywiste możemy ze sobą porównać pod względem ich wielkości, to znaczy dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi dokładnie jedna z trzech relacji:

$$a = b,\ a < b,\ a > b.$$

Piszemy $a = b$, gdy a i b oznaczają tę samą liczbę. Na przykład $1 = \frac{2}{2}$; $3 = \frac{18}{6}$; $-\frac{3}{5} = -0,6$.

Gdy a oznacza liczbę mniejszą niż b, to piszemy $a < b$, gdy zaś większą, to $a > b$. Na przykład $2 < 4$; $-1,5 < -1,25$; $1,12 > 1,11$.

Relacja **równości liczb** ma własności:

1. Dla każdej liczby rzeczywistej a
$$(a = a) \qquad \text{(zwrotność).}$$
2. Dla każdych liczb rzeczywistych a i b
$$(a = b \Rightarrow b = a) \qquad \text{(symetryczność).}$$

3. Dla każdych trzech liczb rzeczywistych a, b, c

$$(a = b \wedge b = c) \Rightarrow a = c \qquad \text{(przechodniość).}$$

A oto podstawowe własności relacji nierówności:
1. Jeśli $a < b$ i $b < c$, to $a < c$ (przechodniość).
2. Jeśli $a < b$, to nie zachodzi $b < a$ (antysymetria).
3. Dla żadnej liczby rzeczywistej a nie zachodzi $a < a$ (przeciwzwrotność).
4. Dla każdych dwóch różnych liczb rzeczywistych a i b mamy: albo $a < b$, albo $a > b$ (spójność).

Sformułujmy jeszcze inne równie ważne prawa mówiące o własnościach nierówności:
5. Jeśli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a < b$, to
$$a + c < b + c \text{ i } a - c < b - c.$$
Inaczej mówiąc, do obu stron nierówności można dodać tę samą liczbę i od obu stron można odjąć tę samą liczbę.
6. Jeżeli a, b, c są dowolnymi liczbami rzeczywistymi oraz $a < b$, to
$$a \cdot c < b \cdot c \text{ i } \frac{a}{c} < \frac{b}{c}, \text{ gdy } c > 0,$$
$$a \cdot c > b \cdot c \text{ i } \frac{a}{c} > \frac{b}{c}, \text{ gdy } c < 0,$$
to znaczy, że wolno obie strony nierówności pomnożyć (podzielić) przez tę samą liczbę dodatnią lub ujemną, przy czym gdy mnożymy (dzielimy) obie strony nierówności przez liczbę ujemną, to zwrot nierówności zmieniamy na przeciwny.

Przykłady:
1. $\frac{1}{3}x < 2 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{3}x < 3 \cdot 2$, czyli $x < 6$;
2. $-2x > 6 \Rightarrow \frac{-2x}{-2} < \frac{6}{-2}$, czyli $x < -3$.

Aby porównać ze sobą dowolne dwie liczby rzeczywiste, wystarczy zbadać ich różnicę, bowiem
$$a = b \Leftrightarrow a - b = 0; \quad a < b \Leftrightarrow a - b < 0; \quad a > b \Leftrightarrow a - b > 0.$$
Nierówności $a > b$ i $c > d$ mają ten sam zwrot, podobnie jak nierówności $a < b$ i $c < d$. Nierówności $a > b$ i $c < d$ lub $a < b$ i $c > d$ mają zwroty przeciwne.

Nierówności $a > b$ oraz $a < b$ nazywamy ostrymi.

Nierówności $a \geqslant b$ oraz $a \leqslant b$ nazywamy nieostrymi. Nierówność $a \geqslant b$ oznacza alternatywę: $a > b$ lub $a = b$. Nierówność $a \geqslant b$ czytamy: „a jest nie mniejsze od b”, zaś nierówność $a \leqslant b$ – „a jest nie większe od b”.

Ponadto odnotujmy, że
$$\sim (a > b) \Leftrightarrow a \leqslant b; \quad \sim (a \geqslant b) \Leftrightarrow a < b.$$
Układ nierówności o tym samym zwrocie $a < b$ i $b < c$ zapisujemy w postaci $a < b < c$. Jest więc
$$a < b < c \Leftrightarrow a < b \wedge b < c.$$
Podobnie
$$a > b > c \Leftrightarrow a > b \wedge b > c; \quad a \leqslant b \leqslant c \Leftrightarrow a \geqslant b \wedge b \geqslant c.$$

Pytania i zadania

1. Jakie znasz podstawowe własności relacji równości i relacji nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych?
2. Podaj przykłady nierówności o tym samym zwrocie i nierówności o zwrocie przeciwnym.
3. Zbadaj, która z liczb jest większa:
   a) 2 czy $3\sqrt{\frac{1}{2}}$; b) $3+2\sqrt{5}$ czy $5+3\sqrt{2}$; c) $-\frac{1}{10}$ czy $-\frac{1}{100}$; d) $\frac{22}{7}$ czy 3,1429.
4. Wykaż, że jeżeli $a<b$ i $c<d$, to $a+c<b+d$.
5. Rozstrzygnij, czy dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, jeśli $a<b$ i $c<d$, to $a-c<b-d$.
6. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c, d są dodatnie oraz $a<b$ i $c<d$, to $ac<bd$.
7. Wykaż, że jeżeli liczby a, b, c, d są ujemne oraz $a<b$ i $c<d$, to $ac>bd$.
8. Wykaż, że:
   a) $\left(a\cdot b>0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}>0\right)$ i $\left(a\cdot b<0 \Leftrightarrow \dfrac{a}{b}<0\right)$;
   b) $\left(a^2<b^2 \text{ i } a\cdot b>0\right) \Leftrightarrow \left(0<a<b \text{ lub } b<a<0\right)$.

9*. Liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności $a+b<c+d$, $b+c<d+e$, $c+d<e+a$, $d+e<a+b$. Która z liczb a, b, c, d jest najmniejsza, a która największa?

10*. Udowodnij, że jeżeli liczby rzeczywiste a, b, c, d spełniają nierówności $a+b+c\leqslant 3d$, $b+c+d\leqslant 3a$, $c+d+a\leqslant 3b$, $d+a+b\leqslant 3c$, to są równe.

7. Dowodzenie nierówności

W poprzednim podrozdziale przypomnieliśmy sobie szereg elementarnych własności relacji nierówności w zbiorze liczb rzeczywistych. Niektóre z nich zawarte są w podanych na końcu zadaniach (zob. zadania 4, 6, 7 i 8).

Wiemy zatem, że nierówności o tym samym zwrocie wolno dodawać stronami, ale **nie wolno odejmować!** Przykładowo, prawdziwe są nierówności $8<10$ i $2<7$, ale nie jest prawdziwa nierówność $8-2<10-7$, to jest nierówność $6<3$.

Wiadomo też, że można mnożyć stronami nierówności o zgodnym zwrocie między liczbami tego samego znaku, przy czym jeśli $0<a<b$ i $0<c<d$, to $ac<bd$, natomiast gdy $a<b<0$ i $c<d<0$, to $ac>bd$.

Nie wolno mnożyć nierówności o tym samym zwrocie między liczbami przeciwnych znaków, to znaczy nieprawdą jest, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d, jeśli $a<0<b$ i $(0<c<d$ lub $c<0<d)$, to $ac<bd$. Na przykład, z prawdziwych nierówności $-3<4$ i $2<3$ musiałaby wtedy wynikać nierówność $-3\cdot 2>4\cdot 3$ albo z nierówności $-3<4$ i $-2<3$ – nierówność $-3\cdot(-2)>4\cdot 3$.

Nie wolno też **dzielić** nierówności stronami; nie jest prawdą, iż dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c, d jeśli $a<b$ i $c<d$, to $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$, gdyż na przykład z nierówności $6<15$ i $2<5$ (oczywiście prawdziwych!) musiałaby wynikać nierówność $\frac{6}{2}<\frac{15}{5}$, która, jak widzimy, nie zachodzi.

Obecnie zajmiemy się dowodzeniem rozmaitych nierówności z zastosowaniem zarówno poznanych własności, jak też innych oczywistych faktów. Przejdźmy zatem od razu do rzeczy.

Przykład 1. Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$a^2+b^2 \geqslant 2ab,$$

oraz rozstrzygnij, kiedy $a^2+b^2=2ab$.

Rozwiązanie:

□ Zauważ, że $a^2+b^2-2ab=(a-b)^2 \geqslant 0$, gdyż kwadrat każdej liczby rzeczywistej jest nieujemny. Stąd $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$ i ostatecznie $a^2+b^2 \geqslant 2ab$.

Ponadto widzimy, że

$$a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab=0 \Leftrightarrow (a-b)^2=0 \Leftrightarrow a-b=0 \Leftrightarrow a=b.$$ □

Przykład 2. Udowodnij, że jeżeli $a \cdot b>0$, to $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$, przy czym $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Rozwiązanie:

□ Wiemy, że dla każdych liczb a i b prawdziwa jest nierówność $a^2+b^2 \geqslant 2ab$. Po podzieleniu obu jej stron przez $ab>0$ otrzymujemy nierówność $\frac{a^2+b^2}{ab} \geqslant \frac{2ab}{ab}$, czyli nierówność $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$. Ponadto widzimy, że $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2 \Leftrightarrow a^2+b^2=2ab \Leftrightarrow a=b$. □

Przykład 3. Wykaż, że dla każdych trzech liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi nierówność $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$.

Rozwiązanie:

□ Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c zachodzą nierówności $a^2+b^2 \geqslant 2ab$,

$b^2+c^2 \geqslant 2bc$, $c^2+a^2 \geqslant 2$, które dodane do siebie stronami dają nierówność

$a^2+b^2+b^2+c^2+c^2+a^2 \geqslant 2ab+2bc+2ca$, czyli nierówność

$$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geqslant 2(ab+bc+ca).$$

Stąd po podzieleniu obu jej stron przez 2 otrzymujemy żądaną nierówność. □

Przykład 4. Udowodnij, że jeżeli $a \geqslant b$ i $c \geqslant d$, to $ac+bd \geqslant ad+bc$.

Rozwiązanie:

□ Wykażemy, że $ac+bd-ad-bc \geqslant 0$.

Istotnie,

$$ac+bd-ad-bc=(ac-ad)-(bc-bd)=a(c-d)-b(c-d)=(a-b)(c-d) \geqslant 0,$$

gdyż z założenia $a-b \geqslant 0$ i $c-d \geqslant 0$. □

Przykład 5. Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych a i b zachodzi nierówność

$$\left(a^2-b^2\right)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2.$$

Rozwiązanie:

□ Przeprowadźmy najpierw analizę tej nierówności. Będziemy przekształcać tę nierówność, otrzymując kolejno nierówności jej równoważne. Mamy:

$\left(a^2-b^2\right)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$ (korzystamy ze wzoru na różnicę kwadratów)

$\Updownarrow$

$((a-b)(a+b))^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$ (potęgujemy iloczyn)

$\Updownarrow$

$(a-b)^2(a+b)^2 \geqslant 4ab(a-b)^2$ (przenosimy wszystko na lewą stronę)

$\Updownarrow$

$(a-b)^2(a+b)^2 - 4ab(a-b)^2 \geqslant 0$ (wyłączmy wspólny czynnik $(a-b)^2$ przed nawias)

$\Updownarrow$

$(a-b)^2\left((a+b)^2 - 4ab\right) \geqslant 0$ (korzystamy ze wzoru na kwadrat sumy dwóch wyrażeń)

$\Updownarrow$

$(a-b)^2(a^2 - 2ab + b^2) \geqslant 0$ (korzystamy ze wzoru na kwadrat różnicy dwóch wyrażeń)

$\Updownarrow$

$(a-b)^2(a-b)^2 \geqslant 0$

$\Updownarrow$

$(a-b)^4 \geqslant 0.$

Ponieważ ta ostatnia nierówność jest oczywiście prawdziwa, więc również wszystkie kolejno ją poprzedzające nierówności są prawdziwe. Stąd wnioskujemy, że zachodzi także wyjściowa nierówność. ▢

Przykład 6. Udowodnij, że jeżeli $m > -1$, to $m + \dfrac{4}{m^2} \geqslant 3.$

Rozwiązanie:

▢ Podobnie jak w poprzednim przykładzie, będziemy daną nierówność przekształcać, otrzymując nierówności równoważne.

Mamy:

$m + \dfrac{4}{m^2} \geqslant 3$ (mnożymy obie strony przez m^2)

$\Updownarrow$

$m^3 + 4 \geqslant 3m^2$ (dodajemy do obu stron $-3m^2$)

$\Updownarrow$

$m^3 - 3m^2 + 4 \geqslant 0$ (rozkładamy $-3m^2$ na $m^2 - 4m^2$)

$\Updownarrow$

$m^3 + m^2 - 4m^2 + 4 \geqslant 0$ (grupujemy wyrazy w pary)

$\Updownarrow$

$(m^3 + m^2) - 4(m^2 - 1) \geqslant 0$ (rozkładamy na czynniki)

$\Updownarrow$

$m^2(m+1)-4(m+1)(m-1) \geqslant 0$ (wyłączamy wspólny czynnik przed nawias)

$\Updownarrow$

$(m+1)\left(m^2-4(m-1)\right) \geqslant 0$

$\Updownarrow$

$(m+1)\left(m^2-4m+4\right) \geqslant 0$ (zwijamy w kwadrat)

$\Updownarrow$

$(m+1)(m-2)^2 \geqslant 0.$

Widzimy więc, że ostatnia nierówność jest prawdziwa, gdyż $m+1>0$ (z założenia) oraz $(m-2)^2 \geqslant 0$. Wychodząc z niej, otrzymujemy prawdziwość wszystkich kolejno ją poprzedzających nierówności, a zatem i nierówności zadania. ▢

Przykład 7. Wykaż, że jeżeli $a+b>0$, to $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$.
Rozwiązanie:
I sposób:
Wiadomo, że $(a-b)^2 \geqslant 0$, czyli że $a^2+b^2-2ab \geqslant 0$ i wreszcie $a^2-ab+b^2 \geqslant ab$.
Mnożąc obie strony ostatniej nierówności przez $a+b$, otrzymujemy nierówność
$(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right) \geqslant ab(a+b)$, gdyż $a+b>0$.

Stąd $a^3+b^3 \geqslant a^2b+ab^2$, na mocy wzoru na sumę sześcianów.
II sposób:
Wykażemy, że $a^3+b^3-a^2b-ab^2 \geqslant 0$.

Mamy $a^3+b^3-a^2b-ab^2=\left(a^3-a^2b\right)-\left(ab^2-b^3\right)=$

$=a^2(a-b)-b^2(a-b)=(a-b)\left(a^2-b^2\right)=(a-b)(a-b)(a+b)=$

$=(a-b)^2(a+b) \geqslant 0,$

gdyż $(a-b)^2 \geqslant 0$ i $a+b>0$ (z założenia).

Przykład 8. Udowodnij, że jeżeli $a+b>0$, to $\dfrac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^3$.
Rozwiązanie:
▢ Będziemy tę nierówność przekształcać równoważnie. Otóż

$$\frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^3 \Leftrightarrow \frac{a^3+b^3}{2} \geqslant \frac{a^3+3a^2b+3ab^2+b^3}{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\left(a^3+b^3\right) \geqslant a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \Leftrightarrow 3\left(a^3+b^3\right) \geqslant 3ab(a+b) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3+b^3 \geqslant ab(a+b).$$

A ta jest prawdziwa, o czym mieliśmy okazję przekonać się przed chwilą. Także wszystkie poprzedzające ją kolejno nierówności są prawdziwe. ▢

Pytania i zadania

1. Udowodnij, że jeżeli $a \cdot b < 0$, to $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a} \leqslant -2$.
2. Wykaż, że:

   a) $\left(a^2 - b^2\right)^2 \geqslant (a-b)^4$, jeśli $a \cdot b \geqslant 0$; b) $\left(a^2 - b^2\right)^2 \leqslant (a-b)^4$, jeśli $a \cdot b \leqslant 0$.

3. Wykaż, że jeżeli liczby a i b są dodatnie, to:

   a) $\dfrac{a+b}{2} \geqslant \dfrac{2}{\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}}$;

   b) $a + b \leqslant \dfrac{a}{b^2} + \dfrac{b}{a^2}$.

4*. Udowodnij, że dla dowolnych liczb nieujemnych a i b zachodzą nierówności:

   a) $2a^4 + 2b^4 \geqslant ab(a+b)^2$;

   b) $a^3(b+1) + b^3(a+1) \geqslant a^2\left(b+b^2\right) + b^2\left(a+a^2\right)$.

5*. Udowodnij, że jeżeli $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, to $ab(a+b) + bc(b+c) + ca(c+a) \geqslant 6abc$.

6*. Jaś ma wagę dwuramienną, której ramiona nie są równe. Chcąc odważyć 2 kg cukru, postępuje tak: kładzie ciężarek 1 kg na lewej szalce, a na prawą sypie cukier aż do zrównoważenia; następnie opróżniwszy obie szalki, kładzie ciężarek 1 kg na prawej szalce, a na lewą sypie cukier aż do zrównoważenia. Czy Jaś odważył w ten sposób mniej niż 2 kg, więcej niż 2 kg, czy też dokładnie 2 kg cukru?

8. Średnie liczb i zależności między nimi

Średnią arytmetyczną *n* liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

Na przykład średnią arytmetyczną liczb $1, 2, 3, 4, 5$ jest liczba

$$A_5 = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3.$$

Średnia geometryczną *n* liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}$$

Na przykład średnią geometryczną liczb 3, 9 i 27 jest liczba

$$G_3 = \sqrt[3]{3 \cdot 9 \cdot 27} = \sqrt[3]{3^6} + 3^2 = 9.$$

Przykład

Porównajmy średnie liczb 1, 2, 3, 4, 5:

$A_5 = 3,\ G_5 = \sqrt[5]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = \sqrt[5]{120}$

Widzimy, że

$A_5 = 3 = \sqrt[5]{243} > \sqrt[5]{120} = G_5.$

Podobnie średnie liczb 3, 9 i 27:

$$A_3 = \frac{3+9+27}{3} = 13;\ G_3 = 9$$

spełniają nierówność $A_3 > G_3$.

Zależności te nie są bynajmniej przypadkowe. Udowodnimy bowiem, że zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Średnia arytmetyczna każdych n liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n \, (n \geqslant 2)$ jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, to znaczy zachodzi nierówność

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

☐ Dowód. Zastosujemy indukcję matematyczną względem n. Gdy $n = 2$, mamy

$$\frac{a_1 + a_2}{2} - \sqrt{a_1 a_2} = \frac{a_1 + a_2 - 2\sqrt{a_1 a_2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2}{2} \geqslant 0,$$

skąd $\dfrac{a_1 + a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_1 a_2}$.

Wykażemy teraz, że dla każdej liczby naturalnej n większej od 1, jeśli średnia arytmetyczna każdych n liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, to średnia arytmetyczna każdych $n+1$ liczb nieujemnych jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej. Niech zatem $a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$ będą liczbami nieujemnymi. Podstawmy

$$(*) a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = A^{n(n+1)},\ a_{n+1} = B^{n+1}.$$

Wówczas $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = A^{n+1}$, $\sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n a_{n+1}} = A^n \cdot B$ i na mocy założenia indukcyjnego oraz wzoru $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}\right)$ – otrzymujemy

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} =$$

$$= \frac{n \cdot \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} \geqslant \qquad \left(\text{bo } \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}\right)$$

$$\geqslant \frac{n \cdot \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} + a_{n+1}}{n+1} - \sqrt[n+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n \cdot a_{n+1}} = \qquad (\text{na mocy } (*))$$

$$=\frac{n\cdot A^{n+1}+B^{n+1}}{n+1}-A^n\cdot B=\frac{n\cdot A^{n+1}+B^{n+1}-(n+1)A^n\cdot B}{n+1}=$$

(sprowadzamy do wspólnego mianownika)

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(n\cdot A^{n+1}+B^{n+1}-nA^n\cdot B-A^n B\right)= \qquad \text{(grupujemy wyrazy)}$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(n\cdot A^n(A-B)-B\left(A^n-B^n\right)\right)= \qquad \text{(rozkładamy } A^n-B^n\text{)}$$

$$=\frac{1}{n+1}\cdot\left(n\cdot A^n(A-B)-B\cdot(A-B)\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}\right)\right)=$$

(wyłączamy $A-B$ przed nawias)

$$=\frac{A-B}{n+1}\cdot\left(n\cdot A^n-A^{n-1}\cdot B-A^{n-2}\cdot B^2-\ldots-A\cdot B^{n-1}-B^n\right)= \qquad \text{(grupujemy wyrazy)}$$

$$=\frac{A-B}{n+1}\cdot\left(\left(A^n-A^{n-1}\cdot B\right)+\left(A^n-A^{n-2}B^2\right)+\ldots+\left(A^n-A\cdot B^{n-1}\right)+\left(A^n-B^n\right)\right)=$$

$$=\frac{A-B}{n+1}\cdot\left(A^{n-1}(A-B)+A^{n-2}\left(A^2-B^2\right)+\ldots+A\left(A^{n-1}-B^{n-1}\right)+\left(A^n-B^n\right)\right)=$$

$$=\frac{(A-B)^2}{n+1}\cdot\left(A^{n-1}+A^{n-2}(A+B)+A^{n-3}\left(A^2+AB+B^2\right)+\ldots+\right.$$

$$\left.+\left(A^{n-1}+A^{n-2}B+\ldots+AB^{n-2}+B^{n-1}\right)\right)\geqslant 0,$$

skąd

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\geqslant\sqrt[n+1]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n a_{n+1}}.\ \square$$

Na mocy indukcji matematycznej wnioskujemy, że twierdzenie nasze jest prawdziwe dla każdej liczby naturalnej n większej od 1.

Wykazaliśmy więc, że średnia arytmetyczna liczb nieujemnych jest co najmniej równa ich średniej geometrycznej. Powstaje zatem naturalnie pytanie, kiedy te średnie są równe?

Udowodnijmy teraz kolejne twierdzenie:

Twierdzenie

Średnia arytmetyczna n liczb nieujemnych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ równa jest ich średniej geometrycznej wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1=a_2=\ldots=a_n$.

$\square$ Dowód. Jeśli $a_1=a_2=\ldots=a_n$, to

$$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = \frac{na_1}{n} = a_1 \text{ oraz } G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} = \sqrt[n]{a_1^n} = a_1$$

i rzeczywiście $A_n = G_n$.

Załóżmy teraz, że $A_n = G_n$. Wykażemy, że wówczas $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. Przypuśćmy, że któreś dwie spośród liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nie są równe. Niech na przykład $a_1 \neq a_2$. Wtedy $\sqrt{a_1} \neq \sqrt{a_2}$ oraz $\left(\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2}\right)^2 > 0$ czyli $a_1 + a_2 > 2\sqrt{a_1 a_2}$.

Wobec tego

$$A_n = \frac{(a_1 + a_2) + a_3 + \ldots + a_n}{n} > \frac{2\sqrt{a_1 a_2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} =$$

$$= \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_1 a_2} + a_3 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{\sqrt{a_1 a_2} \cdot \sqrt{a_1 a_2} \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} =$$

(na mocy poprzedniego twierdzenia)

$$= \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 \ldots a_n} = G_n,$$

skąd $A_n > G_n$, co z kolei jest sprzeczne z tym, że $A_n = G_n$. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że rzeczywiście jeśli $A_n = G_n$, to $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$. □

Zgodnie z udowodnioną nierównością, jeśli liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, to

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geqslant \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}.$$

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n} \geqslant \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}},$$

$$(*) \qquad \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Średnią harmoniczną n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Na przykład średnią harmoniczną liczb 1, 2 i 3 jest liczba $\frac{3}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{\frac{11}{6}} = \frac{18}{11}$, zaś liczb $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ – liczba $\frac{3}{1 + 2 + 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Udowodniona przed chwilą nierówność $(*)$ pozwala wyciągnąć następujący wniosek.

Wniosek. Średnia geometryczna n liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest nie mniejsza od ich średniej harmonicznej, przy czym średnie te są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Średnią kwadratową n liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazywamy liczbę

$$K_n = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}}.$$

Na przykład średnią kwadratową liczb 2, 4 i 8 jest liczba

$$\sqrt{\frac{2^2 + 4^2 + 8^2}{3}} = \sqrt{\frac{4 + 16 + 64}{3}} = \sqrt{\frac{84}{3}} = \sqrt{28} = 4\sqrt{7}.$$

Udowodnimy teraz następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Średnia kwadratowa każdych n liczb rzeczywistych jest nie mniejsza od ich średniej arytmetycznej, czyli dla każdych n liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzi nierówność

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}.$$

□ Dowód. Zachodzą nierówności

$$(a_1 - a_2)^2 \geqslant 0, (a_1 - a_3)^2 \geqslant 0, \ldots, (a_1 - a_n)^2 \geqslant 0, (a_2 - a_3)^2 \geqslant 0,$$

$$(a_2 - a_4)^2 \geqslant 0, \ldots, (a_2 - a_n)^2 \geqslant 0, \ldots, (a_{n-1} - a_n)^2 \geqslant 0,$$

czyli nierówności

$$a_1^2 + a_2^2 \geqslant 2a_1a_2, a_1^2 + a_3^2 \geqslant 2a_1a_3, \ldots, a_1^2 + a_n^2 \geqslant 0, a_2^2 + a_3^2 \geqslant 0,$$

$$a_2^2 + a_4^2 \geqslant 2a_2a_4, \ldots, a_2^2 + a_n^2 \geqslant 0, \ldots, a_{n-1}^2 + a_n^2 \geqslant 2a_{n-1}a_n,$$

które dodane do siebie stronami prowadzą do nierówności

$$(n-1)\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geqslant 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \ldots + 2a_1a_n + 2a_2a_3 + 2a_2a_4 + \ldots +$$

$$+ 2a_2a_n + \ldots + 2a_{n-1}a_n.$$

Po dodaniu do obu stron tej nierówności sumy $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2$, otrzymamy nierówność $n\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2\right) \geqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2$, która jest równoważna nierówności

$$\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n} \geqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right)^2,$$

zaś ta – nierówności

$$\sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}} \geqslant \left|\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}\right|.$$

Stąd otrzymujemy ostatecznie, że

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}, \text{ gdyż } |x| \geqslant x \text{ dla każdej liczby rzeczywistej } x. \square$$

I znowu pojawia się pytanie, kiedy średnia kwadratowa liczb rzeczywistych równa jest ich średniej arytmetycznej?

Aby otrzymać odpowiedź na to pytanie, wystarczy raz jeszcze przeanalizować przedstawiony przed chwilą dowód. Zobaczymy, że aby otrzymać równość w dowodzonej nierówności, muszą zajść równości we wszystkich nierównościach, od których zaczęliśmy, oraz musi zajść równość w nierówności $|x| \geqslant x$.

Wniosek. Średnia kwadratowa liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ równa jest ich średniej arytmetycznej wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Podsumujmy na koniec to, co otrzymaliśmy: dla dowolnych liczb dodatnich $a_1, a_2, \ldots, a_n$ zachodzą nierówności

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}} \geqslant \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geqslant \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

przy czym

$$\sqrt{\frac{a_1^2+a_2^2\ldots+a_n^2}{n}} = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}},$$

wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Pytania i zadania

1. Podaj określenie średnich liczb: arytmetycznej, geometrycznej, harmonicznej i kwadratowej.
2. Która z poznanych średnich jest największa, a która najmniejsza? Kiedy te średnie są sobie równe?
3. Oblicz wszystkie cztery średnie podanych przez siebie kilku liczb dodatnich.
4. W pewnym szpitalu przebywali tylko lekarze i pacjenci. Średnia wieku wszystkich lekarzy była różna od średniej wieku wszystkich pacjentów. Średnia obu tych liczb równała się średniej wieku wszystkich przebywających w tym szpitalu. Kogo wtedy w tym szpitalu było więcej: lekarzy, czy pacjentów?
5. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a i b

   $$\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2.$$
6. Wykaż, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c

   $$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{b}{a} \geqslant 3.$$
7. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c

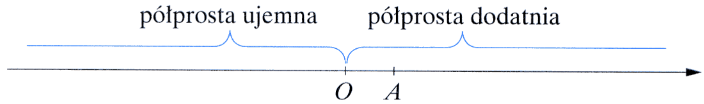
   $$ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a) \geqslant 6abc.$$

8. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc.$$

9. Oś liczbowa i przedziały liczbowe

Osią liczbową nazywamy prostą, na której:
- obrano pewien punkt 0 zwany punktem zerowym lub początkiem osi liczbowej,
- jedną z półprostych o początku w punkcie 0 nazwano półprostą dodatnią,
- ustalono jednostkę, to znaczy obrano na półprostej dodatniej taki punkt A, że długość odcinka OA jest równa 1 (ryc. 4.1).



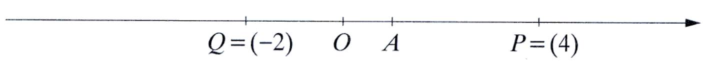
Ryc. 4.1.

Mając oś liczbową, możemy każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkować punkt P następująco:
- jeżeli $x > 0$, to P jest takim punktem półprostej dodatniej, że długość odcinka OP jest równa x;
- jeżeli $x < 0$, to P jest takim punktem półprostej ujemnej, że długość odcinka OP wynosi $-x$;
- jeżeli $x = 0$, to przyjmujemy $P = 0$.

W ten sposób każdej liczbie rzeczywistej przyporządkujemy dokładnie jeden punkt osi. Na odwrót, każdy punkt na osi liczbowej odpowiada jednej liczbie rzeczywistej.

Liczbę x, której odpowiada punkt P, nazywamy jego współrzędną i punkt ten oznaczamy przez (x) lub po prostu przez x.

Na przykład na rysunku poniżej zaznaczone są punkty $P = (4)$ i $Q = (-2)$.

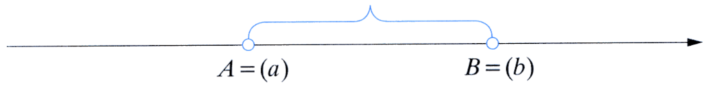


Ryc. 4.2.

Niech a i b będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $a < b$.

Przedziałem otwartym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a < x < b$, i oznaczamy go przez $(a; b)$.

Na osi liczbowej przedziałowi otwartemu $(a; b)$ odpowiada odcinek o końcach $A = (a)$ i $B = (b)$ bez końców tego odcinka (ryc. 4.3).

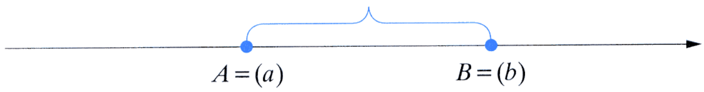


Ryc. 4.3.

Tak więc $(a;b)=\{x\in R\colon\ a<x<b\}$.

Przedziałem domkniętym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a\leqslant x\leqslant b$, i oznaczamy go przez $\langle a;b\rangle$.

Przedziałowi domkniętemu $\langle a;b\rangle$ odpowiada na osi liczbowej odcinek o końcach $A=(a)$ i $B=(b)$ (ryc. 4.4).

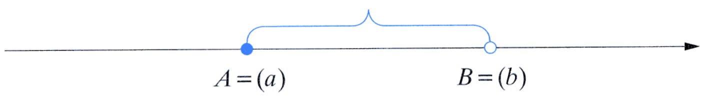


Ryc. 4.4.

Zatem $\langle a;b\rangle=\{x\in R\colon\ a\leqslant x\leqslant b\}$.

Przedziałem lewostronnie domkniętym o końcach a i b nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych x takich, że $a\leqslant x<b$, i oznaczamy go przez $\langle a;b)$.

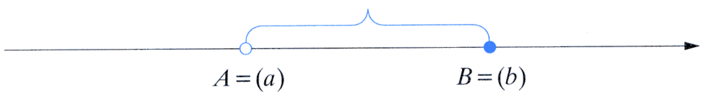
Przedziałowi temu odpowiada na osi liczbowej odcinek o końcach $A=(a)$ i $B=(b)$ bez punktu $B=(b)$ (ryc. 4.5).



Ryc. 4.5.

Tak więc $\langle a;b)=\{x\in R\colon\ a\leqslant x<b\}$.

Podobnie określamy **przedział prawostronnie domknięty** $(a;b\rangle$ o końcach a i b (ryc. 4.6), jako $\{x\in R\colon\ a<x\leqslant b\}$.

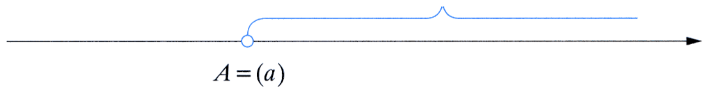


Ryc. 4.6.

Przedziałem otwartym nieograniczonym z prawej strony o końcu a nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych większych od a i oznaczamy go przez $(a;+\infty)$.

Zatem $(a;+\infty)=\{x\in R\colon\ x>a\}$.

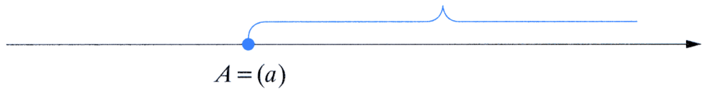
Przedziałowi temu odpowiada na osi liczbowej półprosta o początku w punkcie $A=(a)$, bez tego punktu (ryc. 4.7).



Ryc. 4.7.

Przedziałem domkniętym nieograniczonym z prawej strony o końcu a nazywamy zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie mniejszych od a i oznaczamy go przez $\langle a; +\infty)$ (ryc. 4.8).

Tak więc $\langle a; +\infty) = \{x \in R : x \geqslant a\}$.



Ryc. 4.8.

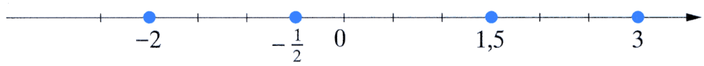
Przedział ten na osi liczbowej jest półprostą o początku w punkcie $A = (a)$ i zwrocie zgodnym ze zwrotem półprostej dodatniej osi.

Analogicznie określamy przedziały nieograniczone z lewej strony o końcu a:

- otwarty: $(-\infty; a) = \{x \in R:\ x < a\}$;
- domknięty: $(-\infty; a\rangle = \{x \in R:\ x \leqslant a\}$.

Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych odpowiada przedziałowi nieograniczonemu z obu stron $(-\infty; +\infty)$.

Przykład 1. Zaznacz na osi liczbowej punkty: -2; $\frac{1}{2}$; 1,5; 3.
Rozwiązanie:

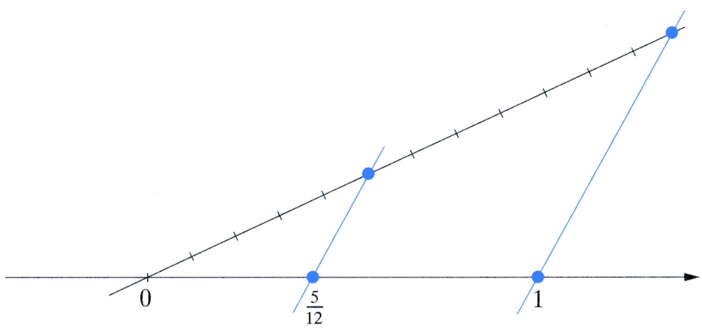


Ryc. 4.9.

Przykład 2. Zaznacz na osi liczbowej konstrukcyjnie punkty: $\frac{5}{12}$, $-\frac{4}{7}$.
Rozwiązanie:

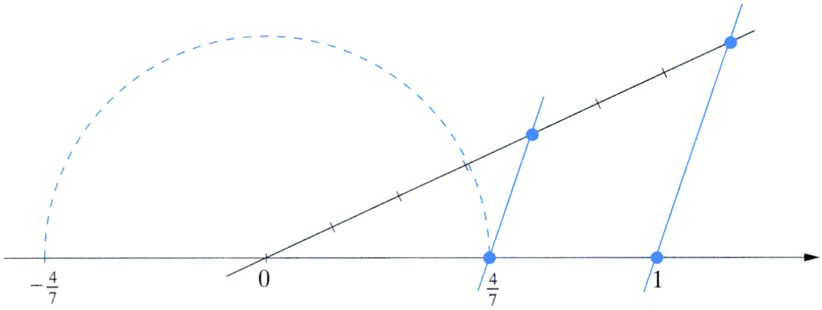
Konstrukcje tych punktów otrzymujemy, opierając się na twierdzeniu Talesa.

Konstrukcja punktu $\frac{5}{12}$:



Ryc. 4.10.

Konstrukcja punktu $\frac{4}{7}$, a następnie punktu $-\frac{4}{7}$:

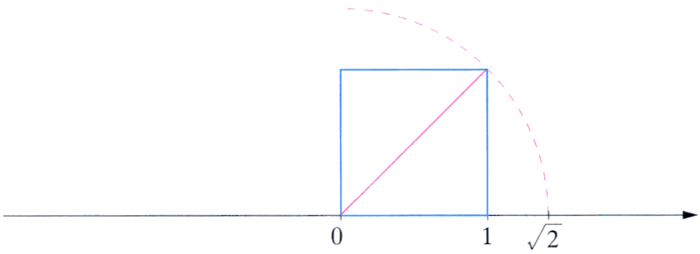


Ryc. 4.11.

Przykład 3. Zaznacz na osi liczbowej konstrukcyjnie punkty: $\sqrt{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$.
Rozwiązanie:

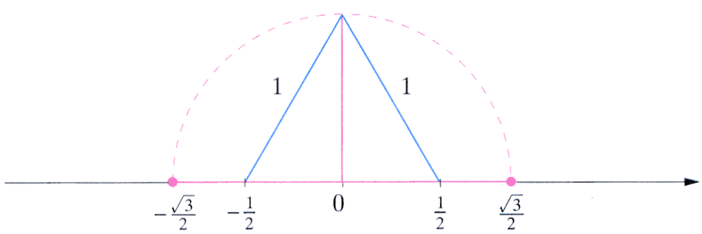
Konstrukcje tych punktów otrzymujemy, opierając się na twierdzeniu Pitagorasa.

Konstrukcja punktu $\sqrt{2}$:



Ryc. 4.12.

Konstrukcja punktu $\frac{\sqrt{3}}{2}$, a następnie punktu $-\frac{\sqrt{3}}{2}$:

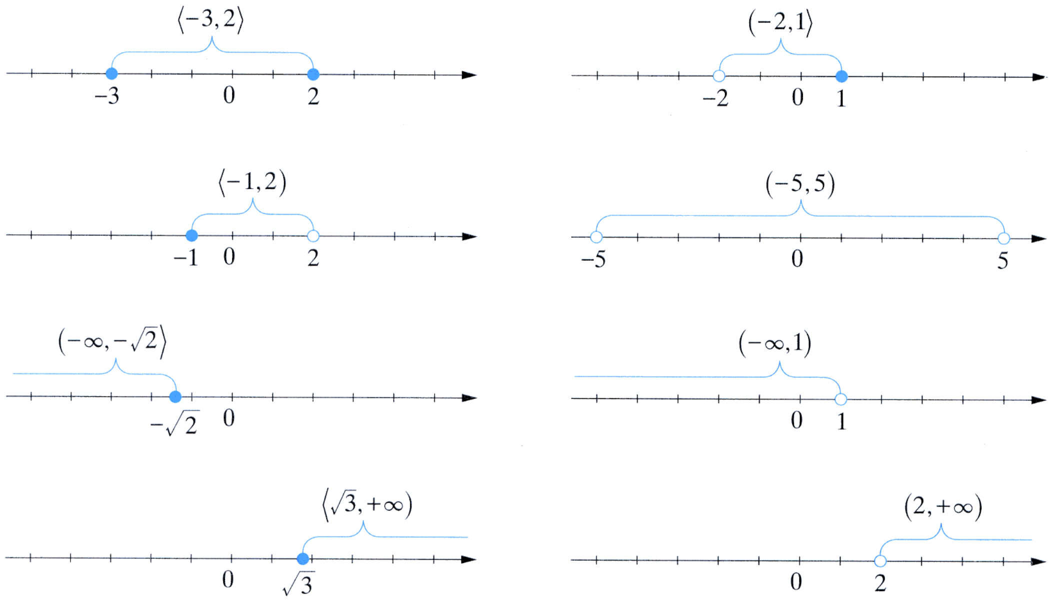


Ryc. 4.13.

Przykład 4. Zaznacz na osi liczbowej przedziały:

$$\langle -3;2\rangle;\ (-2;1\rangle;\ \langle -1;2);\ (-5;-5);\ \left(-\infty;-\sqrt{2}\right\rangle;\ (-\infty;1);\ \left\langle\sqrt{3};+\infty\right);\ (2;+\infty).$$

Rozwiązanie:

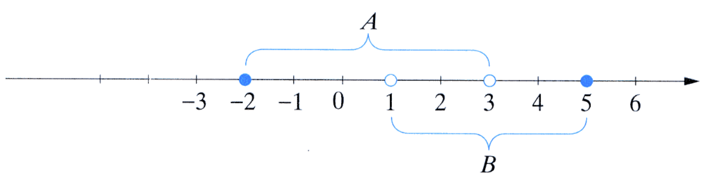


Ryc. 4.14.

Przykład 5. Dane są przedziały: $A = \langle -2;3)$ i $B = (1;5\rangle$. Wyznacz: $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, A', B'.

Rozwiązanie:

Ilustrujemy te zbiory na osi liczbowej i na tej podstawie otrzymujemy rozwiązanie:



Ryc. 4.15.

$A \cap B = (1;3)$; $A \cup B = \langle -2;5\rangle$; $A \setminus B = \langle -2;1\rangle$,

$A' = (-\infty;2) \cup \langle 3;+\infty)$; $B' = (-\infty;1\rangle \cup (5;+\infty)$.

Pytania i zadania

1. Zaznacz na osi liczbowej punkty: $-2{,}5$; 0; $0{,}4$; 2; $3\frac{1}{2}$.
2. Skonstruuj na osi liczbowej punkty: $\frac{3}{5}$, $-\frac{5}{8}$, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{5}$,
3. Wyznacz: $(-3;2)\cap C$, $\langle 6;12\rangle\cap N$, $\langle -1;9)\cap N$.
4. Zaznacz na osi liczbowej przedziały:

   $\langle -4;3\rangle$, $(-2;3)$, $\left\langle -7\frac{1}{2};3\frac{1}{2}\right\rangle$, $(-\sqrt{3};\sqrt{2}\rangle$, $(-\infty;\sqrt{5}\rangle$, $\langle\sqrt{2};+\infty)$.
5. Zaznacz na osi liczbowej zbiory:

   $\langle 0;2\rangle\cap\langle 1;4\rangle$, $(-\infty;1)\cap\langle 0;2\rangle$, $\langle -\sqrt{2};+\infty)\cap(-\infty;\sqrt{3}\rangle$, $(-\infty;1)\cap(-2;+\infty)$,

   $(-2;-1)\cup\langle -1;0)$, $\langle 1;4\rangle\setminus(2;3\rangle$, $\langle -2;2\rangle\setminus(-2;2)$, $\langle 0;1)\setminus(0;1\rangle$.
6. Dane są przedziały: $A=\langle -5;5\rangle$, $B=(-7;2\rangle$. Wyznacz:

   $A\cap B$, $A'\cap B'$, $A\cup B$, $A'\cup B'$, $A\setminus B$, $B\setminus A$, $A'\setminus B$, $A\setminus B'$, $B'\setminus A$, $B'\setminus A'$.
7. Jakie warunki muszą spełniać liczby a, b, c, d, aby:

   a) suma $(a;b)\cup(c;d)$ była przedziałem, b) $(a;b)\subset(c;d)$?
8. Niech $a<b$. Czy $\frac{a+b}{2}\in(a;b)$?
9. Niech a i b będą liczbami wymiernymi, przy czym $a<b$. Czy przedział $(a;b)$ zawiera liczbę wymierną?

10. Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej

Niech x będzie dowolną liczbą rzeczywistą.

Wartością bezwzględną liczby x jest:
– ta sama liczba x, gdy $x\geqslant 0$,
– liczba $-x$ (przeciwna do x), gdy $x<0$.

Wartość bezwzględną liczby x oznaczamy symbolem $|x|$. Tak więc

$$|x|=\begin{cases} x, & \text{gdy } x\geqslant 0,\\ -x, & \text{gdy } x<0.\end{cases}$$

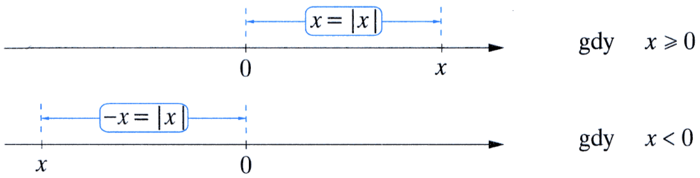
Na przykład: $|2|=2$; $\left|-\frac{3}{2}\right|=-\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$; $|0|=0$.

Bezpośrednio z definicji $|x|$ wynika następujący wniosek.

Wniosek. $|x|$ jest zawsze liczbą **nieujemną**.

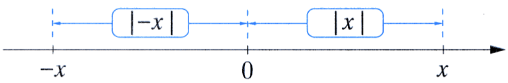
Ponadto, zgodnie z definicją pierwiastka arytmetycznego, $\sqrt{x^2}=|x|$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej interpretujemy geometrycznie jako **odległość tej liczby na osi liczbowej od zera**, bo $|x|=|x-0|$.



Ryc. 4.16.

Ponieważ liczby przeciwne x i $-x$ są położone na osi liczbowej symetrycznie względem zera,



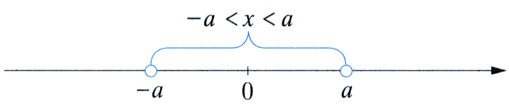
Ryc. 4.17.

stąd otrzymujemy kolejny wniosek.

Wniosek. $|-x| = |x|$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

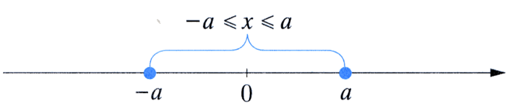
Ponadto z łatwością stwierdzamy, że jeżeli $a > 0$, to:

1. $|x| < a \Leftrightarrow x \in (-a; a)$;



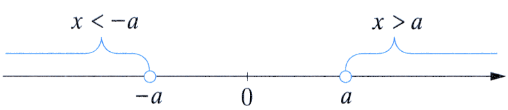
Ryc. 4.18.

2. $|x| \leqslant a \Leftrightarrow x \in \langle -a; a \rangle$;



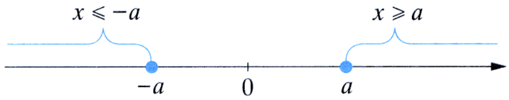
Ryc. 4.19.

3. $|x| > a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$;



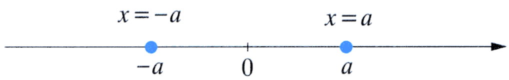
Ryc. 4.20.

4. $|x| \geqslant a \Leftrightarrow x \in (-\infty; -a\rangle \cup \langle a; +\infty)$;



Ryc. 4.21.

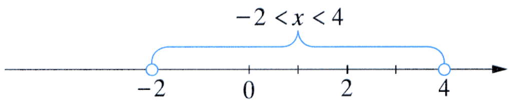
5. $|x| = a \Leftrightarrow x \in \{-a, a\}$.



Ryc. 4.22.

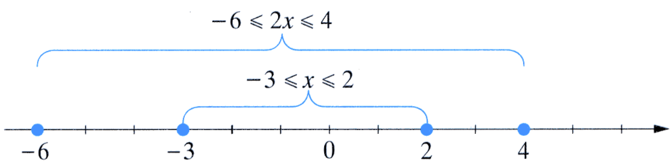
Przykłady:

1. $|x-1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x-1 < 3 \Leftrightarrow -2 < x < 4 \Leftrightarrow x \in (-2; 4)$;



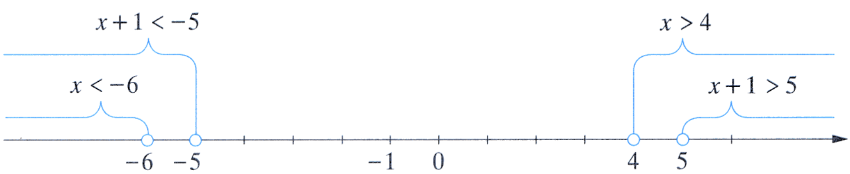
Ryc. 4.23.

2. $|2x+1| \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2x+1 \leqslant 5 \Leftrightarrow -6 \leqslant 2x \leqslant 4 \Leftrightarrow -3 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow x \in \langle -3; 2\rangle$;



Ryc. 4.24.

3. $|x+1| > 5 \Leftrightarrow x+1 < -5 \vee x+1 > 5 \Leftrightarrow x < -6 \vee x > 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$;



Ryc. 4.25.

4. $\left|-3x+1\right| \geqslant 2 \Leftrightarrow -3x+1 \leqslant -2 \vee -3x+1 \geqslant 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3x \leqslant -3 \vee -3x \geqslant 1 \Leftrightarrow x \geqslant 1 \vee x \leqslant -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty; -\frac{1}{3}\right\rangle \cup \left\langle 1; +\infty\right);$

5. $\left|\frac{1}{2}x-1\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=-1 \vee \frac{1}{2}x-1=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=0 \vee \frac{1}{2}x=2 \Leftrightarrow x=0 \vee x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \{0, 4\};$

6. $x+\sqrt{x^2}=x+|x|=\begin{cases} x+x=2x, & \text{gdy } x \geqslant 0 \\ x-x=0, & \text{gdy } x<0. \end{cases}$

Wykażemy teraz jeszcze kilka własności wartości bezwzględnej. Sformułujemy je jako twierdzenia.

Twierdzenie 1.

Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności:

1. $|x| \geqslant x;$
2. $|x| \geqslant -x.$

☐ Dowód.

1. Jeżeli $x \geqslant 0$, to $|x|=x \geqslant x$. Gdy zaś $x<0$, to $-x>0$ i wtedy $|x|=-x>0>x$. Jest więc zawsze $|x| \geqslant x$.
2. Ponieważ $|x|=|-x|$ i $|-x| \geqslant -x$, więc rzeczywiście $|x| \geqslant -x$. ☐

Twierdzenie 2.

Dla każdych liczb rzeczywistych x i y zachodzą równości:

1. $|x \cdot y|=|x| \cdot |y|;$
2. $\left|\frac{x}{y}\right|=\frac{|x|}{|y|}, \ (y \neq 0).$

☐ Dowód.

1. Jeśli $x \cdot y \geqslant 0$, to $|x \cdot y|=x \cdot y=|x| \cdot |y|$, gdy $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$,

oraz $|x \cdot y|=x \cdot y=(-x) \cdot (-y)=|x| \cdot |y|$, gdy $x<0$ i $y<0$.

Jeśli zaś $x \cdot y<0$, to $|x \cdot y|=-x \cdot y=|x| \cdot |y|$, gdy $x<0$ i $y>0$,

oraz $|x \cdot y|=-x \cdot y=x \cdot (-y)=|x| \cdot |y|$, gdy $x>0$ i $y<0$.

2. Zgodnie z 1. mamy

$$|x| = \left|\frac{x}{y} \cdot y\right| = \left|\frac{x}{y}\right| \cdot |y|, \text{ skąd } \frac{|x|}{|y|} = \left|\frac{x}{y}\right|. \square$$

Twierdzenie 3.

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą nierówności:

1. $|x+y| \leqslant |x| + |y|$ (nierówność trójkąta);
2. $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$.

$\square$ Dowód.

1. Ponieważ (zgodnie z twierdzeniem 1.)

$$-|x| \leqslant x \leqslant |x| \quad \text{i} \quad -|y| \leqslant y \leqslant |y|,$$

więc po dodaniu tych nierówności stronami otrzymujemy nierówność

$$-(|x| + |y|) \leqslant x + y \leqslant (|x| + |y|),$$

która równoważna jest nierówności

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|.$$

2. Zauważmy, że

$$\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x-y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x-y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -|x-y| \leqslant |x| - |y| \wedge |x| - |y| \leqslant |x-y| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |y| \leqslant |x| + |x-y| \wedge |x| \leqslant |x-y| + |y|.$$

Ale na mocy nierówności 1. otrzymujemy

$|y| = |x + (y-x)| \leqslant |x| + |y-x| = |x| + |-(y-x)| = |x| + |x-y|$ oraz

$|x| = |(x-y) + y| \leqslant |x-y| + |y|$. Zatem rzeczywiście $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$. $\square$

Wniosek. $|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow x \cdot y \geqslant 0$.

$\blacksquare$ Dowód: Ponieważ $|a|^2 = a^2$, więc

$$|x+y| = |x| + |y| \Leftrightarrow |x+y|^2 = (|x| + |y|)^2 \Leftrightarrow (x+y)^2 = |x|^2 + 2|x| \cdot |y| + |y|^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|x \cdot y| + y^2 \Leftrightarrow x \cdot y = |x \cdot y| \Leftrightarrow x \cdot y \geqslant 0. \blacksquare$$

Przykład. Dla jakich x zachodzi równość $|x| + 5 = |x+5|$?

Rozwiązanie:

Zgodnie z udowodnionym przed chwilą wnioskiem, otrzymujemy:

$$|x| + 5 = |x+5| \Leftrightarrow |x| + |5| = |x+5| \Leftrightarrow 5 \cdot x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, +\infty).$$

Pytania i zadania

1. Co to jest wartość bezwzględna liczby rzeczywistej?
2. Jak interpretujemy geometrycznie wartość bezwzględną?
3. Podaj podstawowe własności wartości bezwzględnej.
4. Do jakiego przedziału liczbowego należy x, jeśli:

   a) $|x-1| = x-1$; b) $|x-2| = 2-x$; c) $\sqrt{x^2-6x+9} = 3-x$; d) $x+\sqrt{x^2} = 0$.
5. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:

   a) $|x-1|+|x|+|x-2|$, gdy $0<x<1$; b) $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2}$, gdy $1<x<2$;

   c) $|x-1|+\dfrac{x}{|x|}-|x+1|$, gdy $-1<x<0$.
6. Jaki warunek spełnia $|x|$, jeśli:

   a) $x\in\langle -2;2\rangle$; b) $x\in(0;3\rangle$;

   c) $x\in(-1;1)\cup(1;+\infty)$; d) $x\in(-\infty;-5\rangle\cup\langle 5;-\infty)$?
7. Uprość wyrażenia:

   a) $\dfrac{|x-2|}{x-2}$; b) $\dfrac{(x+1)^2}{|x+1|}$; c) $\dfrac{x+\sqrt{x^2}}{2x}$.
8. Dla jakich x zachodzą równości:

   a) $|x|+2=|x+2|$; b) $|3-x|=4$;

   c) $|x|-3=|x-3|$; d) $|2x-1|=|x+2|$?
9. Udowodnij, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość

   $$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2.$$
10. Wiadomo, że $a>b>0$ oraz $a^2+b^2=6ab$.

    Wyznacz $\dfrac{a+b}{a-b}$.
11. $\max\{a,b\}$ oznacza nie mniejszą z liczb a i b, zaś $\min\{a,b\}$ – nie większą z liczb a i b. Udowodnij, że

    a) $\max\{x,-x\}=|x|$;

    b) $\max\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y+|x-y|)$;

    c) $\min\{x,y\}=\frac{1}{2}(x+y-|x-y|)$.

12*. Wykaż, że dla dowolnych różnych od zera liczb rzeczywistych a, b, c zachodzi równość

$$\left|\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}-\frac{2}{c}\right|+\frac{|b-a|}{|ab|}+\frac{b+a}{ab}+\frac{2}{c}=4\max\left\{\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}\right\}.$$

11. Równania i nierówności z wartością bezwzględną

Rozdział ten poświęcimy rozwiązywaniu równań i nierówności z wartością bezwzględną.

Przykład 1. Rozwiąż równanie: $\left|\frac{1}{2}x-1\right|=3.$
Rozwiązanie:

Ponieważ wartość bezwzględną równą 3 mają liczby −3 i 3, więc

$$\left|\frac{1}{2}x-1\right|=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x-1=-3 \vee \frac{1}{2}x-1=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=-2 \vee \frac{1}{2}x=4 \Leftrightarrow x=-4 \vee x=8.$$

Rozwiązaniami tego równania są liczby −4 i 8.

Przykład 2. Rozwiąż równanie: $|2x+3|=|7-x|.$
Rozwiązanie:

Kiedy dwie liczby mają równe wartości bezwzględne? Oczywiście wówczas, gdy są równe lub przeciwne. Zatem

$$|2x+3|=|7-x| \Leftrightarrow 2x+3=7-x \vee 2x+3=-(7-x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=4 \vee 2x+3=x-7 \Leftrightarrow x=\frac{4}{3} \vee x=-10.$$

Rozwiązaniami danego równania są więc liczby −10 i $\frac{4}{3}$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie: $||3x-2|-1|=2.$
Rozwiązanie:

Rozumując, jak w przykładzie 1., otrzymujemy:

$$||3x-2|-1|=2 \Leftrightarrow |3x-2|-1=-2 \vee |3x-2|-1=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |3x-2|=-1 \vee |3x-2|=3 \Leftrightarrow |3x-2|=3$$

(jako, że pierwsze równanie jest sprzeczne, bowiem $|3x-2|\geqslant 0$),

$$\Leftrightarrow 3x-2=-3 \vee 3x-2=3 \Leftrightarrow 3x=-1 \vee 3x=5 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3} \vee x=\frac{5}{3}.$$

Zatem rozwiązaniami tego równania są liczby $-\frac{1}{3}$ i $\frac{5}{3}$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie: $|x-3|+|x+4|=9.$
Rozwiązanie:

Musimy najpierw przedstawić w najprostszej postaci wyrażenie

$|x-3|+|x+4|.$

W tym celu badamy znak każdego z wyrażeń $x+4$ i $x-3$ w przedziałach: $(-\infty;-4)$, $\langle -4;3)$ i $\langle 3;+\infty)$. Na przedziały te rozbiły oś liczbową miejsca zerowe tych wyrażeń, to jest liczby −4 i 3. Ponieważ

$$|x+4|+|x-3|=\begin{cases} -x-4-x+3=-2x-1, & \text{gdy } x<-4, \\ x+4-x+3=7, & \text{gdy } -4\leqslant x<3, \\ x+4+x-3=2x+1, & \text{gdy } x\geqslant 3, \end{cases}$$

więc

$$|x-3|+|x-4|=9 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (-2x-1=9 \wedge x<-4) \vee (2x+1=9 \wedge x \geqslant 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x=10 \wedge x<-4) \vee (2x=8 \wedge x \geqslant 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=-5 \vee x=4.$

Rozwiązaniami tego równania są liczby -5 i 4.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $2|x+6|-|x|+|x-6|=18.$
Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, należy najpierw przedstawić w najprostszej postaci lewą stronę równania. Rozważając ją w każdym z przedziałów:

$(-\infty;-6)$, $\langle -6;0)$, $\langle 0;6)$ i $\langle 6;+\infty)$, otrzymujemy

$$2|x+6|-|x|+|x-6|=\begin{cases} -2(x+6)+x-x+6=-2x-6, & \text{gdy } x<-6, \\ 2(x+6)+x-x+6=2x+18, & \text{gdy } -6 \leqslant x<0, \\ 2(x+6)-x-x+6=18, & \text{gdy } 0 \leqslant x<6, \\ 2(x+6)-x+x-6=2x+6, & \text{gdy } x \geqslant 6. \end{cases}$$

Stąd $2|x+6|-|x|+|x-6|=18 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x-6=18 \wedge x<-6) \vee (2x+18=18 \wedge -6 \leqslant x<0) \vee (18=18 \wedge 0 \leqslant x<6) \vee$

$\vee (2x+6=18 \wedge x \geqslant 6) \Leftrightarrow x \in \{-12\} \cup \langle 0;6 \rangle.$

Zatem zbiorem rozwiązań danego równania jest $\{-12\} \cup \langle 0;6 \rangle$.

Przykład 6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4y-4. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Dany układ równań jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4(y-1), \end{cases}$$

(podstawiamy w pierwszym równaniu $4(y-1)$ w miejsce $|x+1|$, oraz zamiast $|y-1|$ piszemy $(y-1)$, co wynika z drugiego równania układu)

$$\begin{cases} 4(y-1)+(y-1)=5 \\ |x+1|=4(y-1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5(y-1)=5 \\ |x+1|=4(y-1), \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+1|=4 \\ y-1=1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x+1| = 4 \\ y = 2. \end{cases}$$

A ponieważ

$$|x+1| = 4 \Leftrightarrow x+1 = -4 \vee x+1 = 4 \Leftrightarrow x = -5 \vee x = 3,$$

więc

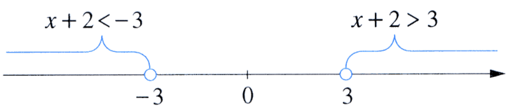
$$\begin{cases} |x+1| = 4 \\ y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 \\ y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2. \end{cases}$$

Rozwiązaniami tego układu równań są pary $(-5, 2)$ i $(3, 2)$.

Przykład 7. Rozwiąż nierówność $|x+2| > 3$.
Rozwiązanie:

Korzystając z interpretacji geometrycznej wartości bezwzględnej, otrzymujemy

$$|x+2| > 3 \Leftrightarrow x+2 < -3 \vee x+2 > 3 \Leftrightarrow x < -5 \vee x > 1 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -5) \cup (1; +\infty).$$



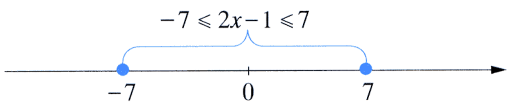
Ryc. 4.26.

Wobec tego zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $(-\infty; -5) \cup (1; +\infty)$.

Przykład 8. Rozwiąż nierówność $|2x-1| \leqslant 7$.
Rozwiązanie:

Rozwiązać tę nierówność oznacza geometrycznie znaleźć takie liczby x, dla których odległość liczby $2x-1$ na osi liczbowej od zera nie przekracza 7.

Wobec tego



Ryc. 4.27.

Stąd

$$|2x-1| \leqslant 7 \Leftrightarrow 2x-1 \geqslant -7 \wedge 2x-1 \leqslant 7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x \geqslant -6 \wedge 2x \leqslant 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geqslant -3 \wedge x \leqslant 4 \Leftrightarrow x \in \langle -3; 4 \rangle.$$

Zatem zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $\langle -3; 4 \rangle$.

Przykład 9. Rozwiąż nierówność $|x-1| + |x-5| > 8$.

Rozwiązanie:

Najpierw należy przedstawić w najprostszej postaci wyrażenie $|x-1|+|x-5|$. Miejsca zerowe wyrażeń $x-1$ i $x-5$, to jest liczby 1 i 5, rozbijają oś liczbową na przedziały: $(-\infty;1)$, $\langle 1;5)$ i $\langle 5;+\infty)$.

Badając znak każdego z wyrażeń $x-1$ i $x-5$ w tych przedziałach, otrzymujemy

$$|x-1|+|x-5|=\begin{cases}-x+1-x+5=-2x+6, & \text{gdy } x<1,\\ x-1-x+5=4, & \text{gdy } 1\leqslant x<5,\\ x-1+x-5=2x-6, & \text{gdy } x\geqslant 5.\end{cases}$$

Stąd widzimy, że

$|x-1|+|x-5|>8 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-2x+6>8 \wedge x<1) \vee (2x-6>8 \wedge x>5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x<-2 \wedge x<1) \vee (2x>14 \wedge x>5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x<-1 \wedge x<1) \vee (x>7 \wedge x>5) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x<-1 \vee x>7 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$.

Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $(-\infty;-1)\cup(7;+\infty)$.

Przykład 10. Rozwiąż nierówność $|x+2|-|x-1|+|x-3|<4$.

Rozwiązanie:

I znowu, najpierw uprośćmy lewą stronę danej nierówności, rozważając przedziały $(-\infty;-2)$, $\langle -2;1)$, $\langle 1;3)$, $\langle 3;+\infty)$. Otrzymujemy:

$$|x+2|-|x-1|+|x-3|=\begin{cases}-x-2+x-1-x+3=-x, & \text{gdy } x<-2,\\ x+2+x-1-x+3=x+4, & \text{gdy } -2\leqslant x<1,\\ x+2-x+1-x+3=-x+6, & \text{gdy } 1\leqslant x<3,\\ x+2-x+1+x-3=x, & \text{gdy } x\geqslant 3.\end{cases}$$

Stąd

$|x+2|-|x-1|+|x-3|<4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-x<4 \wedge x<-2) \vee$

$\vee (x+4<4 \wedge -2\leqslant x<1) \vee (-x+6<4 \wedge 1\leqslant x<3) \vee (x<4 \wedge x\geqslant 3) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4<x<-2 \vee -2\leqslant x<0 \vee 2<x<3 \vee 3\leqslant x<4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -4<x<0 \vee 2<x<4$.

Zatem

$|x+2|-|x-1|+|x-3|<4 \Leftrightarrow x\in(-4;0)\cup(2;4)$.

Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $(-4;0)\cup(2;4)$.

Pytania i zadania

1. Rozwiąż równania:

   a) $|x-3|=2$; b) $|x+2|-3=0$; c) $||x-4|-2|=3$;

   d) $|5-|6-x||=1$; e) $|2x-3|=|4-x|$; f) $|x+3|+|x-4|=9$;

   g) $|x|+|x-1|=x+|x-3|$; h) $||x+3|-|x-1||=6$.

2. Znajdź wszystkie liczby całkowite x spełniające równanie $3|x-1|-2x=2|3x+1|$.
3. Znajdź wszystkie pary (x,y) liczb naturalnych spełniające równanie $|x-2|+|y-3|=3-y$.
4. Rozwiąż układy równań:

   a) $\begin{cases} 3|x|+2y=1 \\ 2x-|y|=4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ |x-1|=y-5. \end{cases}$

5. Rozwiąż nierówności:

   a) $|x-5|<1$; b) $|2x-3|\geqslant 5$; c) $|2-3x|>7$;

   d) $|x-1|-|x+2|<9$; e) $2|x-3|<|x|+2$; f) $|4-x|+2|x+1|>|x|+2x+2$;

   g) $|||x-1|-1|-1|\leqslant 1$; h) $-3\leqslant \frac{|x|}{x}+\frac{|x-1|}{x-1}+\frac{|x-2|}{x-2}\leqslant 3$.

12. Błąd przybliżenia. Szacowanie wartości

Niemal każdego dnia zachodzi potrzeba wykonywania obliczeń. Często zależy nam tylko na oszacowaniu pewnych wielkości i wtedy posługujemy się przybliżeniami, popełniając dopuszczalny błąd. Przybliżamy zarówno liczby wymierne, jak i tym bardziej liczby niewymierne. Są to zazwyczaj przybliżenia dziesiętne.

Jeżeli a jest przybliżeniem liczby a_0, to różnicę $a-a_0$ nazywamy **błędem** tego **przybliżenia.**

Gdy $a-a_0<0$, to a nazywamy **przybliżeniem z niedomiarem**, gdy zaś $a-a_0>0$, to a nazywamy **przybliżeniem z nadmiarem** liczby a_0.

Przyjmijmy oznaczenie $b=a-a_0$.

Liczbę $-b$ (przeciwną do b) nazywamy **poprawką.**

Błędem bezwzględnym przybliżenia a liczby a_0 nazywamy liczbę $|b|=|a-a_0|$, zaś **błędem względnym** nazywamy liczbę $\frac{|a-a_0|}{a}$.

Przykład. Zmieniając ułamek $\frac{22}{7}$ na ułamek dziesiętny, otrzymamy
3,142857142857142857...
Możemy tutaj poprzestać na jednym z przybliżeń dziesiętnych:
3; 3,1; 3,14; 3,142; 3,1428; ...

Jeśli ułamek $\frac{22}{7}$ zastąpimy przybliżeniem dziesiętnym 3,14, to napiszemy $\frac{22}{7} \approx 3{,}14$, (znak $\approx$ czytamy: „równa się w przybliżeniu"). I wówczas popełnimy błąd:

$$b = 3{,}14 - \frac{22}{7} = \frac{7}{50} - \frac{1}{7} = \frac{49-50}{350} = -\frac{1}{350},$$

błąd bezwzględny:

$$\left|3{,}14 - \frac{22}{7}\right| = \frac{1}{350},$$

zaś błąd względny:

$$\frac{1}{350} : 3{,}14 = \frac{1}{1099}.$$

Zdarza się, że mamy liczbę dziesiętną i chcemy ją zaokrąglić, czyli pewną liczbę jej końcowych cyfr zastąpić zerami. Stosujemy wówczas następującą **regułę zaokrąglania**.

Jeżeli pierwszą z odrzuconych cyfr jest 0, 1, 2, 3 albo 4, to ostatnią z zachowanych cyfr pozostawiamy bez zmiany. Na przykład $\frac{22}{7} = 3{,}14\underline{2}857142857\ldots \approx 3{,}14$.

Jeżeli zaś pierwszą z odrzuconych cyfr jest 5, 6, 7, 8 albo 9, to ostatnią z zachowanych cyfr zwiększamy o 1, przy czym jeżeli jest nią 9, to zastępujemy ją zerem i zwiększamy o 1 poprzednią cyfrę itd. Na przykład:

$$\frac{22}{7} = 3{,}142\underline{8}57142857\ldots \approx 3{,}143;$$

$$\frac{22}{7} = 3{,}1428\underline{5}7142857\ldots \approx 3{,}1429.$$

W obliczeniach opartych na przybliżeniach pojawia się pojęcie **cyfry znaczącej**.

Cyfrą znaczącą przybliżenia dziesiętnego jest każda z cyfr od 1 do 9 oraz 0 występujące między nimi, a ponadto zera końcowe – oznaczające brak jednostek odpowiedniego rzędu.

Cyframi znaczącymi nie są zarówno zera początkowe, jak i końcowe otrzymane w wyniku zaokrąglenia. Na przykład:
- liczba 2001 ma cztery cyfry znaczące,
- liczba 0,0398 ma trzy cyfry znaczące, a jej zaokrąglenie 0,04 ma tylko jedną cyfrę znaczącą, mianowicie 4.

Algorytm wyciągania pierwiastka stopnia drugiego

Objaśnimy go na kilku przykładach.

Przykład 1. Oblicz $\sqrt{3996001}$.

Rozwiązanie:

Dzielimy liczbę podpierwiastkową na klasy po dwie cyfry, poczynając od przecinka dziesiętnego w obie strony (w naszym przykładzie od prawej do lewej) $\sqrt{3.99.60.01}$ (skrajna klasa może być jednocyfrowa – tak jak w tym przykładzie). Następnie dobieramy największą liczbę jednocyfrową, której kwadrat nie przekracza 3; jest nią 1. Cyfra 1 jest pierwszą cyfrą rozwinięcia dziesiętnego $\sqrt{3996001}$. Kwadrat cyfry 1 piszemy pod 3 i odejmujemy go od niej. Otrzymujemy tak zwaną pierwszą resztę: $3 - 1 = 2$. Za tą resztą dopisujemy kolejno cyfry następnej klasy: 99. Mamy:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{3.99.60.01} = 1 & \\
\ 1 & \\
\hline
\ 299 & 2x \cdot x
\end{array}$$

Pierwszą cyfrę szukanego rozwinięcia (tutaj 1) podwajamy i dopisujemy taką największą cyfrę x, aby iloczyn $2x \cdot x$ (tj. liczby dwucyfrowej $2x$ i cyfry x) nie przekroczył 299. Cyfrą tą jest 9. Jest to druga cyfra szukanego rozwinięcia, wpisywana za cyfrą 1. Mnożymy $29 \cdot 9 = 261$ i piszemy ten iloczyn pod liczbą 299 i odejmujemy od niej. Otrzymujemy tak zwaną drugą resztę: $299 - 261 = 38$.

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{3.99.60.01} = 19 & \\
\ 1 & \\
\hline
\ 299 & 29 \cdot 9 \\
\ 261 & \\
\hline
\ = 3860 &
\end{array}$$

Za cyframi 38 dopisujemy kolejno cyfry następnej klasy. Liczbę utworzoną z pierwszych dwóch cyfr szukanego rozwinięcia, 19 – podwajamy $2 \cdot 19 = 38$ i dopisujemy taką największą cyfrę y, aby iloczyn $38y \cdot y$ (tj. liczby trzycyfrowej $38y$ i cyfry y) nie przekroczył 3860. Cyfrą tą jest znowu 9 i proces ten kontynuujemy aż do otrzymania ostatniej zerowej reszty. Oto algorytm w całości:

$$\begin{array}{l|l}
\sqrt{3.99.60.01} = 1999 & \\
\ 1 & \\
\hline
\ 299 & 29 \cdot 9 \\
\ 261 & \\
\hline
\ = 3860 & 389 \cdot 9 \\
\ \ \ 3501 & \\
\hline
\ \ \ \ 35901 & 3989 \cdot 9 \\
\ \ \ \ 35901 & \\
\hline
\ \ \ \ = = = = = &
\end{array}$$

Zatem $\sqrt{3996001} = 1999$.

Przykład 2. Oblicz $\sqrt{32}$ z dokładnością do 0,01 (czyli z błędem bezwzględnym mniejszym od 0,01).
Rozwiązanie:

$$\begin{array}{rl|l}
 & & \text{obliczenia pomocnicze} \\
 & \sqrt{32,00.00} = 5,65 & 5^2 \leqslant 32, \quad 6^2 > 32 \\
 & 25 & 2 \cdot 5 = 10 \\
\text{pierwsza reszta} \longrightarrow & = 700 \quad | 106 \cdot 6 & 106 \cdot 6 \leqslant 700, \quad 107 \cdot 7 > 700 \\
 & 636 & 2 \cdot 56 = 112 \\
\text{druga reszta} \longrightarrow & = 6400 \, | 1125 \cdot 5 & 1125 \cdot 5 \leqslant 6400 \\
 & 5625 & 1126 \cdot 6 > 6400 \\
\text{trzecia reszta} \longrightarrow & = 775 &
\end{array}$$

Po otrzymaniu trzeciej reszty kończymy rachunek, gdyż
$5,65 < \sqrt{32} < 5,66.$

Stąd $\sqrt{32} \approx 5,65$ z dokładnością do 0,01.

Przykład 3. Oblicz $\sqrt{0,0319}$ z dokładnością do 0,001.
Rozwiązanie:

$$\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{0,0319.00} = 0,178 & \\
 & 1 & \\
\text{pierwsza reszta} \longrightarrow & 219 \quad | 27 \cdot 7 & \\
 & 189 & \\
\text{druga reszta} \longrightarrow & =3000 \,|\, 348 \cdot 8 & \\
 & 2784 & \\
\text{trzecia reszta} \longrightarrow & 216 &
\end{array}$$

obliczenia pomocnicze
$01^2 \leqslant 0,03, \quad 0,2^2 > 0,03$
$27 \cdot 7 \leqslant 219, \quad 28 \cdot 8 = 224 > 219$
$348 \cdot 8 \leqslant 3000, \quad 349 \cdot 9 = 3141 > 3000$

Po otrzymaniu trzeciej reszty kończymy obliczenia, gdyż
$0,178 < \sqrt{0,319} < 0,179.$
Zatem $\sqrt{0,319} \approx 0,178$ z dokładnością do 0,001.

Przykład 4. Oblicz $\sqrt{2}$ z dokładnością do 0,0001.
Rozwiązanie:

$$\begin{array}{rl}
 & \sqrt{2} = \sqrt{2,00.00.00.00} = 1,4142 \\
 & 1 \\
\text{pierwsza reszta} \longrightarrow & 100 \quad | 24 \cdot 4 \\
 & 96 \\
\text{druga reszta} \longrightarrow & =400 \quad | 281 \cdot 1 \\
 & 281 \\
\text{trzecia reszta} \longrightarrow & 11900 \quad | 2824 \cdot 4 \\
 & 11296 \\
\text{czwarta reszta} \longrightarrow & =60400 \quad | 28282 \cdot 2 \\
 & 56564 \\
\text{piata reszta} \longrightarrow & =3836 \quad |
\end{array}$$

z dokładnością do 0,0001

Na otrzymaniu piątej reszty kończymy obliczenia, gdyż $1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143$.
Zatem $\sqrt{2} = 1,4142$ z dokładnością do 0,0001.

Pytania i zadania

1. Co to jest: błąd przybliżenia, poprawka, błąd bezwzględny, błąd względny, cyfra znacząca?
2. Omów regułę zaokrąglania.
3. Oblicz: a) $\sqrt{2916}$; b) $\sqrt{9604}$; c) $\sqrt{12321}$.
4. Oblicz:
   a) $\sqrt{73,4}$ z dokładnością do 0,001; b) $\sqrt{0,79}$ z dokładnością do 0,001;
   c) $\sqrt{0,00092}$ z dokładnością do 0,0001.
5. Oblicz $1,2 \cdot 9,0909$ z dokładnością do trzech miejsc po przecinku.

V. Funkcje

1. Pojęcie funkcji, funkcja liczbowa i jej wykres

Pojęcie funkcji znane ci już jest z gimnazjum. Z funkcjami mamy też do czynienia w życiu codziennym. Powtórzymy sobie zatem to, co już wiemy o funkcjach, oraz poszerzymy nieco tę wiedzę. Najprościej rzecz ujmując, funkcja jest dana, gdy znamy sposób przyporządkowania wartości funkcji wartościom zmiennej niezależnej.

Przykład 1. Wybierając się w podróż koleją, kupujemy bilet. Cena biletu jest zależna od długości drogi, którą chcemy pokonać pociągiem. Mamy tutaj przyporządkowanie: długości drogi przyporządkowujemy cenę biletu na pociąg, którym chcemy tę drogę odbyć. Cena biletu jest więc funkcją długości drogi.

Przykład 2. Sprawdzamy na termometrze za oknem temperaturę powietrza w danej chwili. Temperatura ta zależna jest od momentu, w którym ją mierzymy. Mamy więc tu przyporządkowanie: danej chwili przyporządkowujemy liczbę stopni odczytywaną na termometrze. Możemy więc powiedzieć, że temperatura powietrza jest funkcją czasu.

Przykład 3. Wszystkich uczniów twojej klasy wpisywano w porządku alfabetycznym na listę w dzienniku. Przyporządkowano więc tutaj każdemu uczniowi określony numer na liście w dzienniku.

Przykład 4. Niech a oznacza długość boku kwadratu, zaś d – długość jego przekątnej. Oczywiście zachodzi wzór $d = a\sqrt{2}$. Długość przekątnej kwadratu jest więc funkcją długości jego boku.

Widzimy zatem, że z pojęciem funkcji mamy do czynienia, gdy badamy stosunki zachodzące między rozmaitymi wielkościami. Zdarzyć się może, że dwie wielkości są w pewnych warunkach tak ze sobą związane, że każda wartość pierwszej z nich odpowiada ściśle wartości drugiej. Mówimy wtedy, że ta druga wielkość jest funkcją tej pierwszej.

Przejdźmy teraz do ogólnego określenia funkcji.

Niech X i Y będą dwoma niepustymi zbiorami.

> Funkcją określoną na zbiorze X i przyjmującą wartości ze zbioru Y albo **odwzorowaniem** zbioru X w zbiór Y nazywamy przyporządkowanie każdemu elementowi ze zbioru X jednego elementu ze zbioru Y.

W podręczniku naszym funkcje będziemy tradycyjnie oznaczać literami f, g, h.

Zdanie: „Funkcja f jest określona w zbiorze X i przyjmuje wartości w zbiorze Y" zapiszemy następująco: $f: X \to Y$.

Zbiór X nazywamy **dziedziną** (albo zbiorem określoności) funkcji f, a jego elementy – **argumentami**.

Jeżeli w odwzorowaniu f zbioru X w zbiór Y elementowi x zbioru X odpowiada element y zbioru Y, to mówimy, że funkcja f przybiera w punkcie x wartość y. Wartość tę oznaczamy zazwyczaj symbolem $f(x)$. Piszemy wówczas $y = f(x)$. Często samą funkcję f

oznaczać będziemy też symbolem $f(x)$, a zwrot: „dana jest funkcja $f(x)$" odczytamy: „została określona funkcja f, której wartość w punkcie x jest równa $f(x)$".

!

Zbiorem wartości funkcji $f: X \to Y$, nazywamy zbiór tych elementów zbioru Y, które są wartościami tej funkcji.

Zbiór wartości funkcji $f: X \to Y$ oznaczamy symbolem $f(X)$.
Tak więc

$$f(X) = \left\{ y \in Y: \bigvee_{x \in X} y = f(x) \right\}.$$

Zgodnie z definicją funkcji, w zbiorze Y mogą, występować elementy, którym nie przyporządkowano żadnego elementu zbioru X.

Wniosek. Jeżeli $f: X \to Y$, to $f(X) \subset Y$.

Jeżeli funkcja $f: X \to Y$ spełnia dodatkowo warunek: dla każdego elementu y ze zbioru Y istnieje element x ze zbioru X taki, że $y = f(x)$, to mówimy, że funkcja f odwzorowuje zbiór X **na** zbiór Y. Wtedy $f(X) = Y$.

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **funkcją zmiennej rzeczywistej**, gdy jej dziedzina X zawarta jest w zbiorze R liczb rzeczywistych (tzn. $X \subset R$).

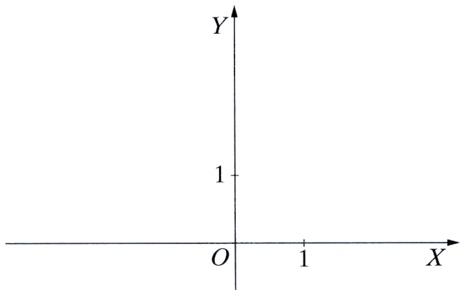
Jeżeli zbiór $Y \subset R$, to mówimy, że f jest **funkcją o wartościach rzeczywistych** (lub krócej: **funkcją rzeczywistą**). Funkcję rzeczywistą zmiennej rzeczywistej nazywamy też **funkcją liczbową**. W dalszym ciągu naszego podręcznika funkcję liczbową nazywać będziemy po prostu funkcją.

Przykład 5. Każdemu prostokątowi przyporządkujmy jego obwód. Otrzymujemy w ten sposób funkcję $f: X \to Y$, gdzie X jest zbiorem prostokątów, zaś $Y \subset R$. Jest to więc funkcja rzeczywista, której argumentami są prostokąty.

Przykład 6. Kolejnym liczbom całkowitym dodatnim 1, 2, 3, 4,... przyporządkujmy kolejne miesiące roku kalendarzowego, a więc liczbie 1 odpowiada styczeń, liczbie 2 – luty, liczbie 3 – marzec, ..., liczbie 12 – grudzień, liczbie 13 – styczeń itd. Mamy tu funkcję $f: N_+ \to Y$, gdzie $N_+ = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, zaś Y jest zbiorem wszystkich miesięcy roku kalendarzowego. Jest to przykład funkcji zmiennej rzeczywistej (bo $N_+ \subset R$), której wartości nie są liczbami rzeczywistymi.

Przykład 7. Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkujmy jej wartość bezwzględną $|x|$. Otrzymamy funkcję $f: R \to R$, której zarówno argumenty, jak i wartości są liczbami rzeczywistymi. Jest to więc funkcja liczbowa.

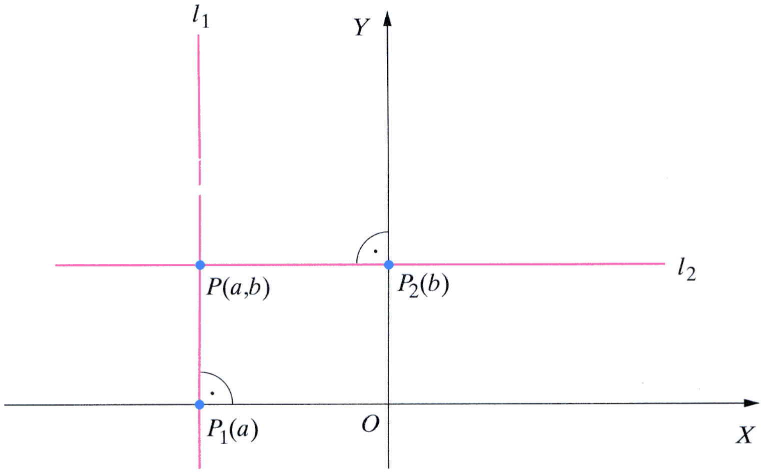
Niech $f: X \to Y$ będzie funkcją liczbową, to znaczy niech $X, Y \subset R$. Funkcji takiej odpowiada pewien zbiór punktów na płaszczyźnie. Zbiór ten nazywamy jej wykresem. Aby określić dokładnie, co to jest wykres funkcji, należy najpierw wprowadzić na płaszczyźnie układ współrzędnych. W tym celu obieramy dowolnie dwie wzajemnie prostopadłe osie liczbowe, takie że ich punkt przecięcia O jest początkiem każdej z nich. Jedną z tych prostych nazywamy osią odciętych i oznaczamy literą X, a drugą – osią rzędnych i oznaczamy literą Y. Na ogół na obu tych osiach przyjmujemy wspólną jednostkę (ryc. 5.1).



Ryc. 5.1.

I wówczas każdej parze (a, b) liczb rzeczywistych odpowiada pewien punkt P na płaszczyźnie określony następująco: znajdujemy na osi X punkt P_1 o współrzędnej a, zaś na osi Y – punkt P_2 o współrzędnej b. Następnie prowadzimy przez te punkty proste l_1 i l_2 prostopadłe odpowiednio do osi X i do osi Y (ryc. 5.2). Punkt przecięcia tych prostych – to właśnie punkt P odpowiadający parze (a, b). Liczby te nazywamy współrzędnymi punktu P: a – jego **odciętą**, b – **rzędną**.

Piszemy wtedy $P = (a, b)$.



Ryc. 5.2.

Opisane wyżej odwzorowanie zbioru wszystkich par liczb rzeczywistych na zbiór wszystkich punktów płaszczyzny jest wzajemnie jednoznaczne: każdej parze liczb rzeczywistych odpowiada dokładnie jeden punkt na płaszczyźnie i na odwrót: każdy punkt na płaszczyźnie zostaje przyporządkowany dokładnie jednej parze liczb rzeczywistych.

Powróćmy teraz do pojęcia wykresu funkcji. Sporządzaniem wykresów funkcji liniowych zajmowałeś się już w gimnazjum. Aby sporządzić wykres jakiejś funkcji f, postępujemy tak: wybieramy liczbę a z dziedziny tej funkcji oraz wyznaczamy jej wartość $b = f(a)$. Otrzymujemy parę (a, b), która na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych, zwanej krótko: **płaszczyzną współrzędnych**, wyznacza pewien punkt. Szukamy takich punktów dla wszystkich argumentów x funkcji f. Zbiór otrzymanych w ten sposób punktów jest wykresem funkcji f.

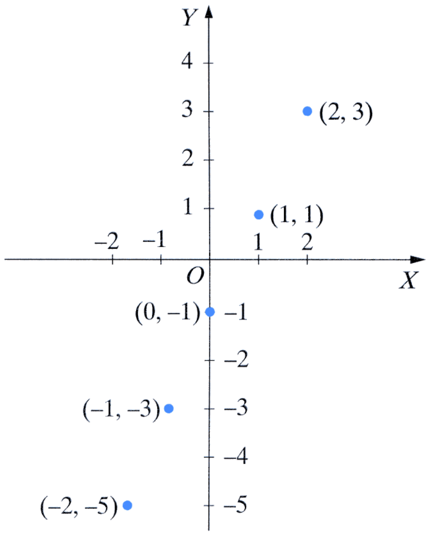
Wykresem funkcji liczbowej $f: X \to Y$ nazywamy zbiór

$$W_f = \{(x; f(x)): x \in X\}.$$

Przykład 8. Wykresem funkcji $f: X \to Y$, gdzie $X = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ i $f(x) = 2x - 1$, jest zbiór

$$\{(-2, f(-2)), (-1, f(-1)), (0, f(0)), (1, f(1)), (2, f(2))\},$$

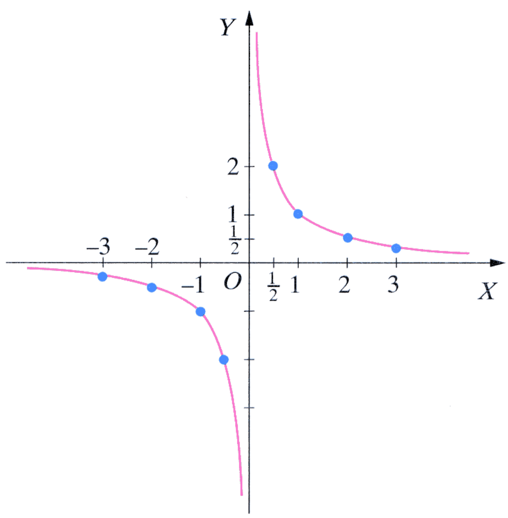
czyli zbiór $\{(-2, -5), (-1, -3), (0, -1), (1, 1), (2, 3)\}$.



Ryc. 5.3.

Przykład 9. Wykresem funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ jest zbiór $\left\{\left(x; \frac{1}{x}\right): x \in R \setminus \{0\}\right\}$.

W praktyce wykres funkcji $f: X \to Y$ sporządzamy zazwyczaj w ten sposób, że najpierw układamy tabelkę jej zmienności, obierając kilka elementów x z dziedziny X i obliczając odpowiadające im wartości $y = f(x)$. Następnie na płaszczyźnie współrzędnych XOY zaznaczamy punkty, które odpowiadają parom (x, y) wziętym z tabelki. Mając już kilka zaznaczonych w ten sposób punktów, łączymy je i otrzymujemy szkic wykresu funkcji f.

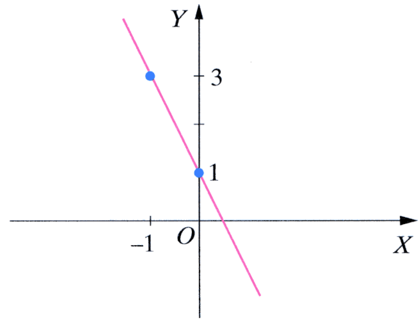


Ryc. 5.4.

Przykład 10. Sporządź wykres funkcji $f(x) = -2x + 1$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Układamy tabelkę zmienności (tutaj wystarczy obrać tylko dwa argumenty i obliczyć odpowiadające im wartości – czy pamiętasz dlaczego?).

x	-1	0
$f(x)$	3	1

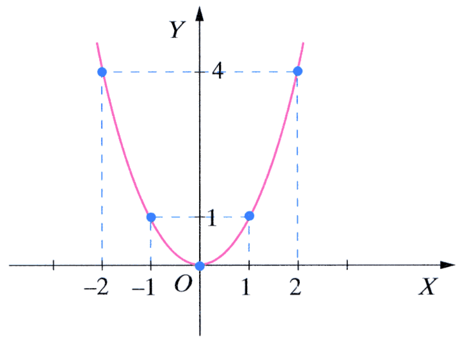


Ryc. 5.5.

Przykład 11. Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^2$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Układamy tabelkę zmienności funkcji f.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	4	1	0	1	4

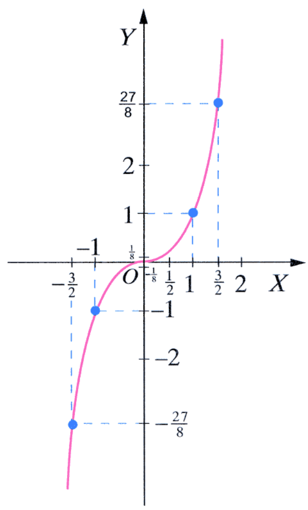


Ryc. 5.6.

Przykład 12. Sporządź wykres funkcji $f(x) = x^3$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Układamy tabelkę zmienności funkcji f.

x	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{7}$
$f(x)$	$-\frac{27}{8}$	-1	$-\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	1	$\frac{27}{8}$



Ryc. 5.7.

Przykład 13. Sporządź wykres funkcji

$$f(x)=\begin{cases}-x+1: & x<-1\\ 2x: & -1\leqslant x<1\\ \frac{1}{x}: & x\geqslant 1.\end{cases}$$

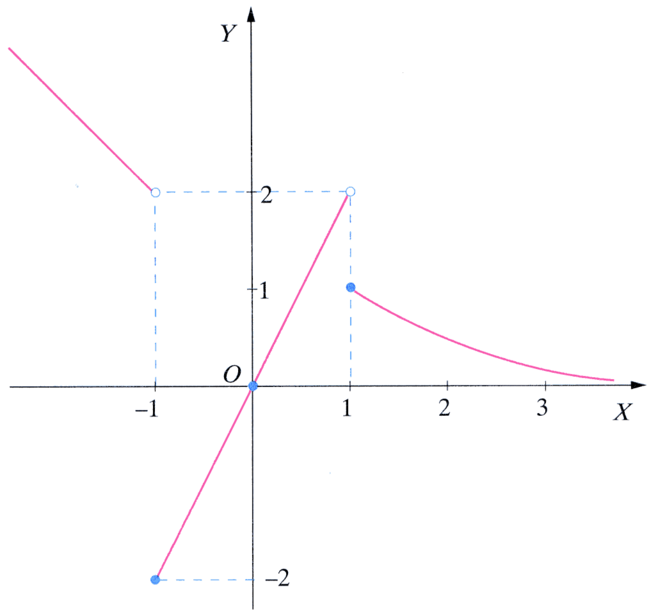
Rozwiązanie:

Sporządzamy w tym samym układzie współrzędnych wykresy funkcji:

$f_1(x)=-x+1$, gdy $x<-1$;

$f_2(x)=2x$, gdy $-1\leqslant x<1$;

$f_3(x)=\frac{1}{x}$, gdy $x\geqslant 1$.



Ryc. 5.8.

Wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji f_1, f_2 i f_3.

Przykład 14. Sporządź wykres funkcji $f(x)=|x|$ dla $x\in R$.

Rozwiązanie:

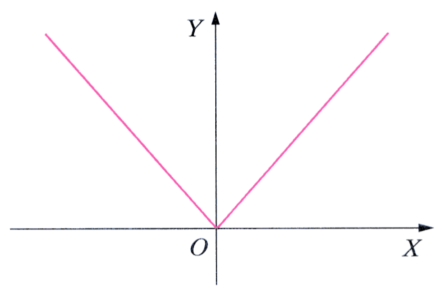
Ponieważ

$$|x|=\begin{cases}x: & x\geqslant 0\\ -x: & x<0,\end{cases}$$

więc wykres funkcji f jest sumą wykresów funkcji

$f_1(x)=x$, gdy $x\geqslant 0$ i $f_2(x)=-x$, gdy $x<0$.

Wykres funkcji $f(x)=|x|$



Ryc. 5.9.

Przykład 15. Symbol $[x]$ oznacza największą liczbę całkowitą nie większą od x. Na przykład:

$\left[-\frac{1}{2}\right]=-1,\ \left[\frac{1}{3}\right]=0$

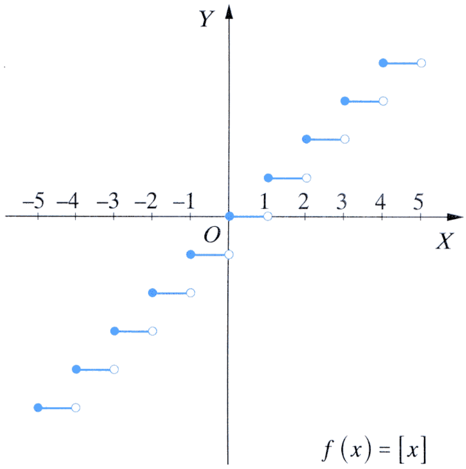
Sporządź wykresy funkcji:

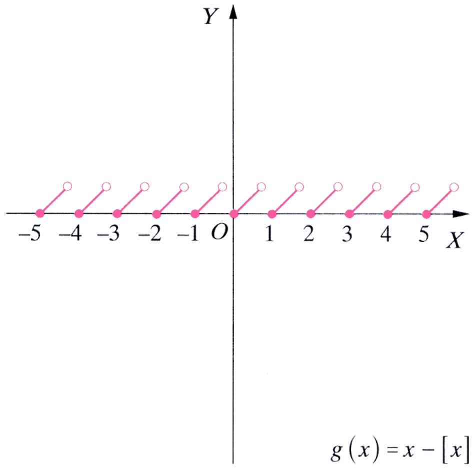
$f(x)=[x]$, (część całkowita (cecha) liczby x),

$g(x)=x-[x]$ (część ułamkowa (mantysa) liczby x), gdy $x \in R$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że jeżeli $x \in \langle k; k+1)$, gdzie $k \in C$, to $[x]=k$ oraz $x-[x]=x-k$. Wobec tego wykresy funkcji $f(x)$ i $g(x)$ wyglądają następująco:





Ryc. 5.10.

Pytania i zadania

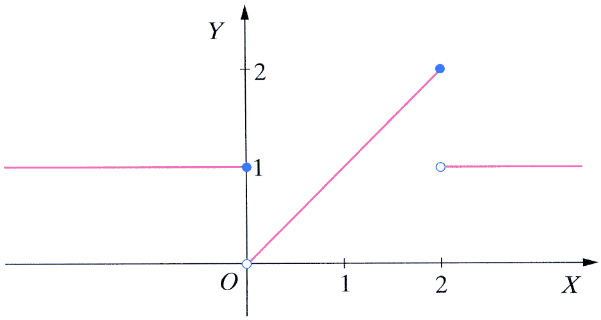
1. Rozstrzygnij, czy określiliśmy funkcję, jeżeli:
   a) każdemu uczniowi twojej szkoły przyporządkowaliśmy jego matkę;
   b) każdej rzece przyporządkowaliśmy morze, do którego wpada;
   c) każdemu okręgowi przyporządkowaliśmy jego średnicę;
   d) każdej liczbie rzeczywistej przyporządkowaliśmy jej kwadrat.
2. Wyjaśnij znaczenie terminów:
   a) funkcja,
   b) dziedzina funkcji,
   c) zbiór wartości funkcji,
   d) funkcja liczbowa.
3. Podaj przykłady funkcji:
   a) zmiennej rzeczywistej,
   b) rzeczywistej,
   c) liczbowej.
4. Co to jest układ współrzędnych prostokątnych?
5. Co to są współrzędne prostokątne punktu?
6. Zaznacz na płaszczyźnie z układem współrzędnych:
   a) punkty: $A=(-2,1)$, $B=(3,-2)$, $C=(-1,-2)$, $D=(2,0)$, $E=(0,-3)$;
   b) zbiór punktów o obu współrzędnych tego samego znaku;

c) zbiór punktów o współrzędnych przeciwnego znaku;
d) zbiór punktów o odciętej równej 0;
e) zbiór punktów o rzędnej równej 0.

7. Co to jest wykres funkcji?
8. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $f(x) = -3x + 2$ dla $x \in \langle -3; 2)$; b) $f(x) = -x^2$ dla $(-2; -1\rangle \cup \langle 2; 3)$.

9. Określ wzorem funkcję, której wykres widzisz poniżej.



Ryc. 5.11.

10. Sporządź wykres funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{dla} \quad x > 1 \\ -x-1 & \text{dla} \quad x \leqslant 1; \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & |x| < 1 \\ x, & |x| \geqslant 1; \end{cases}$

c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (czytaj: *signum* – czyli znak),

gdzie $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1: & x > 0 \\ 0: & x = 0 \\ -1: & x < 0. \end{cases}$

2. Sposoby określania funkcji

Istnieją różne sposoby określania funkcji. Można ją podać za pomocą:
- przepisu słownego,
- tabelki,
- grafu,
- wzoru,
- wykresu (graficznie).

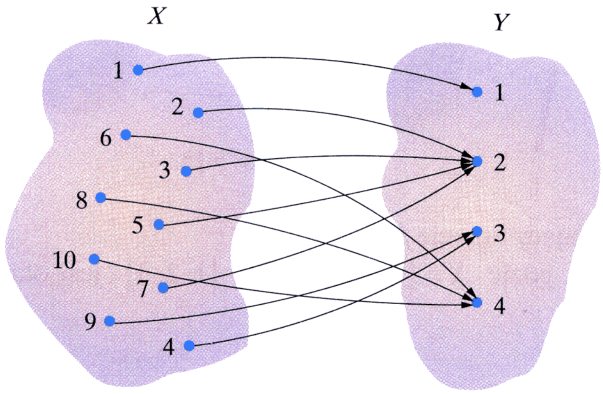
Przykład 1. Każdej liczbie naturalnej od 1 do 10 przyporządkujmy liczbę wszystkich jej dzielników, a więc liczbie 1 przyporządkujmy liczbę 1, liczbom 2, 3, 5, 7 – liczbę 2, liczbom 4 i 9 – liczbę 3, zaś liczbom 6, 8, 10 – liczbę 4. Otrzymana funkcja odwzorowuje zbiór $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ na zbiór $Y = \{1, 2, 3, 4\}$.

Tę samą funkcję określić możemy za pomocą

– tabelki:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4

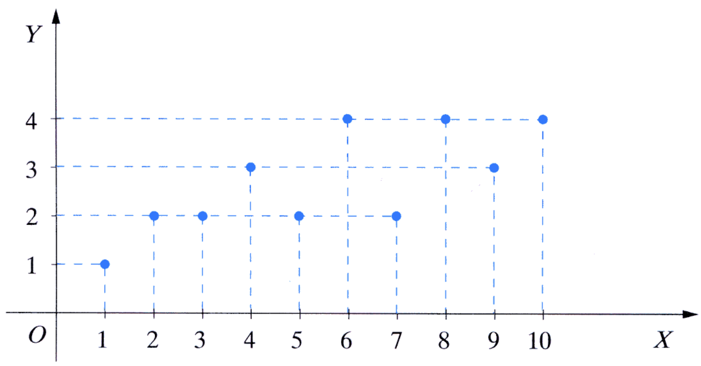
– grafu:



Ryc. 5.12.

– wykresu:

$$\{(1,1),(2,2),(3,2),(4,3),(5,2),(6,4),(7,2),(8,4),(9,3),(10,4)\}.$$



Ryc. 5.13.

Przykład 2. Niech x będzie liczbą ze zbioru

$$X=\left\{0; \frac{1}{25}; \frac{1}{16}; \frac{1}{9}; \frac{1}{4}; 1; 1{,}44; 1{,}69; 1{,}96; 2{,}25\right\}.$$

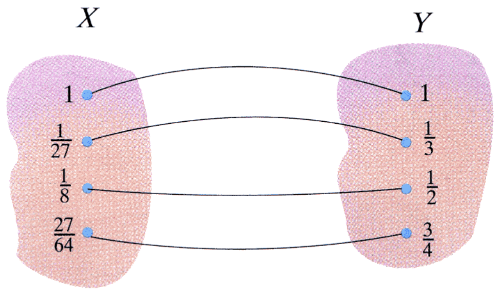
Każdej liczbie x ze zbioru X przyporządkujmy jej pierwiastek arytmetyczny stopnia drugiego, a więc liczbę $\sqrt{x}$. Opisana w ten sposób funkcja zadana jest wzorem $y=\sqrt{x}$. Jej wykresem jest zbiór

$$\left\{(0;0),\left(\frac{1}{25};\frac{1}{5}\right),\left(\frac{1}{16};\frac{1}{4}\right),\left(\frac{1}{9};\frac{1}{3}\right),\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right),(1;1)(1{,}44;1{,}2),(1{,}69;1{,}3),(1{,}96;1{,}4),(2{,}25;1{,}5)\right\}.$$

Sporządź graf i tabelkę określającą tę funkcję.

Pytania i zadania

1. Funkcja $f: X \to Y$ określona jest za pomocą grafu:



Ryc. 5.14.

Podaj wzór określający funkcję f.

2. Funkcja $f: X \to Y$, gdzie $X = \{2, 4, 6, 8\}$, $Y = \{1, 2, 3\}$, jest określona za pomocą tabelki:

x	2	4	6	8
$f(x)$	1	2	3	4

Przedstaw funkcję f za pomocą grafu i podaj jej wzór.

3. Zbiór

$$\left\{\left(-3; -\frac{1}{3}\right), \left(-2; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{3}{2}; -\frac{2}{3}\right), (-1; -1), \left(-\frac{1}{2}; -2\right), \left(-\frac{1}{3}; -3\right), \left(\frac{1}{3}; 3\right),\right.$$

$$\left.\left(\frac{1}{2}; 2\right), \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right), (1; 1), \left(2; \frac{1}{2}\right), \left(3; \frac{1}{3}\right)\right\}$$

jest wykresem funkcji f. Określ funkcję f:

a) przepisem słownym,

b) wzorem.

4. Niech $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Funkcja f, której dziedziną jest zbiór A, określona jest wzorem $f(n) = \mathrm{NWD}(n, 30)$.

Przedstaw funkcję f za pomocą:

a) tabelki,

b) grafu.

5. Naszkicuj wykresy funkcji:

a) $f(x) = \begin{cases} x + 5: & x \leqslant -5 \\ 0: & -5 < x \leqslant 0 \\ -x + 5: & x > 0; \end{cases}$ b) $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$: $x \neq 1$;

c) $f(x) = \dfrac{x}{|x|} + \dfrac{|x|}{x}$: $x \neq 0$.

3. Dziedzina funkcji, zbiór wartości funkcji

Dziedziną funkcji, jak pamiętamy, jest zbiór, w którym ta funkcja została określona. Zbiór ten nazywamy też zbiorem określoności funkcji, a jego elementy – **argumentami funkcji**.

Zbiorem wartości funkcji nazywamy natomiast zbiór, na który funkcja ta odwzorowuje swoją dziedzinę.

Zatem X jest dziedziną funkcji f, zaś Y – zbiorem wartości tej funkcji, jeśli $f: X \overset{na}{\to} Y$, to znaczy, jeśli $f(X) = Y$. Na przykład:

1. Jeżeli każdemu człowiekowi przyporządkujemy jego matkę, to otrzymamy funkcję, której dziedziną jest zbiór wszystkich ludzi, a zbiorem wartości pewien niepusty podzbiór zbioru wszystkich kobiet.
2. Każdemu odcinkowi przyporządkujmy jego środek. Otrzymujemy w ten sposób funkcję, której dziedziną jest zbiór odcinków, a zbiorem wartości – zbiór punktów.
3. Każdemu trójkątowi przyporządkujmy jego obwód. Tym razem mamy funkcję, której dziedziną jest zbiór wszystkich trójkątów, a zbiorem wartości – zbiór liczb rzeczywistych dodatnich.

W dalszym ciągu naszych rozważań ograniczymy się do funkcji liczbowych i to określonych najczęściej wzorem.

Za dziedzinę funkcji określonej wzorem przyjmujemy zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których podany wzór funkcji ma sens, czyli dla których wszystkie występujące we wzorze funkcji działania są wykonalne. Prześledźmy to na wielu przykładach.

Przykład 1. Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = 2x - 1$ jest zbiór R wszystkich liczb rzeczywistych, ponieważ chcąc obliczyć wartość tej funkcji dla danej liczby rzeczywistej x, należy x pomnożyć przez 2, a następnie od iloczynu $2x$ odjąć 1. Wymienione działania możemy wykonać dla dowolnej liczby rzeczywistej x.

Przykład 2. Dziedziną funkcji f określonej wzorem $f(x) = \frac{2}{-3x+1}$ jest zbiór tych liczb rzeczywistych, dla których $-3x + 1 \neq 0$ (w zbiorze liczb rzeczywistych dzielenie przez 0 jest niewykonalne).

Zatem dziedziną funkcji f jest zbiór $\{x \in R: -3x + 1 \neq 0\}$, czyli zbiór $\left\{x \in R: x \neq \frac{1}{3}\right\}$, a więc zbiór $R \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

Dziedzinę funkcji f oznaczajmy dalej przez D_f.

Przykład 3. Niech

$$f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}.$$

Ponieważ $x^2 + 1 \neq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x (a nawet $x^2 + 1 \geqslant 1$), przeto $D_f = R$.

Przykład 4. Niech

$$f(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - 1}.$$

Wówczas $D_f = \{x \in R: \ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in R: \ (x+1)(x-1) \neq 0\} =$
$= \{x \in R: \ x + 1 \neq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = \{x \in R: \ x \neq -1 \wedge x \neq 1\} = R \setminus \{-1; 1\}$.

Przykład 5. Niech $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.

Ponieważ nie istnieje pierwiastek arytmetyczny stopnia drugiego z liczby ujemnej, więc

$$D_f=\{x\in R:\ \ 1-x^2\geqslant 0\}=\{x\in R:\ \ x^2\leqslant 1\}=$$
$$=\{x\in R:\ \ \sqrt{x^2}\leqslant 1\}=\{x\in R:\ \ |x|\leqslant 1\}=$$
$$=\{x\in R:\ \ -1\leqslant x\leqslant 1\}=\langle -1;1\rangle.$$

Przykład 6. Niech $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{1-|x-1|}}$.

Z określoności pierwiastka arytmetycznego oraz z niewykonalności dzielenia przez 0 wynika, że

$$D_f=\{x\in R:\ \ 1-|x-1|>0\}=\{x\in R:\ \ |x-1|<1\}=$$
$$=\{x\in R:\ \ -1<x-1<1\}=\{x\in R:\ \ 0<x<2\}=(0;2).$$

Przejdźmy teraz do wyznaczania zbioru wartości funkcji. Najczęściej będziemy mieli do czynienia z funkcjami określonymi wzorem lub graficznie (za pomocą wykresu). Rozpatrzmy więc kilka przykładów.

Przykład 7. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x)=2x-1$, gdy $x\in\{-3,-2,-1,0,1,2,3,\}$.
Rozwiązanie:

Niech $A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Wówczas zbiorem wartości funkcji f określonej na zbiorze A jest zbiór

$$f(A)=\{f(x);\ \ x\in A\}=\{f(-3),f(-2),f(-1),f(0),f(1),f(2),f(3)\}=$$
$$=\{-7,-5,-3,-1,1,3,5\}.$$

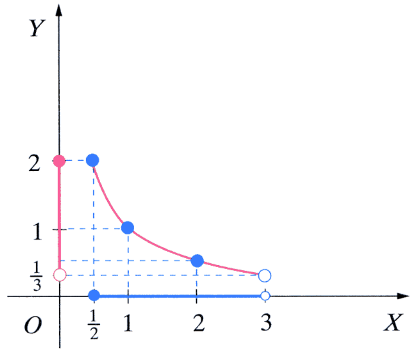
Przykład 8. Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x)=\frac{1}{x}\ \text{ dla }\ x\in\left\langle\frac{1}{2};3\right).$$

Rozwiązanie:

Ponieważ $x\in\left\langle\frac{1}{2};3\right)\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant x<3\Leftrightarrow\frac{1}{3}<\frac{1}{x}\leqslant 2\Leftrightarrow\frac{1}{x}\in\left(\frac{1}{3};2\right\rangle$, więc $f\left(\left\langle\frac{1}{2};3\right)\right)=\left(\frac{1}{3};2\right\rangle$.

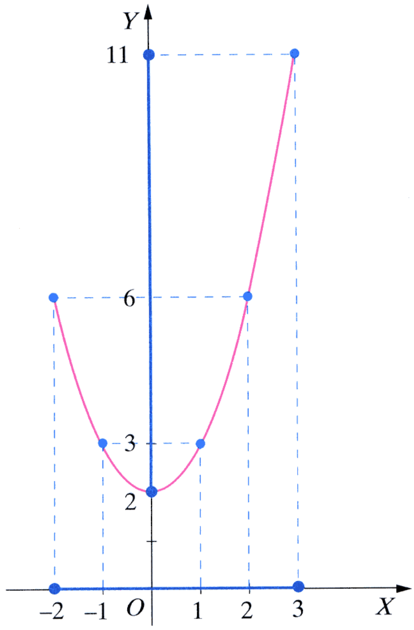
Uwaga. Zbiór wartości tej funkcji łatwo wyznaczymy posługując się jej wykresem.



Ryc. 5.15.

Przykład 9. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = x^2 + 2$, gdy $x \in \langle -2; 3 \rangle$.
Rozwiązanie:

Sporządźmy najpierw wykres tej funkcji.



Ryc. 5.16

I widzimy teraz, że $f(\langle -2; 3 \rangle) = \langle 2; 11 \rangle$.

Przykład 10. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = |x - 1|$, gdy $x \in \langle -2; -1) \cup \langle 5; 7)$.
Rozwiązanie:

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, zacznijmy od sporządzenia wykresu danej funkcji.

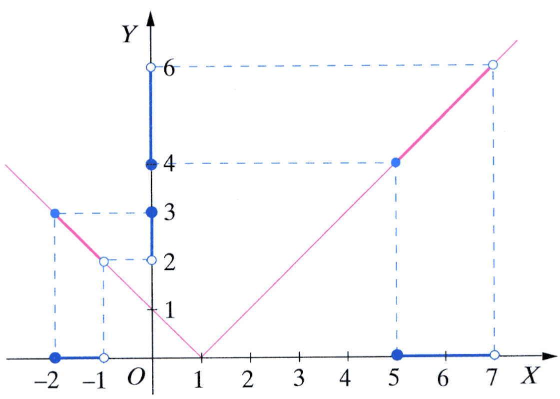
Z określenia wartości bezwzględnej mamy

$$|x-1| = \begin{cases} x-1: & x \geqslant 1 \\ -x+1: & x < 1. \end{cases}$$

Zatem $f(x)$ jest postaci

$$f(x) = \begin{cases} x-1: & x \geqslant 1 \\ 1-x: & x < 1. \end{cases}$$

Oto wykres tej funkcji.



Ryc. 5.17.

I widzimy, że zbiorem wartości funkcji $f(x) = |x - 1|$, gdy $x \in \langle -2; -1) \cup \langle 5; 7)$ jest zbiór $(2; 3\rangle \cup \langle 4; 6)$.

Przykład 11. Wyznacz zbiór wartości funkcji

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-x\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3}+2.$$

Rozwiązanie:

Wyznaczmy najpierw dziedzinę tej funkcji.

$$D_f=\left\{x\in R:\quad x+1\geqslant 0\wedge x^3\geqslant 0\wedge\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\neq 0\right\}=$$

$$=\left\{x\in R:\quad x\geqslant -1\wedge x\geqslant 0\wedge\sqrt{x+1}\neq\sqrt{x}\right\}=$$

$$=\left\{x\in R:\quad x\geqslant 0\right\}=\langle 0;+\infty).$$

Teraz zapiszmy wzór funkcji $f(x)$ w najprostszej postaci. Dla każdej liczby nieujemnej x mamy

$$\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}-x\sqrt{x+1}-\sqrt{x^3}+2=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}+2=$$

$$=x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)-x\sqrt{x+1}-x\sqrt{x}+2=2.$$

Zatem $f(x)=2$, gdy $x\geqslant 0$.

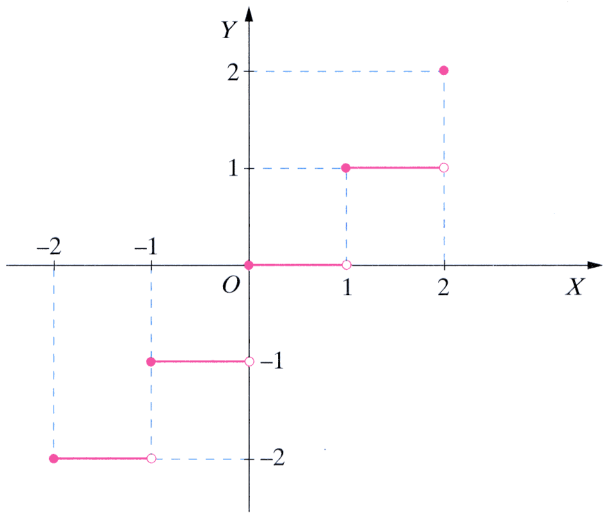
Stąd zbiorem wartości naszej funkcji jest zbiór $\{2\}$.

Przykład 12. Znajdź zbiór wartości funkcji $f(x)=[x]$, gdy $x\in\langle -2;2\rangle$.

Rozwiązanie:

Z określenia symbolu $[x]$ wynika, że

$$[x]=\begin{cases}-2: & x\in\langle -2;-1)\\ -1: & x\in\langle -1;0)\\ 0: & x\in\langle 0;1)\\ 1: & x\in\langle 1;2)\\ 2: & x=2.\end{cases}$$



Ryc. 5.18.

Stąd zbiorem wartości funkcji $f(x)=[x]$, gdy $x\in\langle -2;\,2\rangle$ jest zbiór $\{-2,-1,0,1,2\}$.

Pytania i zadania

1. Co to jest dziedzina funkcji?
2. Co to jest zbiór wartości funkcji?
3. Wyznacz dziedzinę funkcji:

a) $f(x)=-x^2+1$; b) $f(x)=\dfrac{1}{(x+1)(x-2)}$; c) $f(x)=\sqrt{1-3x}$;

d) $f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x+2}}$; e) $f(x)=\sqrt{x^2-4x+4}$; f) $f(x)=\sqrt{3-|x+2|}$;

g) $f(x)=\dfrac{3x+6}{|x|-1}$; h) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2-|x+1|}}{|x|-2}+\dfrac{1}{\sqrt{|x-2|-4}}$.

4. Wyznacz zbiór wartości funkcji:

a) $f(x)=2x-4$, gdy $x\in\langle -1;\ 2)$; b) $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$, gdy $x\neq 0$;

c) $f(x)=x^2+1$, gdy $x\in(-2;2\rangle$; d) $f(x)=\sqrt{2x-6}+\sqrt{6-2x}$;

e) $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2}$, gdy $x\in\langle -1;0)\cup(0;1\rangle$; f) $f(x)=\max(x,2)$, gdy $x\in\langle 0,4\rangle$;

g) $f(x)=\min\left(\dfrac{1}{|x|},2\right)$, gdy $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$.

4. Wartość funkcji w punkcie

Wartością funkcji f w punkcie x_0 nazywamy liczbę $f(x_0)$. Na przykład:
- wartością funkcji $f(x)=2x-3$ w punkcie 1 jest liczba $f(1)=2\cdot 1-3=-1$;
- wartością funkcji f określonej wzorem

$$f(x)=\begin{cases} x^3, & \text{gdy } x<0 \\ -x^2+x, & \text{gdy } x\geqslant 0 \end{cases}$$

jest w punkcie -1 liczba $f(-1)=(-1)^3=-1$, a w punkcie 2 liczba $f(2)=-2^2+2=-2$.

Miejscem zerowym funkcji f nazywamy taki jej argument x_0, dla którego

$$f(x_0)=0.$$

Przykłady:

1. Miejscem zerowym funkcji $f(x)=-3x+2$ jest liczba $\frac{2}{3}$, gdyż $f\left(\frac{2}{3}\right)=-3\cdot\frac{2}{3}+2=$ $=-2+2=0$.
2. Miejscami zerowymi funkcji $f(x)=x^2-1$ są liczby -1 i 1, bo $f(-1)=(-1)^2-1=$ $=1-1=0$ oraz $f(1)=1^2-1=0$.
3. Miejscem zerowym funkcji $D(x)$, określonej następująco:

$$D(x)=\begin{cases} 1: & x\in W \\ 0: & x\notin W \end{cases}$$

(tzw. funkcja Dirichleta), jest każda liczba niewymierna.

Punktem stałym funkcji f nazywamy taki jej argument x_0, dla którego $f(x_0)=x_0$.

Jeżeli wszystkie argumenty funkcji f są jej punktami stałymi, to funkcję f nazywamy **tożsamościową** w swojej dziedzinie.
Funkcja f tożsamościowa w zbiorze X zadana jest wzorem: $f(x)=x$ dla każdego x ze zbioru X.

Funkcje $f: X_1 \to Y_1$ i $g: X_1 \to Y_1$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:
1. $X_1 = X_2 = X$,
2. $f(x)=g(x)$ dla każdego x ze zbioru X.

Przykłady:
1. Funkcje $f(x)=|x|$ i $g(x)=\sqrt{x^2}$ są równe, gdyż $D_f = R = D_g$ oraz $\sqrt{x^2}=|x|$ dla każdej liczby rzeczywistej x.
2. Funkcje $f(x)=\frac{x^2}{x}$ i $g(x)=x$ nie są równe, gdyż $D_f = R \setminus \{0\}$, zaś $D_g = R$, a więc $D_f \neq D_g$.
3. Funkcje $f(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2$ i $g(x)=\sqrt{x^2}$ nie są równe, gdyż $D_f = \langle 0; +\infty)$, zaś $D_g = R$, a więc $D_f \neq D_g$.
4. Funkcje

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{|x|}: & x \neq 0 \\ 1: & x = 0 \end{cases} \quad \text{i} \quad g(x)=|x|$$

nie są równe, gdyż jakkolwiek $D_f = D_g = R$, to jednak nie jest prawdą, że $f(x)=g(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x; na przykład $f(0)=1$, zaś $g(0)=0$.

Niech funkcje f i g będą określone w tym samym zbiorze X.

Sumą funkcji f i g nazywamy funkcję h określoną w zbiorze X następująco: $h(x)=f(x)+g(x)$ i oznaczamy ją:

$$h=f+g.$$

Tak więc: $$(f+g)(x)=f(x)+g(x).$$

Podobnie określamy różnicę, iloczyn i iloraz funkcji f i g. Są to odpowiednio funkcje: $f-g$, $f \cdot g$ i $\frac{f}{g}$, określone następująco:

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x), \text{ gdy } x \in X,$$

$$(f \cdot g)(x)=f(x) \cdot g(x), \text{ gdy } x \in X,$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, \text{ gdy } x \in X \setminus \{x \in X: g(x)=0\}.$$

Iloczynem funkcji f i stałej $c \in R$ nazywamy funkcję $c \cdot f$, określoną wzorem

$$(c \cdot f)(x)=c \cdot f(x), \text{ gdy } x \in X.$$

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie funkcji f i g (w szczególności mnożenie funkcji f przez stałą) polega odpowiednio na: dodawaniu, odejmowaniu i mnożeniu wartości funkcji f i g dla tych samych argumentów.

Na przykład, jeśli $f(x) = 2x - 1$ i $g(x) = -x + 2$, to:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (2x-1) + (-x+2) = x+1,$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (2x-1) - (-x+2) = 3x-3,$$

$$(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot g(x) = (2x-1)(-x+2) = -2x^2+5x-2,$$

$$(4\cdot f)(x) = 4\cdot f(x) = 4\cdot(2x-1) = 8x-4, \text{ dla każdej liczby rzeczywistej } x,$$

$$\text{zaś } \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{2x-1}{-x+2}, \text{ gdy } x \neq 2.$$

Pytania i zadania

1. Wyjaśnij pojęcia:
   a) wartość funkcji w punkcie,
   b) miejsce zerowe funkcji,
   c) punkt stały funkcji.
2. Jaką funkcję nazywamy tożsamościową w zbiorze?
3. Kiedy dwie funkcje są równe?
4. Podaj przykłady par funkcji: a) równych, b) nierównych.
5. Jakie działania możemy wykonywać na funkcjach?
6. Dana jest funkcja $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$. Oblicz:
   a) $f(1)$; b) $f(-3)$; c) $f(a)$; d) $f\left(\frac{1}{a}\right)$; e) $f\left(\frac{1}{a^2}\right)$; f) $f(\sqrt{a})$.
7. Które z podanych niżej funkcji f i g są równe:
   a) $f(x) = -x$, $g(x) = -\sqrt{x^2}$; b) $f(x) = |x|$, $g(x) = x\cdot \operatorname{sgn} x$;
   c) $f(x) = x+1$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$; d) $f(x) = \frac{1}{2}(x+|x|)$, $g(x) = x$.
8. Dane są funkcje $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$, $g(x) = (\sqrt{x})^2$.
   W jakim zbiorze określone są funkcje:
   a) $f(x)+g(x)$; b) $f(x)-g(x)$; c) $f(x)\cdot g(x)$; d) $\frac{f(x)}{g(x)}$?
   Podaj ich wzory.
9. Znajdź miejsca zerowe funkcji:
   a) $f(x) = 3x-2$; b) $f(x) = 4-x^2$; c) $f(x) = x^2-3x$;
   d) $f(x) = \begin{cases} 2x-1: & x \geqslant 0 \\ -x^2+1: & x < 0; \end{cases}$ e) $f(x) = \sqrt{x}-1$; f) $f(x) = \begin{cases} x^2-2: & x \in W \\ x^2-1: & x \notin W. \end{cases}$

10. Znajdź punkty stałe funkcji:

a) $f(x)=-2x+3$; b) $f(x)=x^2-4x$; c) $f(x)=\begin{cases}1; & x\in W\\ 0; & x\notin W;\end{cases}$ d) $f(x)=[x]$.

11*. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{x^2}{1+x^2}$. Wykaż, że $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=1$ dla każdej liczby x różnej od zera.

12*. Rozstrzygnij, czy istnieją funkcje $f\colon R\to R$ i $g\colon R\to R$ takie, że $f(x)+g(y)=x^2+xy+y^2$ dla wszystkich liczb rzeczywistych x i y.

13*. Funkcje $f\colon R\to R$ i $g\colon R\to R$ spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x równość

$f(x)+f(1-x)=x\cdot g(x)$.

Udowodnij, że istnieje liczba rzeczywista c taka, że $g(c)=0$.

14*. Dana jest funkcja $f(x)=\frac{3x+9-p}{x+3}$,

gdzie p jest liczbą pierwszą. Wyznacz wszystkie liczby całkowite x, dla których funkcja ta przyjmuje wartości całkowite.

15. Niech $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$, $g(x)=x+\frac{1}{x}$. Wyznacz:

$g\left(\frac{1}{x^2}\right)-f\left(\frac{1}{x}\right)$.

16. Znajdź sumę funkcji f i g określonych wzorami:

$f(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } x<0\\ -x, & \text{gdy } x\geqslant 0,\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}x, & \text{gdy } x<1\\ -x, & \text{gdy } x\geqslant 1.\end{cases}$

17. Znajdź iloczyn funkcji f i g, jeśli:

$f(x)=\begin{cases}-x, & \text{gdy } x<0\\ 1, & \text{gdy } x\geqslant 0,\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1, & \text{gdy } x<0\\ -x, & \text{gdy } x\geqslant 0.\end{cases}$

5. Najmniejsza i największa wartość funkcji

Gdy badamy wartości funkcji na danym zbiorze, bardzo często interesuje nas, czy wśród nich istnieje wartość najmniejsza i największa. Funkcja może przyjmować obie te wartości bądź też tylko jedną z nich, ale może też nie osiągać żadnej.

Jeśli zbiór wartości funkcji jest skończony, to znalezienie wśród nich wartości najmniejszej i największej jest rzeczą łatwą. Problem ten komplikuje się wówczas, gdy ten zbiór jest nieskończony. Prześledzimy to na wielu przykładach. Zacznijmy jednak od definicji.

!

Mówimy, że funkcja $f\colon X\to Y$ przyjmuje w punkcie x_0 ze zbioru X wartość najmniejszą m ze zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0)=m$, oraz, że dla każdego x ze zbioru X zachodzi nierówność

$$f(x)\geqslant f(x_0).$$

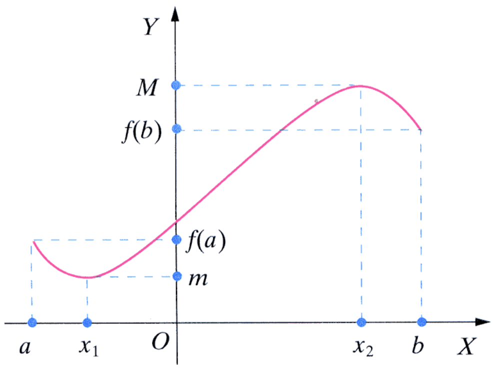
Piszemy wtedy $\quad m=\min\{f(x): x\in X\}$.

Mówimy, że funkcja $f: X \to Y$ przyjmuje w punkcie x_0 ze zbioru X wartość największą M ze zbioru Y wtedy i tylko wtedy, gdy $f(x_0) = M$, oraz, że dla każdego x ze zbioru X zachodzi nierówność

$$f(x) \leqslant f(x_0).$$

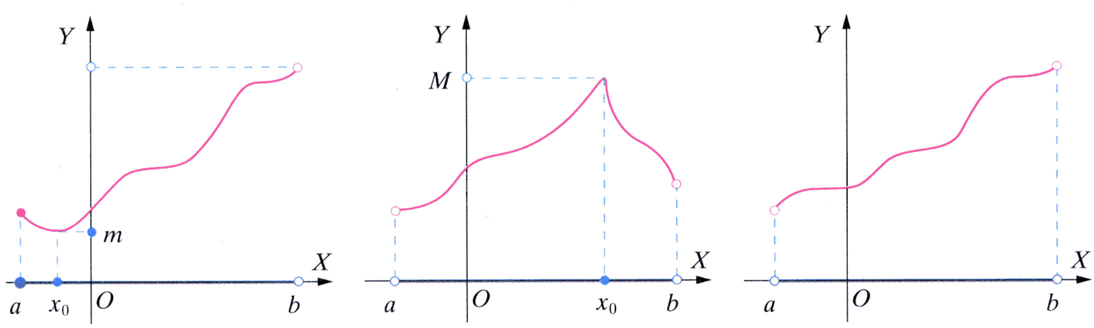
Wówczas piszemy $$M = \max\{f(x) : x \in X\}.$$

Na przykład funkcja $f: \langle a, b\rangle \to R$, której wykres widzimy na rycinie 5.19, osiąga wartość najmniejszą w punkcie x_1, a wartość największą w punkcie x_2.



Ryc. 5.19.

Wykresy na rycinie 5.20 przedstawiają funkcje, z których pierwsza osiąga w przedziale $\langle a; b)$ wartość najmniejszą, druga – w przedziale $(a; b)$ wartość największą, zaś trzecia nie osiąga w przedziale $(a; b)$ ani wartości najmniejszej, ani największej.



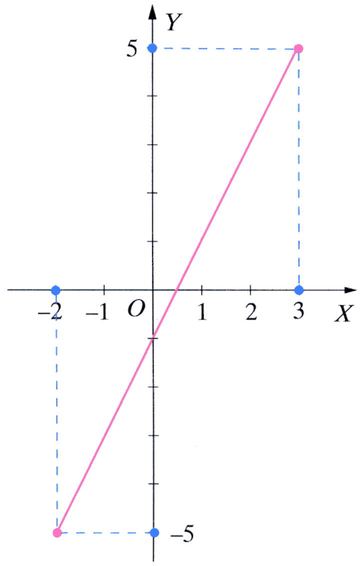
Ryc. 5.20.

Obecnie przejdziemy do wyznaczania wartości największej i najmniejszej funkcji określonych wzorami. Korzystać przy tym będziemy z własności nierówności w zbiorze R liczb rzeczywistych.

Przykład 1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = 2x - 1$, gdy $x \in \langle -2; 3\rangle$.

Rozwiązanie:

Możemy tutaj posłużyć się wykresem tej funkcji.



Ryc. 5.21.

Widzimy, że $\min\{f(x): x \in \langle -2; 3\rangle\} = -5 = f(-2)$, a $\max\{f(x): x \in \langle -2; 3\rangle\} = 5 = f(2)$.

Możemy też posłużyć się elementarnymi własnościami nierówności w zbiorze R liczb rzeczywistych. Mianowicie

$$x \in \langle -2; 3\rangle \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 3 \Leftrightarrow -4 \leqslant 2x \leqslant 6 \Leftrightarrow -5 \leqslant 2x - 1 \leqslant 5,$$

czyli $-5 \leqslant f(x) \leqslant 5$, przy czym $f(x) = -5$, gdy $x = -2$,

zaś $f(x) = 5$, gdy $x = 2$.

Przykład 2. Wyznacz najmniejszą wartość funkcji $f(x) = 2x^2 + 1$.

Rozwiązanie:

Dziedziną tej funkcji jest zbiór R liczb rzeczywistych. Dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi nierówność $x^2 \geqslant 0$, która jest równoważna nierówności $2x^2 + 1 \geqslant 1$. Ponadto $f(x) = 1$, gdy $x = 0$.

Zatem $\min\{f(x): x \in R\} = 1$.

Przykład 3. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

Rozwiązanie:

Dziedziną tej funkcji jest zbiór R liczb rzeczywistych, gdyż $1 + x^2 \neq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Ponieważ zachodzą nierówności

$(x-1)^2 \geqslant 0$ i $(x+1)^2 \geqslant 0$, czyli kolejno nierówności

$x^2 + 1 \geqslant 2x$ i $x^2 + 1 \geqslant -2x$,

$\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \dfrac{1}{2}$ i $\dfrac{1}{1+x^2} \geqslant -\dfrac{1}{2}$, więc dla każdej liczby rzeczywistej x mamy $-\frac{1}{2} \leqslant \frac{x}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{2}$, czyli $-\frac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}$. Przy tym widzimy też, że $f(x)=-\frac{1}{2}$ dla $x=-1$ oraz, $f(x)=\frac{1}{2}$, gdy $x=1$.

Zatem $\min\{f(x): x\in R\}=-\frac{1}{2}$, zaś $\max\{f(x): x\in R\}=\frac{1}{2}$.

Przykład 4. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x)=x+\frac{1}{x}$.
Rozwiązanie:

Funkcja ta jest, oczywiście, określona w zbiorze $R\setminus\{0\}$.

Korzystając z nierówności $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$ (która zachodzi, jak wiemy, dla dowolnych liczb niujemnych a i b), otrzymujemy:

$$f(x)=x+\frac{1}{x}\geqslant 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}=2, \text{ gdy } x>0$$

oraz $f(x)=x+\frac{1}{x}=-\left((-x)+\frac{1}{(-x)}\right)\leqslant -2\cdot\sqrt{(-x)\cdot\frac{1}{(-x)}}=-2$, gdy $x<0$.

Przy tym $f(x)=2$, gdy $x=1$, zaś $f(x)=-2$, gdy $x=-1$.

Zatem $\min\{f(x): x\in R\}=-2$, $\max\{f(x): x\in R\}=2$.

Przykład 5. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x)=x^4-x^2-2x-5$ przyjmuje wartość najmniejszą?
Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że

$$f(x)=x^4-x^2-2x-5=(x^4-2x^2+1)+(x^2-2x+1)-7=(x^2-1)^2+(x-1)^2-7.$$

Ponieważ $(x^2-1)^2\geqslant 0$ i $(x-1)^2\geqslant 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x, przeto $f(x)\geqslant -7$, gdy $x\in R$. Ponadto $f(x)=-7$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x^2-1=0$ i $x-1=0$, czyli gdy $x=1$. Zatem $\min\{f(x): x\in R\}=-7$, przy czym $f(x)=-7$, gdy $x=1$.
Odpowiedź: Dana funkcja przyjmuje wartość najmniejszą dla $x=1$.

Przykład 6. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x)=4x-x^2$ przyjmuje wartość największą?
Rozwiązanie:

Zapiszmy wzór danej funkcji w postaci równoważnej, mianowicie

$$f(x)=4x-x^2=(-x^2+4x-4)+4=-(x^2-4x+4)+4=-(x-2)^2+4.$$

Widzimy teraz, że $f(x)\leqslant 4$ dla każdej liczby rzeczywistej x, (bo $(x-2)^2\geqslant 0$), przy czym $f(x)=4 \Leftrightarrow x=2$.

Zatem $\max\{f(x): x\in R\}=4$ oraz $f(x)=4$, gdy $x=2$.

Przykład 7. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x)=x^4-2x^2$ przyjmuje wartość najmniejszą?
Rozwiązanie:

Funkcję tę możemy też zapisać równoważnie:

$$f(x)=x^4-2x^2=(x^4-2x^2+1)^2-1=(x^2-1)^2-1.$$

Stąd $f(x) \geqslant -1$ dla każdej liczby rzeczywistej x, przy czym $f(x) = -1$, gdy $x = -1$ lub $x = 1$. Zatem $\min\{f(x) : x \in R\} = -1$.
Odpowiedź: Funkcja ta przyjmuje wartość najmniejszą (równą -1) w punktach $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.

Pytania i zadania

1. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji:

   a) $f(x) = -x + 2$, gdy $x \in \langle -1; 3 \rangle$; b) $f(x) = \frac{1}{x}$, gdy $x \in \langle -2; -1 \rangle$;

   c) $f(x) = -x^2 + 4$, gdy $x \in \langle -2; 1 \rangle$; d) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{1+x^2}$, gdy $x \in R$.

2. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$ osiąga wartość największą?
3. Dla jakiej wartości x funkcja $f(x) = -x^4 + x^2 - 2x + 5$ osiąga wartość największą?
4. Który z prostokątów o obwodzie 4 ma największe pole?
5. Który z prostokątów o polu 1 ma najmniejszy obwód?

6. Ogólne własności funkcji liczbowych

Różnowartościowość

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy **różnowartościową** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych elementów x_1, x_2, zbioru X prawdziwa jest implikacja

$$(*) \qquad x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2).$$

Inaczej mówiąc, funkcję $f : X \to Y$ nazywamy różnowartościową w zbiorze X, jeśli **różnym** elementom zbioru X przyporządkowuje ona **różne** elementy zbioru Y.
Uwaga. Warunek $(*)$ na mocy znanej tautologii $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q) \Rightarrow (\sim p)]$ jest równoważny warunkowi

$$(**) \qquad f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Funkcja $f : X \to Y$ **nie jest** więc **różnowartościowa** w zbiorze X, gdy **pewnym różnym** elementom x_1, x_2 zbioru X przyporządkowuje ona **równe** wartości $f(x_1)$ i $f(x_2)$ ze zbioru Y.

Przykład 1. Funkcja $f(x) = 3x + 1$ jest różnowartościowa w zbiorze R.
Istotnie, dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2 mamy:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow 3x_1 = 3x_2 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Przykład 2. Funkcja $f(x) = \frac{1}{x}$ jest różnowartościowa w zbiorze $R \setminus \{0\}$, gdyż dla dowolnych różnych od zera liczb rzeczywistych x_1, x_2 mamy

$$f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow \frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1=x_2.$$

Przykład 3. Niech $X=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, $Y=\{y_1,y_2,...,y_n\}$. Zauważmy, że jeśli $m>n$, to żadna funkcja $f:X\to Y$ nie jest różnowartościowa.

Spostrzeżenie to znane jest jako tak zwana **zasada szufladkowa Dirichleta**. Najprościej można ją wyrazić następująco:

Jeżeli m przedmiotów rozmieścimy w n szufladkach i $m>n$, to w którejś szufladce znajdą się co najmniej dwa przedmioty.

Aż dziw bierze, że tak oczywisty fakt, dający się tak prosto wyrazić, ma tak wiele nietrywialnych zastosowań. Przytoczmy chociaż dwa przykłady.

Przykład 4. W pewnym turnieju bierze udział n drużyn. Każda z nich rozgrywa po jednym meczu z pozostałymi drużynami turnieju. Udowodnij, że w każdym momencie turnieju znajdziemy dwie drużyny, które rozegrały tę samą liczbę meczów.
Rozwiązanie:

Nie może się tak zdarzyć, aby w dowolnym momencie znalazły się dwie drużyny, z których jedna rozegrałaby wszystkie mecze, a druga nie rozegrałaby żadnego. Zatem w każdym momencie turnieju każda z drużyn rozegrała 0, 1, 2, ..., $n-2$ mecze albo 1, 2, 3, ..., $n-1$ meczów. Przyjmując za „szufladki” liczby 0, 1, 2, ..., $n-2$ albo liczby 1, 2, ..., $n-1$, a za „przedmioty” drużyny biorące udział w turnieju, otrzymujemy na mocy zasady szufladkowej Dirichleta tezę zadania.

Przykład 5. Wykaż, że w mieście liczącym 200000 mieszkańców, znajdziemy dwóch mających tę sama liczbę włosów na głowie, przyjmując, że każdy ma na swojej głowie nie więcej niż 100 000 włosów.
Rozwiązanie:

Umieśćmy mieszkańców tego miasta w „szufladkach” ponumerowanych liczbami całkowitymi od 0 do 100 000. W „szufladce” o numerze k (k = 0, 1, 2, ..., 100 000) znajdą się osoby mające k włosów na swej głowie. Ponieważ 200 000 > 100 001, więc na mocy zasady Dirichleta co najmniej dwie osoby mają tę samą liczbę włosów na głowie.

Monotoniczność

Funkcję $f:X\to Y$ nazywamy **malejącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 ze zbioru X **większemu** z nich odpowiada **mniejsza** wartość funkcji.

Inaczej mówiąc: funkcję $f:X\to Y$ nazywamy malejącą w zbiorze X, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 ze zbioru X prawdziwa jest implikacja:

(*) $$x_1<x_2 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Przykład 1. Funkcja $f(x)=-2x+1$ jest malejąca w zbiorze R, gdyż dla dowolnych liczb rzeczywwistych x_1,x_2, jeśli $x_1<x_2$, to $-2x_1>-2x_2$, czyli $-2x_1+1>-2x_2+1$, co oznacza, że $f(x_1)>f(x_2)$.

!

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **rosnącą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych dwóch argumentów x_1, x_2 ze zbioru X **większemu** z nich odpowiada **większa** wartość funkcji.

Innymi słowy: funkcję $f: X \to Y$ nazywamy rosnącą w zbiorze X, gdy dla dowolnych argumentów x_1, x_2 ze zbioru X prawdziwa jest implikacja:

$$(**) \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Przykład 2. Funkcja $f(x) = 3x - 1$ jest rosnąca w zbiorze R, gdyż dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, jeśli $x_1 < x_2$, to $3x_1 < 3x_2$, czyli $3x_1 - 1 < 3x_2 - 1$, a więc $f(x_1) < f(x_2)$.

Jeżeli powyższe implikacje $(*)$ i $(**)$ zastąpimy odpowiednio implikacjami:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geqslant f(x_2)$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2),$$

to otrzymamy wówczas definicję odpowiednio funkcji **nierosnącej** i **niemalejącej**.

Funkcje: malejące, rosnące, nierosnące, niemalejące obejmujemy wspólną nazwą funkcji **monotonicznych**.

Czasami funkcje rosnące i malejące nazywa się **ściśle monotonicznymi**, zaś niemalejące i nierosnące – **monotonicznymi w szerszym sensie**.

Zbadać monotoniczność funkcji oznacza zbadać, czy funkcja jest rosnąca, niemalejąca, malejąca czy nierosnąca.

Przykład 3. Zbadaj monotoniczność funkcji:

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$$

w zbiorze R_+ liczb dodatnich.

Rozwiązanie:

Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami dodatnimi i niech $x_1 < x_2$. Zbadajmy znak różnicy $f(x_1) - f(x_2)$.

Mamy:

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2}{x_1^2 + 1} - \frac{x_2^2}{x_2^2 + 1} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} = \frac{(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)} < 0,$$

gdyż $x_1^2 + 1 > 0$, $x_2^2 + 1 > 0$, $x_1 + x_2 > 0$, zaś $x_1 - x_2 < 0$

Zatem $\bigwedge\limits_{x_1 \in R_+} \bigwedge\limits_{x_2 \in R_+} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Dana funkcja jest więc rosnąca w zbiorze R_+.

Przykład 4. Zbadaj monotoniczność funkcji $f(x) = [x]$.

Rozwiązanie:

Wykażemy, że dana funkcja jest niemalejąca w zbiorze R. Niech x_1, x_2 będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi takimi, że $x_1 < x_2$. Ponieważ z definicji symbolu $[x]$ zachodzi nierówność $[x_1] \leqslant x_1$, więc otrzymujemy już nierówności: $[x_1] \leqslant x_1 < x_2$, skąd $[x_1] < x_2$.

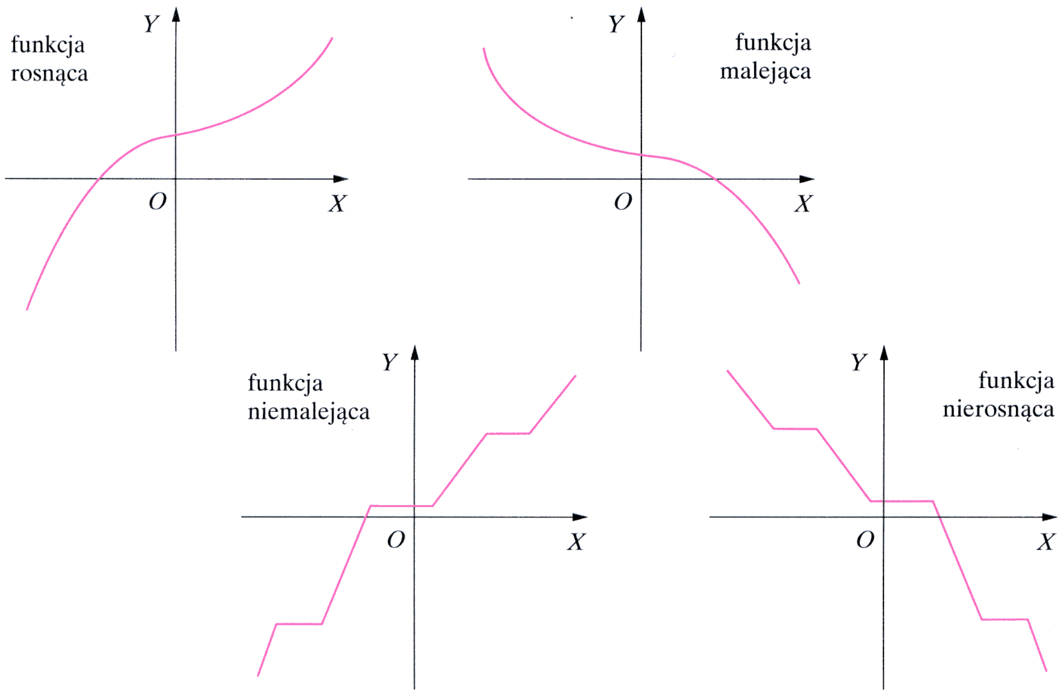
Ale $[x_1]$ jest liczbą całkowitą mniejszą od x_2, zaś $[x_2]$ jest największą spośród wszystkich liczb całkowitych nie większych od x_2, stąd wynika nierówność $[x_1] \leqslant [x_2]$.

Zatem funkcja $f(x) = [x]$ spełnia warunek:

$$\bigwedge_{x_1 \in R_+} \bigwedge_{x_2 \in R_+} x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2).$$

Jest więc niemalejąca w zbiorze R.

Oto funkcje monotoniczne przedstawione na wykresach:



Ryc. 5.22.

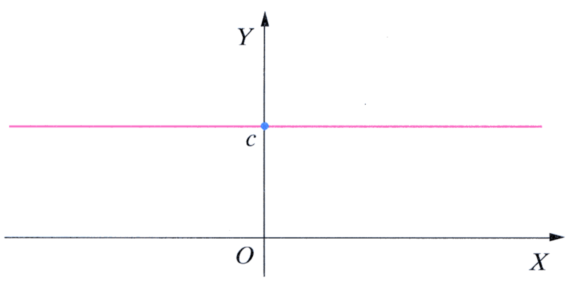
Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **stałą** w zbiorze X, jeśli dla dowolnych x_1, x_2 ze zbioru X zachodzi równość $f(x_1) = f(x_2)$.

!

Przykład 5. Funkcja $f(x) = c$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest stała w zbiorze R.

Wniosek. Funkcja nierosnąca w zbiorze X i niemalejąca w tym zbiorze jest stała.

Oto funkcja stała $f(x) = c$ przedstawiona na wykresie.



Ryc. 5.23.

Okresowość

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **okresową** w zbiorze X, jeśli istnieje liczba t różna od zera taka, że dla każdego x ze zbioru X

$$(*) \qquad x+t \in X \text{ i } f(x+t)=f(x).$$

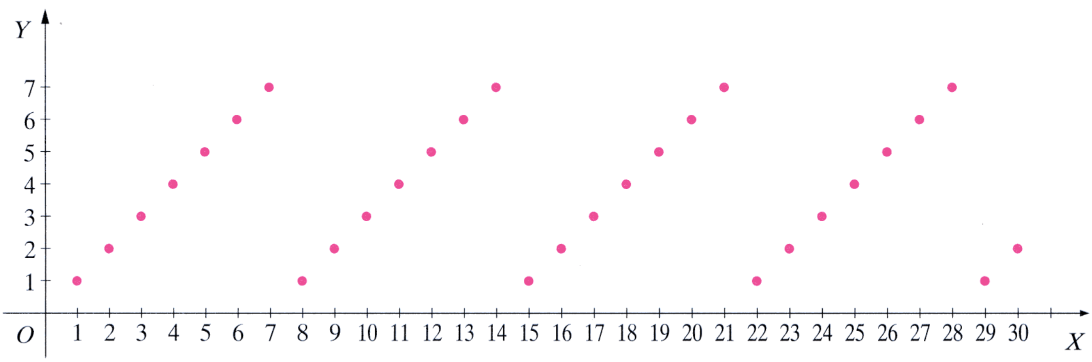
Liczbę t o własności $(*)$ nazywamy **okresem** funkcji f.

Uwaga. Jeżeli istnieje najmniejsza liczba dodatnia t o własności $(*)$, to nazywamy ją **zasadniczym** albo **podstawowym** okresem funkcji f.

Przykład 1. Niech x oznacza kolejne dni miesiąca zaczynającego się w poniedziałek (np. kwietnia 2002 r.), zaś y – numer kolejnego dnia tygodnia (ponumerujmy te dni liczbami od 1 do 7). Każdemu x przyporządkujmy y. Otrzymamy funkcję okresową o okresie zasadniczym 7.

Oto jej tabelka i wykres:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
y	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	5	6	7	1	2



Ryc. 5.24.

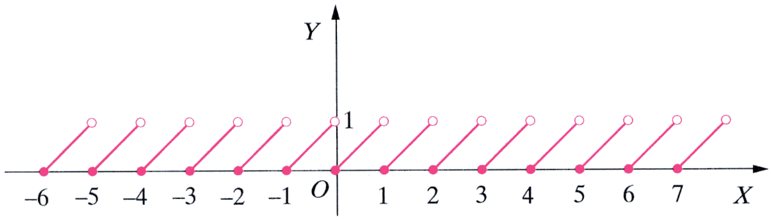
Przykład 2. Przyporządkujmy każdej liczbie całkowitej n jej resztę z dzielenia przez 5. Liczbę n możemy przedstawić jednoznacznie w postaci:

$$n=5k+r, \text{ gdzie } k \in C, \quad r \in \{0,1,2,3,4\}.$$

Otrzymamy funkcję zadaną wzorem $f(n)=r$.

Jest to funkcja okresowa o okresie podstawowym 5. Wykres funkcji okresowej jest bardzo charakterystyczny. Składa się on z przystających do siebie części, z których każda odpowiada wartościom x należącym do przedziału o długości równej okresowi podstawowemu.

Przykład 3. Przyglądając się wykresowi funkcji $f(x)=x-[x]$, gdzie $x \in R$ (ryc. 5.25), widzimy, że funkcja ta jest okresowa, a jej okresem jest każda liczba całkowita różna od 0.



Ryc. 5.25.

Wykażemy okresowość tej funkcji. W tym celu udowodnimy najpierw następujący lemat (twierdzenie pomocnicze).

Lemat. Dla każdej liczby rzeczywistej x oraz każdej liczby całkowitej k zachodzi równość $[x+k]=[x]+k$.

Dowód. Z definicji liczba $[x+k]$ jest największą spośród tych liczb całkowitych, które są nie większe od $x+k$. Ale $[x]\leqslant x$, więc $[x]+k\leqslant x+k$ i liczba $[x]+k$ też jest największą liczbą całkowitą nie większą od $x+k$ (bo $[x]$ jest największą liczbą całkowitą nie większą niż x). Zatem $[x+k]=[x]+k$.

Powróćmy teraz do funkcji $f(x)=x-[x]$. Dla każdej liczby rzeczywistej x i każdej liczby całkowitej k mamy

$$f(x+k)=(x+k)-[x+k]=(x+k)-([x]+k)=x-[x]=f(x),$$

co dowodzi okresowości funkcji $f(x)$.

Przykład 4. Każda funkcja stała, to znaczy funkcja postaci $f(x)=c$, gdzie c jest ustaloną liczbą rzeczywistą, jest okresowa w zbiorze R. Jej okresem jest każda liczba rzeczywista różna od 0.

Przykład 5*. Funkcja

$$D(x)=\begin{cases}1: & x\in W\\ 0: & x\notin W\end{cases}$$

(tzw. funkcja Dirichleta) jest okresowa. Jej okresem jest każda liczba wymierna różna od zera.

Istotnie, niech t będzie dowolną liczbą wymierną, różną od zera. Ponieważ $x+t\in W\Leftrightarrow x\in W$ oraz $x+t\notin W\Leftrightarrow x\notin W$, a ponadto zgodnie z określeniem funkcji $D(x)$ mamy

$$D(x+t)=\begin{cases}1: & x+t\in W\\ 0: & x+t\notin W,\end{cases}$$

przeto rzeczywiście $D(x+t)=D(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

Przykład 6*. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f:R\to R$ spełnia dla każdego $x\in R$ warunek

$$(*)\ f(x+a)=\frac{1-f(x)}{1+f(x)},\ \text{gdzie}\ a\neq 0,$$

to jest okresowa w zbiorze R.

Rozwiązanie:

Ponieważ warunek $(*)$ zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej x, więc podstawiając w tej równości $x+a$ w miejsce x, otrzymujemy

$$f(x+2a)=\frac{1-f(x+a)}{1+f(x+a)}\overset{(*)}{=}\frac{1-\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}{1+\dfrac{1-f(x)}{1+f(x)}}=\frac{\dfrac{1+f(x)-\left(1-f(x)\right)}{1+f(x)}}{\dfrac{1+f(x)+1-f(x)}{1+f(x)}}=$$

$$=\frac{1+f(x)-1+f(x)}{1+f(x)+1-f(x)}=\frac{2f(x)}{2}=f(x).$$

Stąd $f(x+2a)=f(x)$, co dowodzi okresowości funkcji f.

Parzystość i nieparzystość

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **parzystą** w zbiorze X, jeśli dla każdego x ze zbioru X

$$-x \in X \text{ i } f(-x)=f(x).$$

Przykład 1. Każda funkcja stała jest parzysta w zbiorze R.

Przykład 2. Funkcja $f(x)=|x|$ jest parzysta w zbiorze R. Istotnie, jeśli $x \in R$, to $-x \in R$ oraz $f(-x)=|-x|=|x|=f(x)$.

Przykład 3. Funkcja $f(x)=x^n$ jest parzysta:
- w zbiorze R, gdy n jest liczbą parzystą dodatnią,
- w zbiorze $R\setminus\{0\}$, gdy n jest liczbą parzystą niedodatnią.

Wynika to z określenia potęgi o wykładniku całkowitym.

Przykład 4. Dla dowolnej funkcji $f:(-a;a)\to R$, gdzie $a>0$, funkcja $g(x)=f(x)+f(-x)$ jest parzysta w przedziale $(-a;a)$.

Istotnie, jeśli $x\in(-a;a)$, to $-x\in(-a;a)$ oraz $g(-x)=f(-x)+f(-(-x))=$ $=f(-x)+f(x)=g(x)$.

Funkcję $f: X \to Y$ nazywamy **nieparzystą** w zbiorze X, jeśli dla każdego x ze zbioru X

$$-x \in X \text{ i } f(-x)=-f(x).$$

Przykład 5. Funkcja $f(x)=x^n$ jest nieparzysta:
- w zbiorze R, gdy n jest liczbą nieparzystą dodatnią,
- w zbiorze $R\setminus\{0\}$, gdy n jest liczbą nieparzystą ujemną.

Wynika to z określenia potęgi o wykładniku całkowitym.

Przykład 6. Dla dowolnej funkcji $f:(-a;a)\to R$, gdzie $a>0$, funkcja $h(x)=f(x)-f(-x)$ jest nieparzysta w przedziale $(-a;a)$.

Rzeczywiście, jeśli $x \in (-a; a)$, to

$-x \in (-a; a)$ oraz $h(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) =$

$= -(f(x) - f(-x)) = -h(x).$

Wniosek. Każdą funkcję $f:(-a;a) \to R$, gdzie $a > 0$, można jednoznacznie przedstawić w postaci sumy funkcji parzystej i nieparzystej

▢ Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla każdej liczby x z przedziału $(-a;a)$ zachodzi równość

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}. \ ▢$$

Pytania i zadania

1. Podaj określenie funkcji różnowartościowej.
2. Podaj określenie funkcji monotonicznej.
3. Co to jest funkcja okresowa?
4. Jaką funkcję nazywamy parzystą, a jaką nieparzystą w zbiorze X?
5. Wykaż, że poniższe funkcje są różnowartościowe w swojej dziedzinie:

   a) $f(x) = 2x - 4$; b) $g(x) = -3\sqrt{2}x + 3$; c) $h(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{x-1}$;

   d) $i(x) = \dfrac{3-x}{x+1}$; e) $j(x) = x^3 + x + 1$.
6. Udowodnij, że funkcja:

   a) $f(x) = 3 - x$ jest malejąca w zbiorze R;

   b) $f(x) = 3\sqrt{2}x + \sqrt{3}$ jest rosnąca w zbiorze R;

   c) $f(x) = -\dfrac{5}{x}$ jest rosnąca w zbiorze R_-;

   d) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ jest malejąca w przedziale $(-\infty; 1)$;

   e) $f(x) = x^3 - x^2 + x$ jest rosnąca w zbiorze R.
7. Udowodnij, że funkcja ściśle monotoniczna w zbiorze ma co najwyżej jedno miejsce zerowe.

8*. Funkcja $f: R \to R$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek

$$f(x+a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)},$$

gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera. Udowodnij, że f jest okresowa.

9*. Funkcje $f: R \to R$ oraz $g: R \to R$ spełniają dla każdej liczby rzeczywistej x warunki: $f(x+a) = g(x)$ i $g(x+a) = -f(x)$, gdzie a jest ustaloną liczbą rzeczywistą różną od zera. Udowodnij, że funkcje f i g są okresowe.

10. Które z podanych niżej funkcji są parzyste, które nieparzyste, a które nie są ani parzyste, ani nieparzyste?

a) $f(x)=x\cdot|x|$; b) $f(x)=1-x^2$; c) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$;

d) $f(x)=\frac{1}{2}-x^2$; e) $f(x)=x^5-2x^3$; f) $f(x)=\frac{|x|}{x}$.

11*. Udowodnij, że funkcja

$$f(x)=\frac{\sqrt{1+x^2}+x-1}{\sqrt{1+x^2}+x+1},$$

jest nieparzysta w zbiorze R.

12*. Wykaż, że funkcja $f: R\to R$, spełniająca dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y warunek $f(x+y)=f(x)+f(y)$, jest nieparzysta w zbiorze R.

13*. Udowodnij, że funkcja

$$f(x)=\left(\frac{1-2x^3}{1+x^3}\right)^3+\left(\frac{x(2-x^3)}{1+x^3}\right)^3+x^3$$

jest stała w swojej dziedzinie.

14*. Dana jest funkcja

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$,

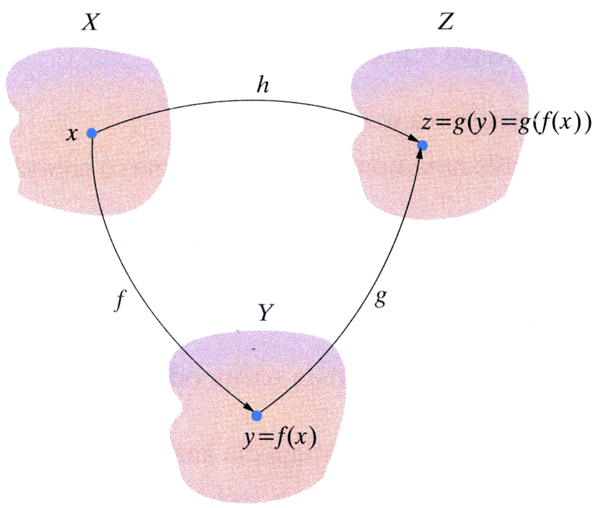
taka że $f(-1)=f(1)$ i $f(-2)=f(2)$. Wykaż, że f jest funkcją parzystą.

15. Na Ziemi żyje ponad 4 mld ludzi. Wiadomo, że wśród nich co najwyżej 1% ma ponad sto lat. Udowodnij, że pewne dwie osoby urodziły się w tej samej sekundzie.

16. W klasie jest 40 uczniów. Udowodnij, że co najmniej czterech z nich obchodzi swoje urodziny w tym samym miesiącu.

7. Składanie funkcji

Niech dana będzie funkcja $f: X \overset{na}{\to} Y$ oraz funkcja $g: Y\to Z$, która każdej wartości y funkcji f w punkcie x przyporządkuje element $g(y)$ zbioru Z.



Ryc. 5.26.

Otrzymamy w ten sposób nową funkcję $h: X \to Z$, która każdemu elementowi x zbioru X przyporządkowuje $g(f(x)) \in Z$. Funkcję h nazywamy złożeniem funkcji f i g albo funkcją złożoną z funkcji f i g i oznaczamy symbolicznie jako $g \circ f$.

Złożeniem albo **superpozycją** funkcji $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ nazywamy funkcję $h: X \to Z$, określoną dla każdego x ze zbioru X wzorem $h(x) = g(f(x))$.

Zatem $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Funkcję f nazywamy w tym złożeniu funkcją **wewnętrzną**, zaś g – funkcją **zewnętrzną**. Funkcją wewnętrzną w złożeniu $g \circ f$ jest ta pierwsza z prawej strony.

Przykład 1. Niech $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{3}, 3\}$, zaś $Z = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ oraz niech funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ określają tabelki:

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\sqrt{2}$	1	2	1	2

x	1	$\sqrt{2}$	2	$\sqrt{3}$	3
$g(x)$	0	1	−2	−3	1

Wówczas funkcję $h = g \circ f$ określa tabelka:

x .	1	2	3	4	5
$g(f(x))$	1	0	−2	0	−2

gdyż

$$g(f(1)) = g(\sqrt{2}) = 1, \quad g(f(2)) = g(1) = 0,$$

$$g(f(3)) = g(2) = -2, \quad g(f(4)) = g(1) = 0,$$

$$g(f(5)) = g(2) = -2.$$

Przykład 2. Niech $f: R \to R$ będzie określona wzorem $f(x) = x^2 + 1$, zaś $g: R \to R$ – wzorem $g(x) = 2 - x$. Czym jest złożenie $g \circ f$? A czy złożenie $f \circ g$ to ta sama funkcja co złożenie $g \circ f$?

Rozwiązanie:

Mamy

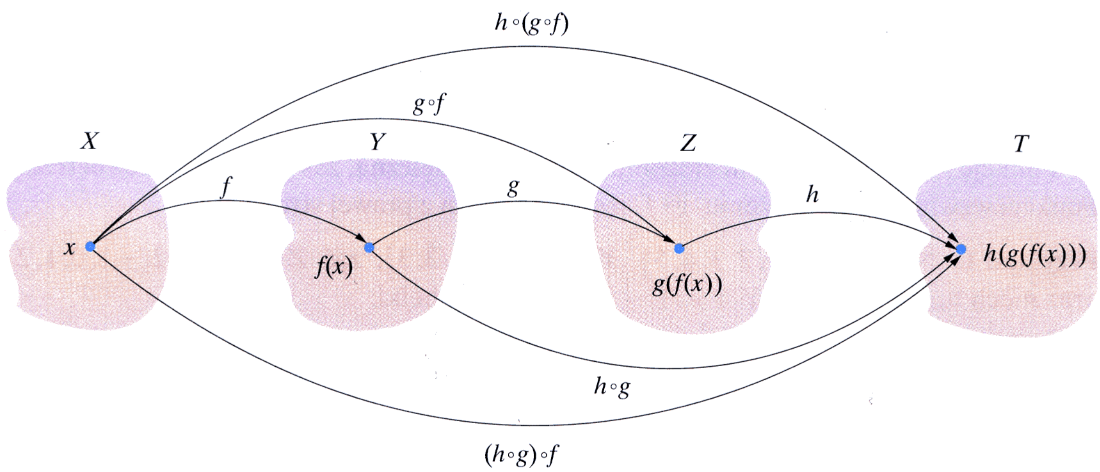
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 2 - f(x) = 2 - (x^2 + 1) = -x^2 + 1,$$

zaś $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = (2 - x)^2 + 1 = x^2 - 4x + 5.$

Ponieważ na przykład: $(g \circ f)(0) = 1$, $(f \circ g)(0) = 5$, więc $f \circ g \neq f \circ g$.

Wniosek. Składanie funkcji **nie jest** działaniem **przemiennym**.

A czy jest ono działaniem łącznym? Rozważmy funkcje: $f: X \to Y, g: Y \to Z$ i $h: Z \to T$ i przyjrzyjmy się grafowi (ryc. 5.27).



Ryc. 5.27.

Widzimy, że gdy $x \in X$, to

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x)))$$

oraz

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))),$$

tak więc dla każdego x ze zbioru X mamy równość

$$(h \circ (g \circ f))(x) = ((h \circ g) \circ f)(x).$$

Wniosek. Składanie funkcji **jest** działaniem **łącznym**.

Przykład 3. Dane są funkcje: $f(x) = -2x + 1$; $g(x) = x^2$; $h(x) = \sqrt[3]{x-1}$.
Wyznacz: $h \circ (g \circ f)$ i $(h \circ g) \circ f$.
Rozwiązanie:

$$(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = \sqrt[3]{g(f(x)) - 1} =$$

$$= \sqrt[3]{(f(x))^2 - 1} = \sqrt[3]{(-2x+1)^2 - 1} = \sqrt[3]{4x^2 - 4x},$$

$$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(-2x+1) = h(g(-2x+1)) =$$

$$= h\left((-2x+1)^2\right) = \sqrt[3]{(-2x+1)^2 - 1} = \sqrt[3]{4x^2 - 4x}.$$

Przykład 4. Niech $f(x) = 3x - 2$. Wyznacz $f \circ f$ i $f \circ f \circ f$.
Rozwiązanie:

Oczywiście $f: R \to R$.

Dla każdej liczby rzeczywistej x mamy:

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = 3f(x) - 2 = 3(3x - 2) = 9x - 6,$$

$$(f \circ f \circ f)(x) = f(f(f(x))) = f(9x - 6) = 3(9x - 6) - 2 = 27x - 20.$$

Przykład 5. Wyznacz $(f \circ f \circ f)(x)$, jeśli $f(x) = \frac{1}{1 - x}$.
Rozwiązanie:

Oczywiście $f: R \setminus \{1\} \to R \setminus \{0\}$.

Dla $x \in R \setminus \{0, 1\}$ mamy:

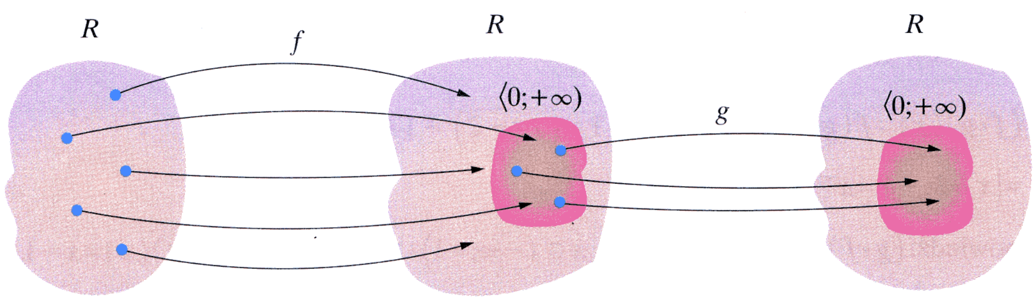
$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{1 - f(x)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - x}} = \frac{x - 1}{x},$$

zaś $(f \circ f \circ f)(x) = f((f \circ f)(x)) = f(f(f(x))) = \dfrac{1}{1 - f^2(x)} = \dfrac{1}{1 - \frac{x - 1}{x}} = \dfrac{x}{x - (x - 1)} = x.$

Dotąd składaliśmy funkcje w całej dziedzinie funkcji wewnętrznej, gdyż zbiór wartości tej funkcji był podzbiorem dziedziny funkcji zewnętrznej. Nie zawsze jednak tak jest. Jeśli zbiór wartości funkcji wewnętrznej nie jest podzbiorem dziedziny funkcji zewnętrznej, to aby móc złożyć takie funkcje, należy ograniczyć dziedzinę funkcji wewnętrznej do takiego zbioru, aby wszystkie wartości przyjmowane w tym zbiorze przez funkcję wewnętrzną należały do dziedziny funkcji zewnętrznej.

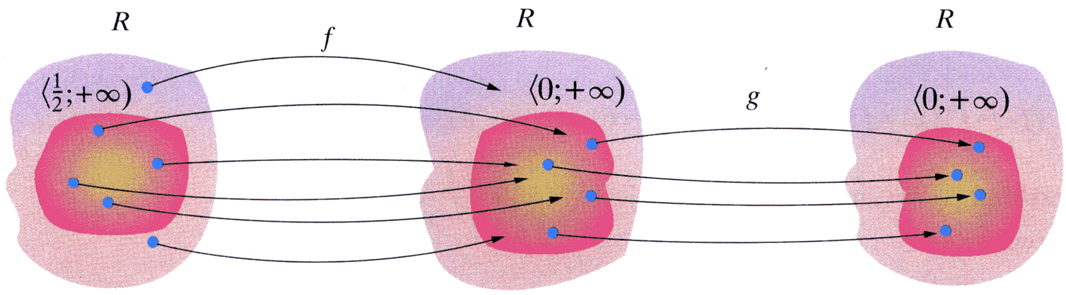
Przykład 6. Dane są funkcje $f(x) 2x - 1$ i $g(x) = \sqrt{x}$. Wyznacz $g \circ f$ oraz $f \circ g$.
Rozwiązanie:

Ponieważ $f: R \to R$, zaś $g: \langle 0; +\infty) \to \langle 0; +\infty)$, więc aby móc złożyć funkcję f z funkcją g, należy dziedzinę R funkcji f „obciąć” do takiego podzbioru X zbioru R, aby $f(x) \geqslant 0$ dla każdej liczby x ze zbioru X, to znaczy, aby $f(X) \subset \langle 0; +\infty)$.



Ryc. 5.28.

Otóż $f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow 2x-1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{1}{2}$. Zatem jeśli przyjmiemy $X = \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right)$, to wszystkie wartości funkcji f w zbiorze X będą nieujemne, czyli $f\left(\left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right)\right) \subset \langle 0; +\infty)$.



Ryc. 5.29.

Tak więc złożenie $g \circ f$ możemy wykonać w przedziale $\left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right)$, to znaczy $D_{g \circ f} = \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right)$.
Jeżeli $x \in \left\langle \frac{1}{2}; +\infty \right)$, to $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{2x-1}$.

Z kolei ponieważ $g: \langle 0; +\infty) \to \langle 0; +\infty)$ i $\langle 0; +\infty) \subset R$, a $f: R \to R$, więc jeśli $x \in \langle 0; +\infty)$, to $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\sqrt{x} - 1$.

Odpowiedź: $(g \circ f)(x) = \sqrt{2x-1}$ dla $x \geqslant \frac{1}{2}$, zaś $(f \circ g)(x) = 2\sqrt{x} - 1$, gdy $x \geqslant 0$.

Przykład 7. Dane są funkcje $f(x) = x^2 + 1$, $g(x) = \sqrt{x-2}$. Wyznacz $g \circ f$ i $f \circ g$.
Rozwiązanie;

Widzimy, że $f: R \to \langle 1; +\infty)$, zaś $g: \langle 2; +\infty) \to \langle 0; +\infty)$

Zatem założenie $g \circ f$ ma sens w zbiorze

$$X = \{x \in R: \ x^2 + 1 \geqslant 2\} = \{x \in R: \ x^2 \geqslant 1\} = \{x \in R: \ |x| \geqslant 1\} = (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty).$$

Jeśli $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty)$, to

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{f(x) - 2} = \sqrt{x^2 + 1 - 2} = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Z kolei, ponieważ $g: \langle 2; +\infty) \to \langle 0; +\infty)$, zaś $f: R \to \langle 1; +\infty)$ i $\langle 0; +\infty) \subset R$, więc gdy $x \in \langle 2; +\infty\rangle$, to

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (g(x))^2 + 1 = \left(\sqrt{x-2}\right)^2 + 1 = \sqrt{(x-2)^2} + 1 =$$

$$= |x-2| + 1 = x - 2 + 1 = x - 1.$$

Odpowiedź: $(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, gdy $x \in (-\infty; -1\rangle \cup \langle 1; +\infty)$, zaś $(f \circ g)(x) = x - 1$, gdy $x \in \langle 2; +\infty)$.

Przykład 8*. Utwórz funkcje $f\circ f,\ g\circ f,\ f\circ g$ i $g\circ g$, jeśli:

$$f(x)=\begin{cases}3x+1: & x\geqslant 0\\ 2x+1: & x<0,\end{cases}\qquad g(x)=\begin{cases}\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}: & x\geqslant 0\\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}: & x<0.\end{cases}$$

Rozwiązanie:

Zgodnie z określeniem funkcji $f(x)$ mamy:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=\begin{cases}3f(x)+1: & f(x)\geqslant 0\\ 2f(x)+1: & f(x)<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}3(3x+1)+1: & 3x+1\geqslant 0 \text{ i } x\geqslant 0\\ 3(2x+1)+1: & 2x+1\geqslant 0 \text{ i } x<0\\ 2(3x+1)+1: & 3x+1<0 \text{ i } x\geqslant 0\\ 2(2x+1)+1: & 2x+1<0 \text{ i } x<0\end{cases}=\begin{cases}9x+4: & x\geqslant 0\\ 6x+4: & -\frac{1}{2}\leqslant x<0\\ 4x+3: & x<-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

Podobnie z określenia funkcji $f(x)$ i $g(x)$ wynika, że:

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=\begin{cases}\frac{1}{3}f(x)-\frac{1}{3}: & f(x)\geqslant 0\\ \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}: & f(x)<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}(3x+1)-\frac{1}{3}: & 3x+1\geqslant 0 \text{ i } x\geqslant 0\\ \frac{1}{3}(2x+1)-\frac{1}{3}: & 2x+1\geqslant 0 \text{ i } x<0\\ \frac{1}{2}(3x+1)-\frac{1}{2}: & 3x+1<0 \text{ i } x\geqslant 0\\ \frac{1}{2}(2x+1)-\frac{1}{2}: & 2x+1<0 \text{ i } x<0\end{cases}=\begin{cases}x: & x<-\frac{1}{2} \text{ lub } x\geqslant 0\\ \frac{2}{3}x: & -\frac{1}{2}\leqslant x<0.\end{cases}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=\begin{cases}3g(x)+1: & g(x)\geqslant 0\\ 2g(x)+1: & g(x)<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}3\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)+1: & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\geqslant 0 \text{ i } x\geqslant 0\\ 3\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+1: & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\geqslant 0 \text{ i } x<0\\ 2\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)+1: & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}<0 \text{ i } x\geqslant 0\\ 2\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)+1: & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}<0 \text{ i } x<0\end{cases}=\begin{cases}x: & x<0 \text{ lub } x\geqslant 1\\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}: & 0\leqslant x<1.\end{cases}$$

$$(g\circ g)(x)=g(g(x))=\begin{cases}\frac{1}{3}g(x)-\frac{1}{3}: & g(x)\geqslant 0\\ \frac{1}{2}g(x)-\frac{1}{2}: & g(x)<0\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{3}: & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\geqslant 0 \ \text{ i } \ x\geqslant 0\\ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}: & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\geqslant 0 \ \text{ i } \ x<0\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}: & \frac{1}{3}x-\frac{1}{3}<0 \ \text{ i } \ x\geqslant 0\\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}: & \frac{1}{2}x-\frac{1}{2}<0 \ \text{ i } \ x<0\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{9}x-\frac{4}{9}: & x\geqslant 1\\ \frac{1}{6}x-\frac{2}{3}: & 0\leqslant x<1\\ \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}: & x<0.\end{cases}$$

Odpowiedź:

$$(f\circ f)(x)=\begin{cases}9x+4: & x\geqslant 0\\ 6x+4: & -\frac{1}{2}\leqslant x<0\\ 4x+3: & x<-\frac{1}{2},\end{cases}$$

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases}x: & x<-\frac{1}{2} \ \text{ lub } \ x\geqslant 0\\ \frac{2}{3}x: & -\frac{1}{2}\leqslant x<0,\end{cases}$$

$$(f\circ g)(x)=\begin{cases}x: & x<0 \quad \text{ lub } \ x\geqslant 1\\ \frac{2}{3}x+\frac{1}{3}: & 0\leqslant x<1\end{cases}$$

$$(g\circ g)(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x-\frac{4}{9}: & x\geqslant 1,\\ \frac{1}{6}x-\frac{2}{3}: & 0\leqslant x<1,\\ \frac{1}{4}x-\frac{3}{4}: & x<0.\end{cases}$$

Pytania i zadania

1. Co to jest złożenie funkcji? Podaj przykłady.
2. Czy składanie funkcji jest: a) przemienne, b) łączne. Zilustruj przykładami.
3. Dane są funkcje:

   $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=x^2+1.$

   Oblicz:

   a) $f\left(g\left(\sqrt{2}\right)\right)$; b) $g\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)$; c) $f\left(g\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$;

   d) $g\left(f\left(1-\sqrt{2}\right)\right)$; e) $f\left(g\left(f(-1)\right)\right)$; f) $g\left(f\left(g(-1)\right)\right)$.
4. Utwórz funkcje: $f\circ g,\ g\circ f,\ f\circ f,\ g\circ g,$ jeśli

   a) $f(x)=-2x+1,\ g(x)=x^2$; b) $f(x)=1-x,\ g(x)=2x-6$;

   c) $f(x)=\frac{1}{x},\ g(x)=\frac{1}{1-x}$.
5. Utwórz funkcje: $f\circ f,\ g\circ g,\ f\circ g,\ g\circ f,$ jeśli

   a) $f(x)=\begin{cases} x: & x\geqslant 0\\ -x: & x<0,\end{cases}\quad g(x)=2x+1$;

   b) $f(x)=\begin{cases} x^2+1: & x\geqslant 0\\ x: & x<0,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases} 2x+1: & x>1\\ -x-1: & x\leqslant 1,\end{cases}$

   c) $f(x)=\begin{cases} x^2-1: & -1<x<1\\ x: & x\leqslant -1 \text{ lub } x\geqslant 1,\end{cases}\quad g(x)=\begin{cases} 2x-1: & x\geqslant 0\\ 1-2x: & x<0.\end{cases}$
6. Wyznacz

   $2f\left(\sqrt{2}\right)-3f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)$, jeśli $f(x)=\begin{cases} 0: & x\in W\\ 1: & x\notin W.\end{cases}$
7. Wyznacz

   $(f\circ f\circ f)(x)$ jeśli $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.
8. Wyznacz

   $(\underbrace{f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n})(x)$, jeśli $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

9*. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f: R\to R$, spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x warunek $f\left(f(x)\right)=-x$, to jest różnowartościowa w zbiorze R.

10*. Udowodnij, że jeżeli funkcja $f: R\to R$ spełnia dla każdej liczby rzeczywistej x równość

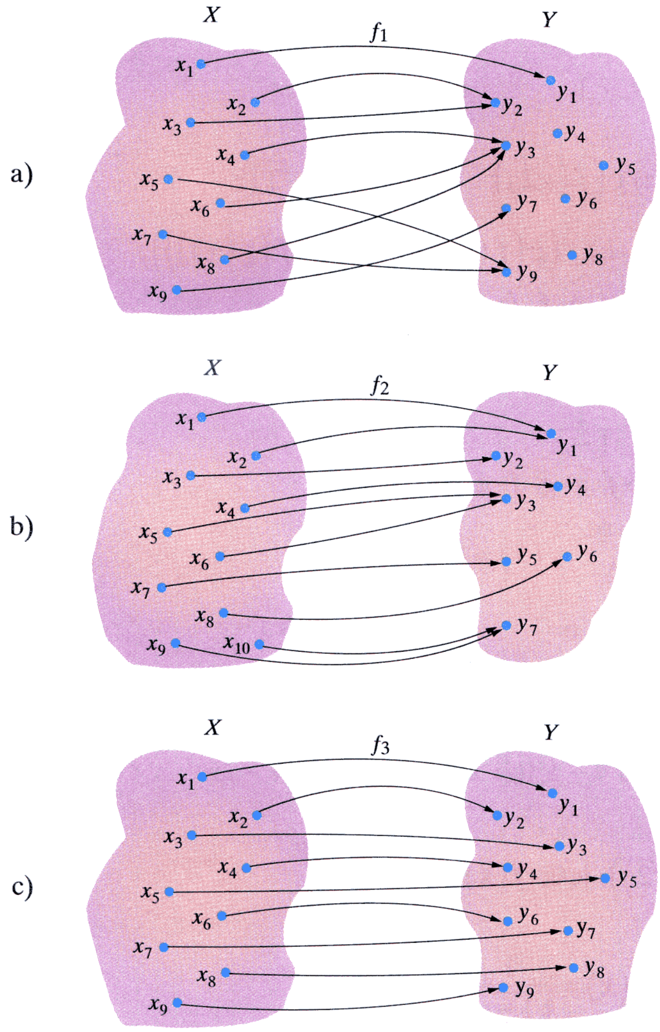
   $x+f(x)=f\left(f(x)\right)$, to $f\left(f(0)\right)=0$.

11*. Funkcja $f: R\to R$ spełnia dla wszystkich liczb rzeczywistych x, y nierówność $\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant|x-y|$. Udowodnij, że jeżeli $f\left(f\left(f(0)\right)\right)=0$, to $f(0)=0$.

12*. Funkcje $f: R\to R$ i $g: R\to R$ są określone wzorami: $f(x)=x^2+1,\ g(x)=3-3x-x^3$. Wykaż, że równanie $f\left(g(x)\right)=g\left(f(x)\right)$ nie ma rozwiązań.

8. Funkcje odwrotne

Rozważmy trzy grafy określające funkcje, odwzorowujące zbiór X w zbiór Y:



Ryc. 5.30.

Zastanówmy się teraz nad tym, w którym z tych przypadków moglibyśmy określić funkcję ze zbioru Y w zbiór X. Widzimy, że w przypadku pierwszym na pewno nie, gdyż w zbiorze Y mamy takie elementy (y_4, y_5, y_6, y_8), które nie są wartościami funkcji f_1 dla żadnego x ze zbioru X.

W przypadku drugim też będzie kłopot. W zbiorze Y nie znajdziemy, co prawda, elementu, który nie byłby wartością funkcji f_2 dla jakiegoś x ze zbioru X, ale mamy w nim za to takie elementy, które są wartościami dla co najmniej jednego x ze zbioru X, na przykład $y_1 = f_2(x_1) = f_2(x_2)$. Któremu zatem elementowi spośród x_1, x_2 mielibyśmy przyporządkować y_2?

Przyjrzyjmy się wreszcie grafowi określającemu funkcję $f_3 \colon X \to Y$ (przypadek trzeci). Funkcja f_3 przyporządkowuje każdemu $x \in X$ jeden element y ze zbioru Y i **każdy** element zbioru Y jest wartością funkcji f_3 **tylko dla jednego** x ze zbioru X. Możemy więc określić funkcję $g: Y \to X$.

Zauważmy przy tym, że jeśli $x \in X$, to

$$(g \circ f_3)(x) = g(f_3(x)) = g(y) = x$$

oraz, gdy $y \in Y$, to

$$(f_3 \circ g)(y) = f_3(g(y)) = f_3(x) = y,$$

co oznacza, że funkcje $g \circ f_3$ i $f_3 \circ g$ są tożsamościowe odpowiednio w zbiorach X i Y.

Taką **funkcję** g nazywamy **odwrotną** do funkcji f_3. Widzimy przy tym, że dziedzina i zbiór wartości f_3 stają się odpowiednio zbiorem wartości i dziedziną funkcji g.

Funkcję $g: Y \to X$ nazywamy **odwrotną** do funkcji $f: X \to Y$, jeśli funkcje $g \circ f$ i $f \circ g$ są tożsamościowe odpowiednio w zbiorach X i Y, to znaczy

$$(g \circ f)(x) = x, \text{ gdy } x \in X, \text{ zaś}$$

$$(f \circ g)(y) = y, \text{ gdy } y \in Y.$$

Przykład 1. Funkcją odwrotną do funkcji tożsamościowej w dowolnym zbiorze jest ta sama funkcja.

Przykład 2. Funkcją odwrotną do funkcji $f: R \to R$, określonej wzorem $f(x) = 2x$, jest funkcja $g: R \to R$, określona wzorem $g(y) = \frac{1}{2}y$.

Istotnie, jeśli $x \in R$, to

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x \text{ oraz}$$

gdy $y \in Y$, to

$$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = 2g(y) = 2 \cdot \frac{1}{2}y = y.$$

Przykład 3. Funkcją odwrotną do funkcji $f: R \setminus \{0\} \to R \setminus \{0\}$, określonej wzorem $f(x) = \frac{1}{x}$, jest ta sama funkcja. Jeśli bowiem $x \neq 0$, to

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$$

Przykład 4. Funkcja $f: R \to R_+$, określona wzorem $f(x) = x^2$, nie jest odwracalna w zbiorze R, bo jest w tym zbiorze parzysta. Gdyby jednak rozważać funkcję $f(x) = x^2$ w przedziale $\langle 0; +\infty)$ lub $(-\infty; 0\rangle$, to dla takich funkcji znajdziemy funkcje odwrotne. Funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = x^2$ odwzorowującej zbiór R_+ na zbiór R_+ jest funkcja $g(y) = \sqrt{y}$, zaś funkcją odwrotną do funkcji $f(x) = x^2$ odwzorowującej R_- na R_+ jest funkcja $g(y) = -\sqrt{y}$.

Kiedy zatem funkcja ma funkcję odwrotną?
Odpowiedź na to pytanie daje następujące twierdzenie.

Twierdzenie

Funkcja $f: X \to Y$ **posiada** funkcję **odwrotną** wtedy i tylko wtedy, gdy jest **różnowartościowa** i przekształca zbiór X **na** zbiór Y.

□Dowód. Załóżmy, że f ma funkcję odwrotną $g: Y \to X$. Wówczas jeśli $y \in Y$, to $y = f\left(g\left(y\right)\right)$, czyli y jest wartością funkcji f. To oznacza, że f odwzorowuje zbiór X na zbiór Y. Niech x_1, x_2 będą takimi elementami zbioru X, że $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right)$. Wówczas $x_1 = g\left(f\left(x_1\right)\right) = g\left(f\left(x_2\right)\right) = x_2$. Zatem f jest funkcją różnowartościową.

Załóżmy teraz, że f jest funkcją różnowartościową i przekształcającą zbiór X na zbiór Y. Wobec tego, jeśli $y \in Y$, to istnieje w zbiorze X jeden elment x taki, że $y = f\left(x\right)$.

Wykażemy, że funkcja $g: Y \to X$, określona wzorem $g\left(y\right) = x$, jest odwrotna do funkcji f. Rzeczywiście, jeśli $x \in X$, to $g\left(f\left(x\right)\right) = g\left(y\right) = x$, zaś gdy $y \in Y$, to $f\left(g\left(y\right)\right) = f\left(x\right) = y$. □

Wiemy zatem, kiedy funkcja jest odwracalna. Kolejne twierdzenie odpowiada na pytanie o to, ile istnieje funkcji odwrotnych do danej funkcji.

Twierdzenie

Jeżeli funkcja $f: X \to Y$ ma funkcję odwrotną, to tylko jedną.

□Dowód. Załóżmy, że funkcjami odwrotnymi do funkcji $f: X \to Y$ są funkcje $g_1: Y \to X$ i $g_2: Y \to X$. Wówczas jeśli $y \in Y$, to $f\left(g_1\left(y\right)\right) = y$ i $f(g_2(y)) = y$, a więc $f(g_1(y)) = f(g_2(y))$, skąd na mocy różnowartościowości funkcji f wynika, że $g_1\left(y\right) = g_2\left(y\right)$. Otrzymana równość dowodzi równości funkcji g_1 i g_2 na zbiorze X. □

Teraz pokażemy na przykładach, jak wyznaczać wzór funkcji odwrotnej do funkcji danej wzorem. Na ogół w tym celu wyznaczamy x z równania $y = f\left(x\right)$, gdzie $x \in D_f$, a następnie w otrzymanej zależności zastępujemy x przez y oraz y przez x. Funkcję odwrotną do funkcji f oznaczać będziemy symbolem f^{-1}.

Przykład 5. Wyznacz wzór funkcji odwrotnej do funkcji $f\left(x\right) = -3x + 1$.
Rozwiązanie:

Najpierw wykażemy, że funkcja ta jest odwracalna.

Dziedziną tej funkcji jest zbiór R liczb rzeczywistych. Także zbiór jej wartości jest zbiorem R, to jest $f\left(R\right) = R$. Istotnie, jeśli $x \in R$, to $f\left(x\right) \in R$. Stąd $f\left(R\right) \subset R$. Aby stwierdzić, że $R \subset f\left(R\right)$, wystarczy dla dowolnej liczby rzeczywistej y znaleźć taką liczbę rzeczywistą x, że $f\left(x\right) = y$.

Ale

$$(*) f\left(x\right) = y \Leftrightarrow -3x + 1 = y \Leftrightarrow x = \frac{1-y}{3}.$$

Funkcja f odwzorowuje więc zbiór R na zbiór R. Funkcja ta jest różnowartościowa w tym zbiorze, gdyż dla dowolnych $x_1, x_2 \in R$ zachodzi implikacja: $f\left(x_1\right) = f\left(x_2\right) \Rightarrow x_1 = x_2$ (sprawdź to!).

Zatem f jest odwracalna w zbiorze R. Funkcja f^{-1} do niej odwrotna określona jest wzorem

$f^{-1}(x) = \frac{1-x}{3}$, co wynika z $(*)$.

Przykład 6. Wyznacz funkcję odwrotną do funkcji $f(x) = x^3 + 1$.
Rozwiązanie:

Dziedziną funkcji f jest, oczywiście, zbiór R. Jeśli $x \in R$, to $f(x) \in R$, co dowodzi, że $f(R) \subset R$, oraz dla każdej liczby rzeczywistej y istnieje liczba rzeczywista x taka, że $f(x) = y$ (rozwiązujemy równanie: $x^3 + 1 = y$ i otrzymujemy: $(*)$ $x = \sqrt[3]{y-1}$), skąd $R \subset f(R)$. Zatem $f(R) = R$. Funkcja f jest różnowartościowa w zbiorze R, gdyż dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2, jeśli $f(x_1) = f(x_2)$, to $x_1 = x_2$.

Istotnie,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1 \Rightarrow x_1^3 - x_2^3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)\left(x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2\right) = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \vee x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 \vee \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2)^2 + \frac{1}{2} x_2^2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2 \vee x_1 = x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Wykazaliśmy więc, że f jest odwracalna w zbiorze R. Funkcja f^{-1} w zbiorze R zadana jest wzorem

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-1}$ (co wynika z $(*)$).

Przykład 7. Znajdź $f^{-1}(x)$, jeśli $f(x) = \frac{x}{1+x}$ dla każdej liczby dodatniej x.
Rozwiązanie:

Wykażemy najpierw, że f jest różnowartościowa w zbiorze R_+ oraz że $f(R_+) = \langle 0; 1)$.

Dla każdych liczb dodatnich x_1, x_2 mamy

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{1+x_1} = \frac{x_2}{1+x_2} \Rightarrow x_1(1+x_2) = x_2(1+x_1) \Rightarrow x_1 = x_2,$$

co dowodzi różnowartościowości f w zbiorze R_+.

Ponieważ $0 \leqslant \frac{x}{1+x} < 1$ dla każdej liczby dodatniej $x \in R_+$, więc $f(R_+) \subset \langle 0; 1)$.

Niech y będzie dowolną liczbą z przedziału $\langle 0; 1)$. Istnieje $x \in R_+$ takie, że $f(x) = y$, gdyż

$$\frac{x}{1+x} = y \Leftrightarrow \frac{1+x}{x} = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} + 1 = \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1-y}{y} \Leftrightarrow x = \frac{y}{1-y}$$

i oczywiście $x = \frac{y}{1-y} \in R_+$ oraz $f(x) = f\left(\frac{y}{1-y}\right) = \dfrac{\frac{y}{1-y}}{1 + \frac{y}{1-y}} = \dfrac{\frac{y}{1-y}}{\frac{1}{1-y}} = y$, gdy $y \in \langle 0; 1)$.

Tak więc rzeczywiście $\langle 0; 1) \subset f(R_+)$. Zatem $f(R_+) = \langle 0; 1)$. Wobec tego istnieje f^{-1} i funkcja ta określona jest wzorem

$f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ dla $x \in \langle 0; 1)$.

Przykład 8. Udowodnij, że $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Rozwiązanie:

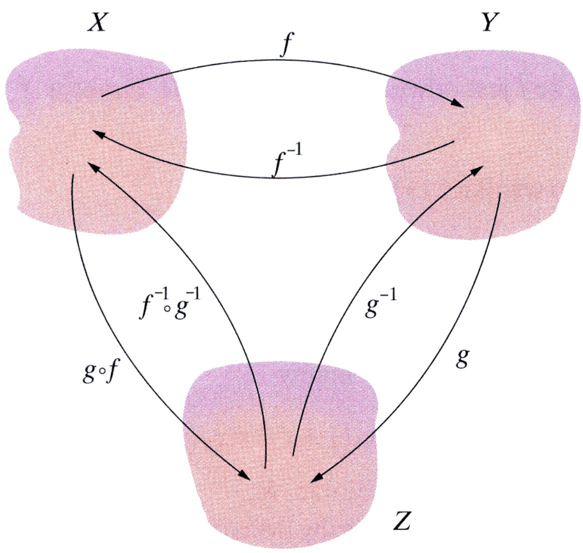
Niech funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to Z$ będą funkcjami odwracalnymi. Wykażemy, że złożenie $g \circ f$ jest funkcją odwracalną.

a) $g \circ f$ jest funkcją równowartościową w zbiorze X, gdyż dla dowolnych x_1, x_2 ze zbioru X, jeśli $g(f(x_1)) = g(f(x_2))$, to $f(x_1) = f(x_2)$, skąd wynika, że $x_1 = x_2$ (skorzystaliśmy kolejno z różnowartościowości funkcji g i f).

b) $g \circ f$ odwzorowuje zbiór X na zbiór Z. Istotnie, dla każdego elementu z ze zbioru Z istnieje element y w zbiorze Y taki, że $z = g(y)$, gdyż $g(Y) = Z$, zaś dla każdego elementu y zbioru Y znajdziemy taki element x w zbiorze X, że $y = f(x)$, bo $f(X) = Y$.

Stąd jeśli $x \in X$, to istnieje element z w zbiorze Z taki, że $z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.

Dla dowodu równości $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$ wystarczy stwierdzić, że złożenia $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f)$ i $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1})$ są funkcjami tożsamościowymi odpowiednio zbiorów X i Z (ryc. 5.31).



Ryc. 5.31.

I rzeczywiście, jeśli $x \in X$, to

$$((f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f))(x) = (f^{-1} \circ g^{-1})((g \circ f)(x)) = (f^{-1} \circ g^{-1})(g(f(x))) =$$

$$= f^{-1}(g^{-1}(g(f(x)))) = f^{-1}(f(x)) = x.$$

oraz jeśli $z \in Z$, to

$$((g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}))(z) = (g \circ f)((f^{-1} \circ g^{-1})(z)) = (g \circ f)(f^{-1}(g^{-1}(z))) =$$

$$= g(f(f^{-1}(g^{-1}(z)))) = g(g^{-1}(z)) = z.$$

Pytania i zadania

1. Podaj określenie funkcji odwrotnej do danej funkcji.
2. Kiedy funkcja jest odwracalna?
3. Rozstrzygnij, czy funkcja g jest funkcją odwrotną do funkcji f, jeśli:

   a) $f(x)=2x+5,\ g(y)=\frac{1}{2}y-\frac{5}{2}$; b) $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x},\ g(y)=\dfrac{1-y}{1+y}$;

   c) $f(x)=x^2+1,\ g(y)=\sqrt{y-1}$.
4. Znajdź wzór funkcji f^{-1}, jeśli:

   a) $f(x)=\frac{1}{3}x+2$; b) $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$; c) $f(x)=x^3-1$.
5. Czy funkcja odwrotna do funkcji monotonicznej jest monotoniczna?
6. Wykaż, że $(h\circ g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}\circ h^{-1}$.
7*. Dane są funkcje $g: R_+\to\langle 0;1)$ i $h: R_+\to\langle 0;1)$ określone następująco:

   $$g(x)=\frac{x}{1+x},\ h(x)=\frac{x^2}{1+x^2}.$$

   Znajdź taką funkcję $f: R_+\to R$, dla której $g\circ f=h$.
8*. Dane są funkcje $g: R_+\to\langle 0;1)$ i $h: R_+\to\langle 0;1)$ określone wzorami:

   $$g(x)=\frac{x}{1+x},\ h(x)=\frac{x^2}{1+2x+x^2}.$$

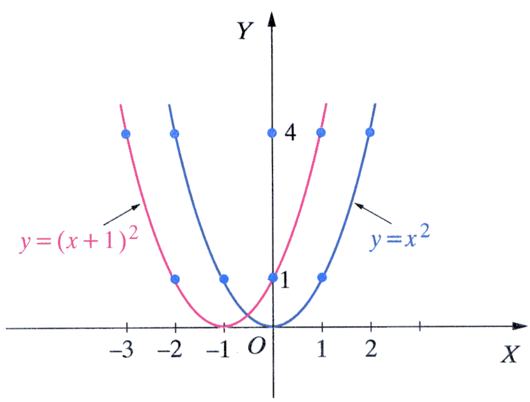
   Znajdź taką funkcję $f: R_+\to R_+$, dla której $g\circ f=h$.

9. Przekształcenia wykresu funkcji

Przesunięcie wzdłuż osi *OX*

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji $y=(x+1)^2$, gdy $x\in R$.
Rozwiązanie:

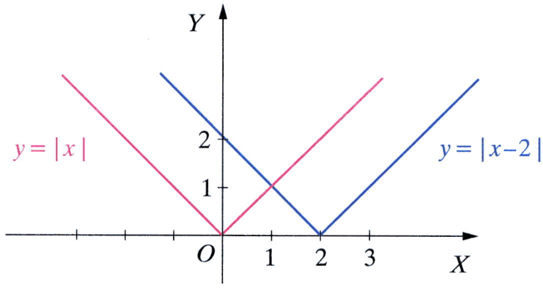
Porównajmy tę funkcję z funkcją $y=x^2$. Zauważymy, że funkcja $y=(x+1)^2$ przyjmuje wartości funkcji $y=x^2$ dla argumentów o 1 mniejszych, na przykład wartość 1 funkcja $y=x^2$ przyjmuje, gdy $x=-1$ lub $x=1$, a funkcja $y=(x+1)^2$ przyjmuje tę wartość, gdy $x=-2$ lub $x=0$. Oznacza to, że odcięte punktów wykresu funkcji $y=(x+1)^2$ są o 1 mniejsze od odciętych punktów o tej samej rzędnej wykresu funkcji $y=x^2$. Aby zatem otrzymać wykres funkcji $y=(x+1)^2$, należy przesunąć wykres funkcji $y=x^2$ wzdłuż osi OX o 1 w lewo (ryc. 5.32).



Ryc. 5.32.

Przykład 2. Sporządź wykres funkcji $y=|x-2|$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Tym razem posłużymy się wykresem funkcji $y=|x|$. Zauważmy przede wszystkim to, że funkcja $y=|x-2|$ przyjmuje wartości funkcji $y=|x|$, dla argumentów o 2 większych, na przykład wartość 2 funkcja $y=|x|$ przyjmuje, gdy $x=-2$ lub $x=2$, a funkcja $y=|x-2|$ przyjmuje tę wartość, gdy $x=0$ lub $x=4$. Oznacza to, że odcięte punktów wykresu funkcji $y=|x-2|$ są o 2 większe niż odcięte odpowiadających im punktów o tej samej rzędnej wykresu funkcji $y=|x|$. Zatem gdy przesuniemy wykres funkcji $y=|x|$ wzdłuż osi OX o 2 w prawo, to otrzymamy wykres funkcji $y=|x-2|$ (ryc. 5.33).



Ryc. 5.33.

Analogicznie rozumując dla dowolnej funkcji $y=f(x)$ i liczby p, otrzymujemy następujacy wniosek.

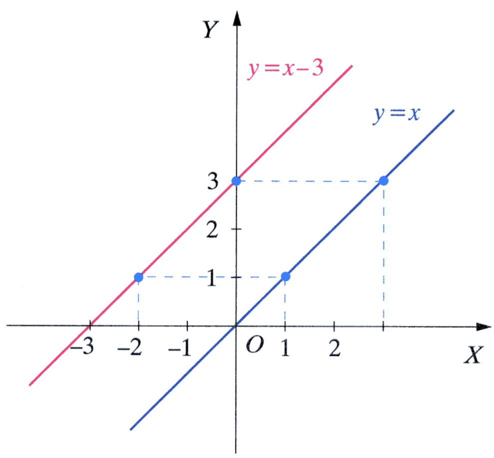
Wniosek. Wykres funkcji $y=f(x-p)$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=f(x)$ wzdłuż osi OX:
- o p w prawo, gdy $p>0$,
- o p w lewo, gdy $p<0$.

Przesunięcie wzdłuż osi *OY*

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji $y=x+3$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Mamy tutaj funkcję liniową, której wykresem jest prosta. Aby otrzymać ten wykres, zazwyczaj obieramy dowolnie dwa argumenty x_1, x_2, obliczamy dla nich wartości y_1, y_2 tej funkcji, a następnie przez punkty (x_1, y_1) i (x_2, y_2) prowadzimy prostą.

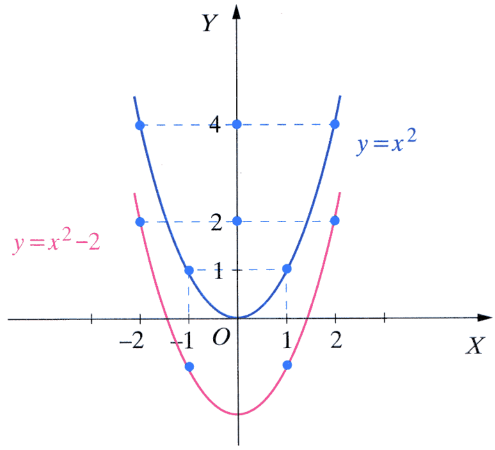
Ale możemy też postąpić inaczej. Porównując tę funkcję z funkcją $y=x$, widzimy, że funkcja $y=x+3$ przyjmuje wartości funkcji $y=x$ dla argumentów o 3 mniejszych, na przykład wartość 1 funkcja $y=x$ przyjmuje, gdy $x=1$, a funkcja $y=x+3$, gdy $x=-2$. Oznacza to, że rzędne punktów wykresu funkcji $y=x+3$ są o 3 większe od rzędnych punktów o tej samej odciętej wykresu funkcji $y=x$. Zatem, gdy przesuniemy wykres funkcji $y=x$ wzdłuż osi OY o 3 w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y=x+3$ (ryc. 5.34).



Ryc. 5.34.

Przykład 2. Sporządź wykres funkcji $y = x^2 - 2$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Zauważmy, że wartości funkcji $y = x^2 - 2$ są o 2 mniejsze od wartości funkcji $y = x^2$ dla tych samych argumentów x. Oznacza to, że rzędne punktów wykresu funkcji $y = x^2 - 2$ są o 2 mniejsze od rzędnych punktów o tej samej odciętej wykresu funkcji $y = x^2$. Aby więc otrzymać wykres funkcji $y = x^2 - 2$, należy przesunąć wykres funkcji $y = x^2$ wzdłuż osi OY o 2 w dół (ryc. 5.35).



Ryc. 5.35.

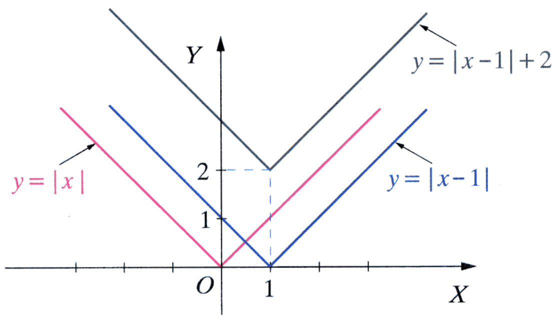
Przeprowadzając podobne rozumowanie dla dowolnej funkcji $y = f(x)$ i liczby q, otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek. Wykres funkcji $y = f(x) + q$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y = f(x)$ wzdłuż osi OY:
- o q w górę, gdy $q > 0$,
- o q w dół, gdy $q < 0$.

Przesunięcie wzdłuż osi *OX* i wzdłuż osi *OY*

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji $y = |x - 1| + 2$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Posłużymy się wykresem funkcji $y = |x|$. Wiemy już, że gdy go przesuniemy wzdłuż osi OX o 1 w prawo, to otrzymamy wykres funkcji $y = |x - 1|$. Gdy zaś przesuniemy wykres funkcji $y = |x - 1|$ wzdłuż osi OY o 2 w górę, to otrzymamy wykres funkcji $y = |x - 1| + 2$ (ryc. 5.36).



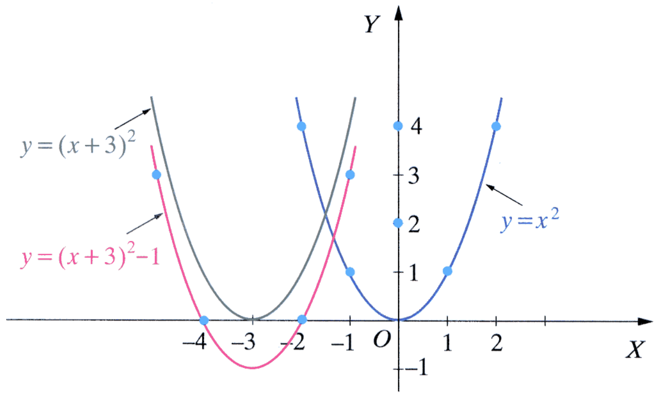
Ryc. 5.36.

Przekonaj się, że do wykresu funkcji $y = |x - 1| + 2$ można także dojść, przesuwając wykres funkcji $y = |x|$ wzdłuż osi OY w górę o 2, a następnie otrzymamy wykres, przesuwając wzdłuż osi OX o 1 w prawo.

Przykład 2. Sporządź wykres funkcji $y=(x+3)^2-1$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Tutaj posłużymy się wykresem funkcji $y=x^2$. Gdy przesuniemy go wzdłuż osi OX o 3 w lewo, to otrzymamy wykres funkcji $y=(x+3)^2$, prawda?

Następnie, przesuwając ten wykres wzdłuż osi OY o 1 w dół, dostaniemy wykres funkcji $y=(x+3)^2-1$ (ryc. 5.37).



Ryc. 5.37.

Spróbuj dojść do wykresu funkcji $y=(x+3)^2-1$, przesuwając wykres funkcji $y=x^2$ wzdłuż osi OY w dół o 1 i otrzymany wykres przesuwając wzdłuż osi OX w lewo o 3.

Wniosek. Wykres funkcji $y=f(x-p)+q$ otrzymujemy, przesuwając wykres funkcji $y=f(x)$ wzdłuż osi OX o p, a następnie – wzdłuż osi OY o q lub na odwrót.

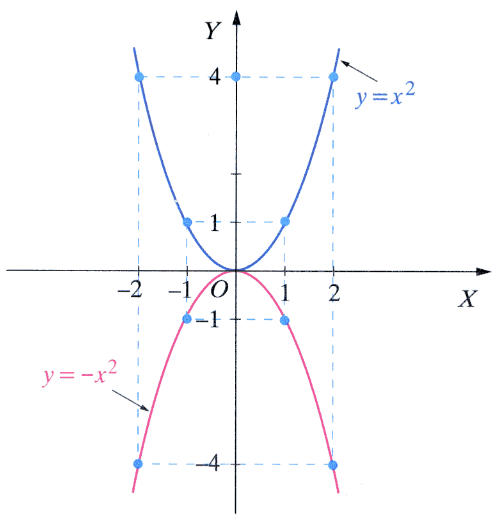
Symetrie (odbicia) względem osi układu współrzędnych

1. Symetria względem osi *OX*

Przykład. Sporządź wykres funkcji $y=-x^2$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

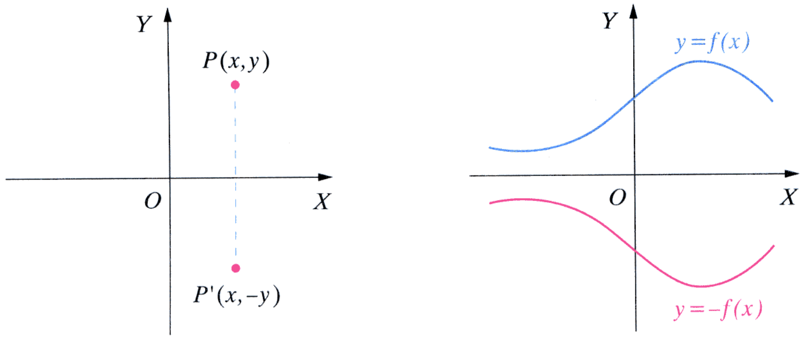
Porównajmy tę funkcję z funkcją $y=x^2$. Zauważmy, że funkcje te przyjmują przeciwne wartości dla tych samych argumentów. To zaś oznacza, że punkty wykresów tych funkcji o równych odciętych mają przeciwne rzędne. A takie punkty, jak łatwo się przekonać, leżą na płaszczyźnie współrzędnych XOY symetrycznie względem osi OX. Zatem odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y=x^2$, otrzymamy wykres funkcji $y=-x^2$ (ryc. 5.38).

Analogiczne rozumowanie przeprowadzone dla dowolnej funkcji $y=f(x)$ pozwala wysunąć poniższy wniosek.



Ryc. 5.38.

Wniosek. Wykres funkcji $y=-f(x)$ otrzymujemy, odbijając symetrycznie względem osi OX wykres funkcji $y=f(x)$.

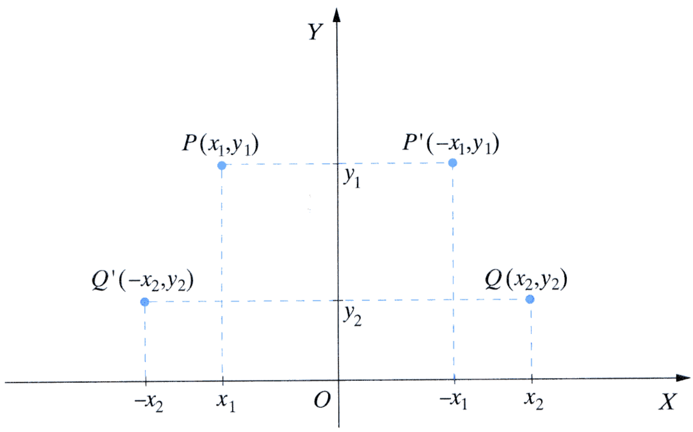


Ryc. 5.39.

2. Symetria względem osi *OY*

Tym razem przejdźmy od razu do ogólnego przykładu.

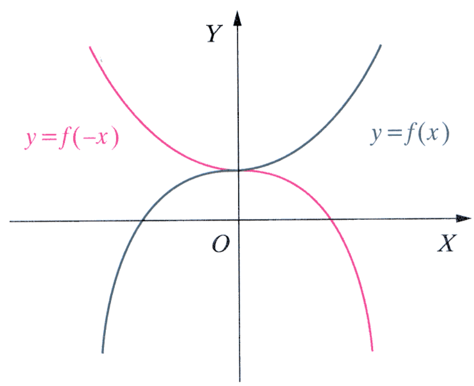
Bez trudu można zauważyć, że punkty leżące na płaszczyźnie współrzędnych XOY, symetrycznie względem osi OX, mają równe rzędne, a przeciwne odcięte. Jeden z nich w symetrii względem osi OY przechodzi na drugi i na odwrót (ryc. 5.40).



Ryc. 5.40.

Rozważmy wykres funkcji $y=f(x)$ i odbijmy go symetrycznie względem osi OY. Powstaje pytanie o wzór funkcji, której wykresem jest otrzymany w tej symetrii obraz wykresu funkcji $y=f(x)$.

Jasne jest, że punkty tego obrazu (ryc. 5.41) mają te same rzędne, co odpowiadające im w tym odbiciu punkty wykresu funkcji $y=f(x)$, lecz przeciwne odcięte. To zaś oznacza, że funkcje:



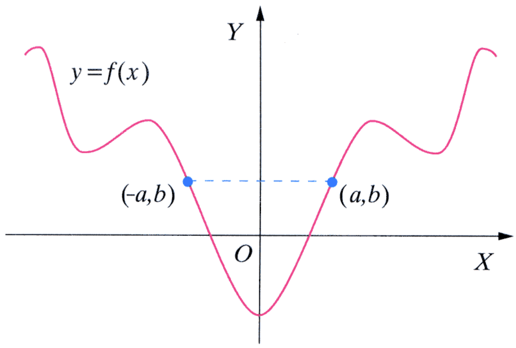
Ryc. 5.41.

$y=f(x)$ i ta, której wzoru poszukujemy, przyjmują dla przeciwnych argumentów równe wartości.

Poszukiwany wzór ma więc postać $y=f(-x)$.

Wniosek. Odbijając symetrycznie względem osi OY wykres funkcji $y=f(x)$, otrzymujemy wykres funkcji $y=f(-x)$.

Może się tak zdarzyć, że wykresy funkcji $y=f(x)$ oraz $y=f(-x)$ się pokryją. Oznaczać to będzie, że funkcje te są równe, to znaczy, że spełniony jest warunek $f(x)=f(-x)$. Wtedy też powiemy, że wykres funkcji $y=f(x)$ jest symetryczny względem osi OY (ryc. 5.42).

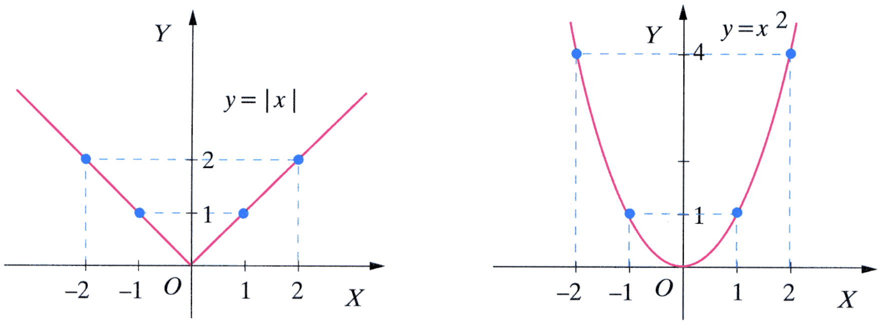


Ryc. 5.42.

Stąd wynika ważny dla nas wniosek.

Wniosek. Każda funkcja parzysta ma wykres symetryczny względem osi OY.

Poniżej podajemy, dla przypomnienia, dwa przykłady funkcji parzystych i ich wykresy.

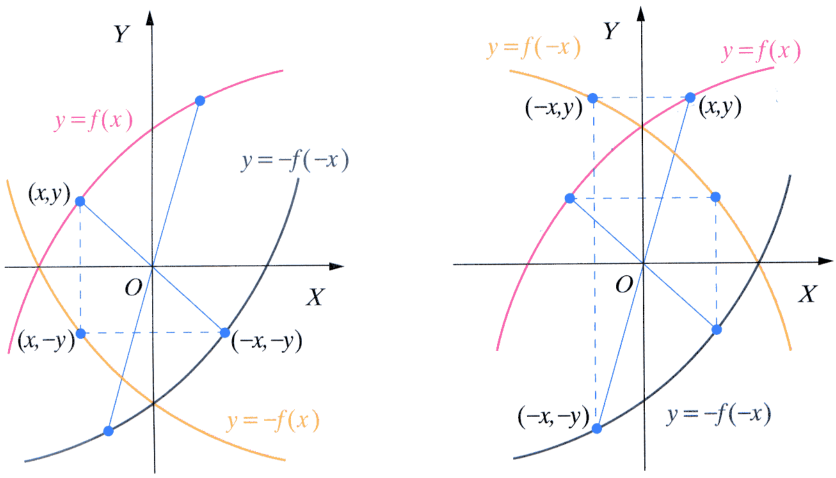


Ryc. 5.43.

3. Symetria względem początku układu współrzędnych

Odbijmy symetrycznie wykres funkcji $y=f(x)$ kolejno względem osi OX i OY. Otrzymamy oczywiście wykresy funkcji odpowiednio $y=-f(x)$ i $y=-f(-x)$.

Gdybyśmy w tych odbiciach zamienili osie OX i OY rolami, to znaczy, gdybyśmy wykres funkcji $y=f(x)$ odbili symetrycznie kolejno względem osi OY i OX, to otrzymalibyśmy wykresy funkcji $y=f(-x)$ i $y=-f(-x)$ (ryc. 5.44).



Ryc. 5.44.

W obu przypadkach wykres funkcji $y=-f(-x)$ otrzymaliśmy z wykresu funkcji $y=f(x)$, wykonując jego odbicia względem osi układu współrzędnych.

Zauważmy, że funkcje $y=-f(-x)$ i $y=f(x)$ przyjmują przeciwne wartości dla przeciwnych argumentów. Oznacza to, że odcięte punktów wykresów obu funkcji i ich rzędne są liczbami przeciwnymi. A przecież łatwo spostrzec, że pary punktów, których odcięte i rzędne są liczbami przeciwnymi, leżą na płaszczyźnie współrzędnych XOY symetrycznie względem początku układu współrzędnych, czyli punktu $(0,0)$. Zatem wykresy funkcji $y=f(x)$ i $y=-f(-x)$, jako zbiory takich punktów, też są symetryczne względem punktu $(0,0)$.

Oczywiście nie jest to dziełem przypadku. Osie OX i OY są do siebie prostopadłe. A zapewne pamiętasz z gimnazjum, że zamiast przekształcać figurę po kolei w dwóch symetriach osiowych o osiach prostopadłych, wystarczy przekształcić tę figurę w symetrii względem punktu przecięcia się tych osi, bo i tak będzie to ten sam obraz. Stąd wysnuć można następujący wniosek.

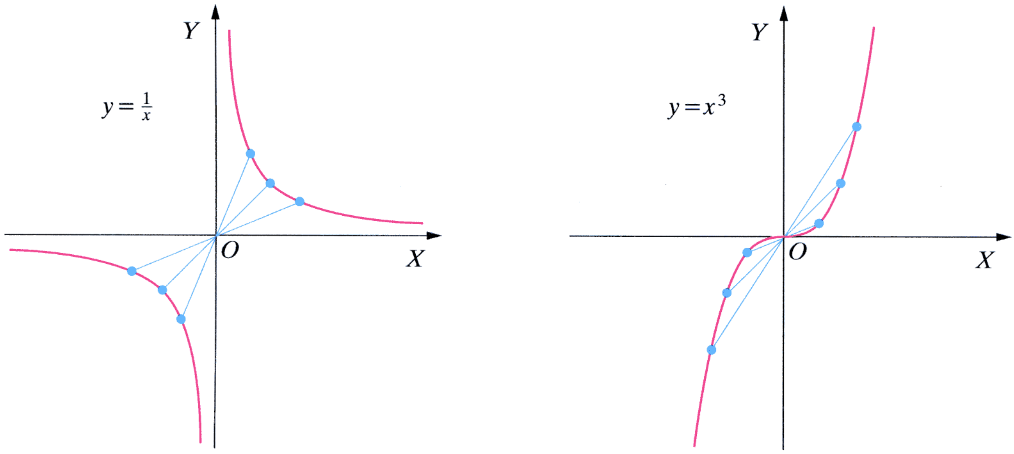
Wniosek. Odbijając symetrycznie względem punktu $(0,0)$ wykres funkcji $y=f(x)$, otrzymamy wykres funkcji $y=-f(-x)$.

Może się tak zdarzyć, że wykresy funkcji $y=f(x)$ i $y=-f(-x)$ się pokryją. Oznaczać to będzie równość tych funkcji, to jest równość $f(x)=-f(-x)$, czyli nieparzystość funkcji f, a ponadto symetryczność jej wykresu względem punktu $(0,0)$.

Zatem otrzymujemy kolejny ważny wniosek.

Wniosek. Wykres każdej funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0,0)$.

Oto przykłady funkcji nieparzystych i ich wykresy:



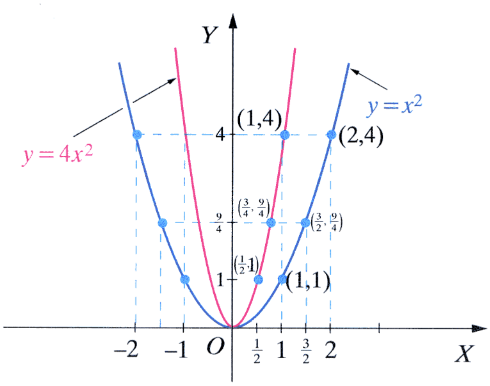
Ryc. 5.45.

Zmiana skali względem osi układu współrzędnych

1. Zmiana skali względem osi *OX*

Przykład 1. Sporządź wykres funkcji $y=4x^2$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Zapiszmy wzór tej funkcji w równoważnej postaci: $y=(2x)^2$ i porównajmy ją z funkcją $y=x^2$. Nietrudno teraz zauważyć, że funkcja $y=(2x)^2$ przyjmuje wartości funkcji $y=x^2$, ale dla argumentów dwa razy mniejszych. Dlatego aby otrzymać wykres funkcji $y=4x^2$, wystarczy zmienić wykres funkcji $y=x^2$ w skali $\frac{1}{2}$ względem osi OX. Można to wyrazić poglądowo: wykres funkcji $y=4x^2$ powstaje z wykresu funkcji $y=x^2$ w ten sposób, że każdy jego punkt (x, y) zamieniamy na punkt $\left(\frac{x}{2}, y\right)$, na przykład $(1;1)$ na $\left(\frac{1}{2};1\right)$, $(2;4)$ na $(1;4)$ itp. (ryc. 5.46.).



Ryc. 5.46.

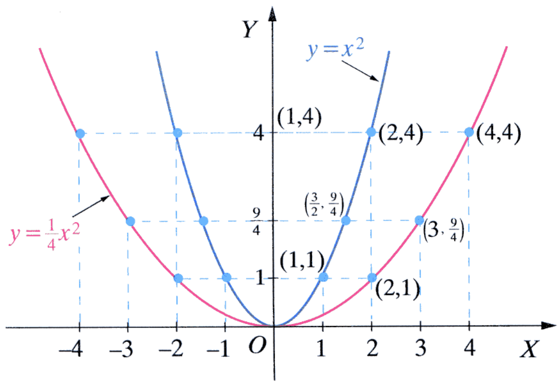
Przykład 2. Sporządź wykres funkcji $y=\frac{1}{4}x^2$, gdy $x \in R$.

Rozwiązanie:

Tutaj również możemy się posłużyć wykresem funkcji $y=x^2$. Zapiszmy najpierw wzór danej funkcji w równoważnej postaci:

$$y=\left(\frac{1}{2}x\right)^2.$$

Widzimy teraz, że przyjmuje ona wartości funkcji $y=x^2$, ale dla argumentów dwa razy większych. Aby więc otrzymać wykres funkcji $y=\frac{1}{4}x^2$, wystarczy zmienić wykres funkcji $y=x^2$ w skali 2 względem osi OX, czyli każdy punkt (x,y) wykresu funkcji $y=x^2$ zamieniamy na punkt $(2x,y)$, na przykład $(1,1)$ na $(2,1)$, $(2,4)$ na $(4,4)$ itp. (ryc. 5.47).



Ryc. 5.47.

Przejdźmy do wniosku ogólnego.

Wniosek. Aby z wykresu funkcji $y=f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y=f(ax)$, gdzie $a\neq 0$, wystarczy każdy punkt (x,y) wykresu funkcji $y=f(x)$ zamienić na punkt $\left(\frac{x}{a},y\right)$. Oznacza to zmianę wykresu funkcji $y=f(x)$ w skali $\frac{1}{a}$ względem osi OX.

2. Zmiana skali względem osi OY

Powróćmy do funkcji z przykładów 1 i 2 dotyczących zmiany skali względem osi OX.

Przykład 1. $y=4x^2$, gdy $x\in R$.

Porównajmy tę funkcję z funkcją $y=x^2$, ale inaczej niż wtedy. Zauważmy mianowicie, że dla tych samych argumentów x wartości funkcji $y=4x^2$ są cztery razy większe niż funkcji $y=x^2$. Zatem dla otrzymania wykresu funkcji $y=4x^2$ wystarczy zwiększyć cztery razy rzędne punktów wykresu funkcji $y=x^2$. Mówimy wówczas, że zmieniamy wykres funkcji $y=x^2$ skali 4 względem osi OY.

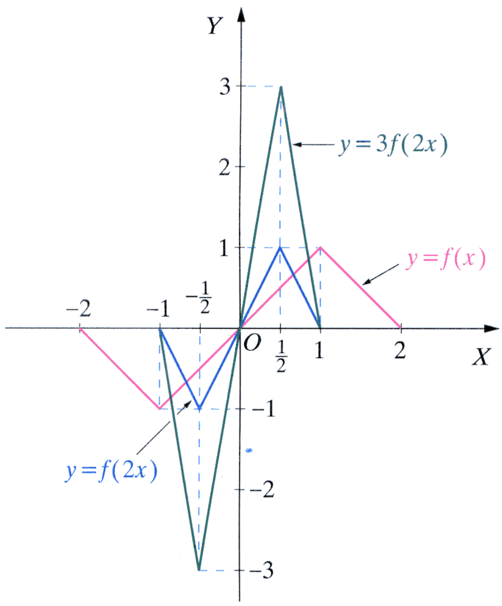
Przykład 2. $y=\frac{1}{4}x^2$, gdy $x\in R$.

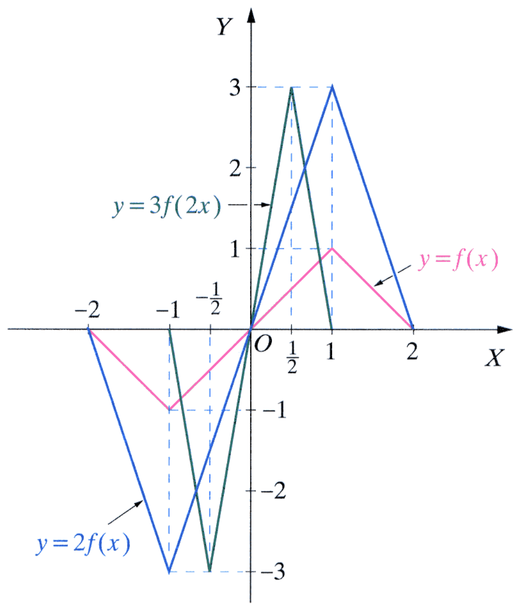
Ponieważ wartości tej funkcji są cztery razy mniejsze niż wartości funkcji $y=x^2$, dla tych samych argumentów x, więc wykres funkcji $y=\frac{1}{4}x^2$ otrzymujemy z wykresu funkcji $y=x^2$, zmieniając go w skali $\frac{1}{4}$ względem osi OY.

Wniosek. Aby z wykresu funkcji $y=f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y=bf(x)$, gdzie $b\neq 0$, wystarczy każdy punkt (x,y) wykresu funkcji $y=f(x)$ zamienić na punkt (x,by). Oznacza to zmianę wykresu funkcji $y=f(x)$ w skali b względem osi OY.

3. Zmiana skali względem osi *OX* i *OY*

Zmieńmy wykres funkcji $y=f(x)$ kolejno w skali a względem osi OX i w skali b względem osi OY. Otrzymamy kolejno wykresy funkcji $y=f(ax)$ i $y=bf(ax)$, prawda? Przekonaj się, że do wykresu funkcji $y=bf(ax)$ można także dojść, zmieniając wykres funkcji $y=f(x)$ kolejno, najpierw w skali b względem osi OY, a następnie w skali a względem osi OX (ryc. 5.48).





Ryc. 5.48.

Otrzymujemy wniosek.

Wniosek. Aby z wykresu funkcji $y=f(x)$ otrzymać wykres funkcji $y=bf(ax)$, gdzie $a\neq 0$, $b\neq 0$, wystarczy wykres funkcji $y=f(x)$ kolejno **zmienić w skali** $\boldsymbol{a}$ względem osi $\boldsymbol{OX}$ i **w skali** $\boldsymbol{b}$ względem osi $\boldsymbol{OY}$.

Pytania i zadania

1. W jaki sposób z wykresu funkcji $y=f(x)$ można otrzymać wykres funkcji:
   a) $y=f(x-p)$; b) $y=f(x)+q$; c) $y=f(x-p)+q$;
   d) $y=f(-x)$; e) $y=-f(x)$; f) $y=-f(-x)$?
2. Jaką własność ma wykres funkcji:
   a) parzystej, b) nieparzystej?
3. W jaki sposób z wykresu funkcji $y=f(x)$ można otrzymać wykres funkcji:
   a) $y=f(ax)$; b) $y=bf(x)$; c) $y=bf(ax)$?

4. Posługując się wykresem funkcji $y=x$, sporządź wykresy funkcji:

a) $y=\frac{1}{2}x$; b) $y=3x$; c) $y=x-2$.

5. Posługując się wykresem funkcji $y=x^2$, sporządź wykresy funkcji:

a) $y=(x-1)^2$; b) $y=x^2+2$; c) $y=2x^2$.

6. Posługując się wykresem funkcji $y=\frac{1}{x}$, sporządź wykresy funkcji:

a) $y=\frac{1}{x-1}$; b) $y=\frac{1}{x}+1$; c) $y=\frac{1}{2x}$;

d) $y=\frac{3}{x}$; e) $y=-\frac{2}{x}$.

10. Sporządzanie wykresów funkcji. Odczytywanie własności funkcji z wykresu

W poprzednim paragrafie poznaliśmy sposoby otrzymywania wykresów funkcji. Obecnie zajmiemy się zastosowaniem ich w praktyce. Zanim jednak przejdziemy do konkretnych przykładów funkcji i ich wykresów, rozstrzygnijmy jeszcze dwa problemy.

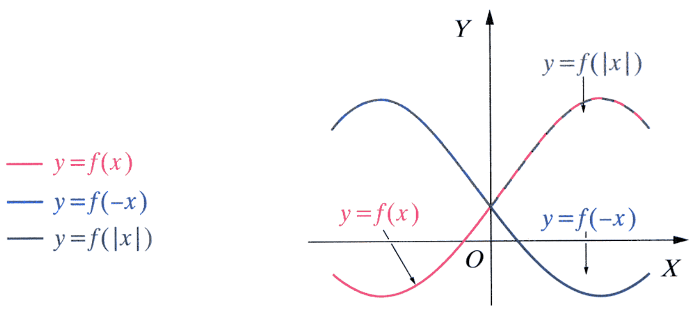
Problem 1. W jaki sposób można otrzymać z wykresu funkcji $y=f(x)$ wykresy funkcji:

a) $y=f(|x|)$; b) $y=|f(x)|$; c) $y=|f|x||$?

Rozwiązanie:

Zgodnie z określeniem wartości bezwzględnej mamy:

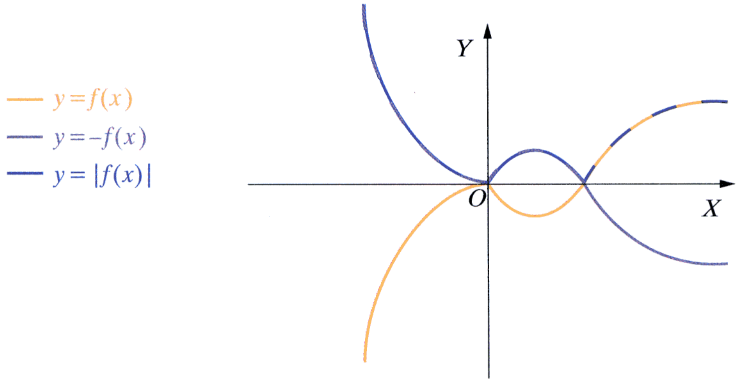
a) $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x): & x\geqslant 0 \\ f(-x): & x<0. \end{cases}$



Ryc. 5.49.

Wniosek. Wykres funkcji $y=f(|x|)$ jest sumą wykresów funkcji $y=f(x)$ dla $x\geqslant 0$ i funkcji $y=f(-x)$ dla $x<0$.

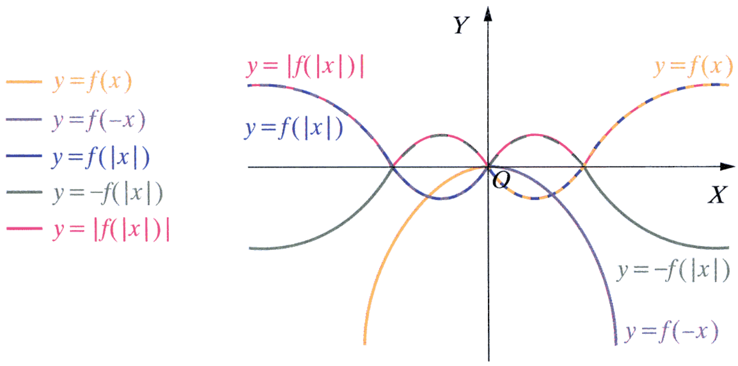
b) $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x): & f(x)\geqslant 0 \\ -f(x): & f(x)<0. \end{cases}$



Ryc. 5.50.

Wniosek. Wykres funkcji $y=|f(x)|$ jest sumą tych części wykresów funkcji $y=f(x)$ i $y=f(-x)$, które na płaszczyźnie XOY leżą **nie niżej** niż oś OX.

c) $y=\left|f\left(|x|\right)\right|=\begin{cases} f\left(|x|\right): & f\left(|x|\right)\geqslant 0, \\ -f\left(|x|\right): & f\left(|x|\right)<0. \end{cases}$



Ryc. 5.51.

Wniosek. Wykres funkcji $y=|f(|x|)|$ jest sumą tych części wykresów funkcji $y=f\left(|x|\right)$ i $y=-f\left(|x|\right)$, które na płaszczyźnie XOY leżą **nie niżej** niż oś OX.

Problem 2. Jak z wykresu funkcji odwracalnej $y=f(x)$ otrzymać wykres funkcji doń odwrotnej?
Rozwiązanie:

Rozstrzygnijmy to najpierw na konkretnym przykładzie. Niech $f:\{1,2,3\}\to\{1,2,3\}$ będzie funkcją określoną następująco:

x	1	2	3
$f(x)$	3	1	2

Funkcja ta jest różnowartościowa w zbiorze A i odwzorowuje go na siebie. Istnieje więc funkcja odwrotna do niej $f^{-1}: \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$ i określona następująco:

x	1	2	3
$f^{-1}(x)$	2	3	1

Porównajmy wykresy tych funkcji, czyli zbiory:

$$W_f = \{(1,3), (2,1), (3,2)\},$$

$$W_{f^{-1}} = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}.$$

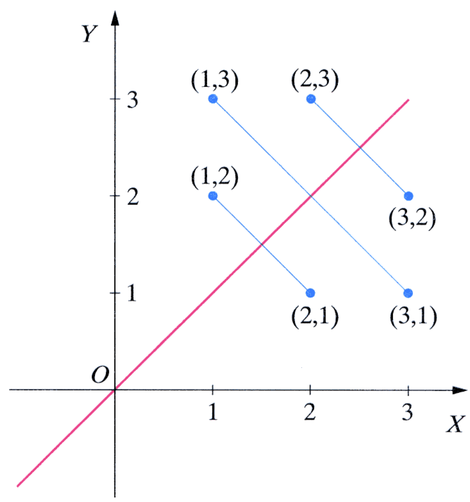
Widzimy, że punkty wykresu funkcji f i punkty wykresu funkcji f^{-1} leżą na płaszczyźnie XOY symetrycznie względem prostej przechodzącej przez punkty $(0,0)$ i $(1,1)$; w symetrii tej punkt $(1,3)$ przechodzi na punkt $(3,1)$, punkt $(2,1)$ na $(2,-1)$, a punkt $(3,2)$ na $(2,3)$.

Aby się przekonać, że w symetrii tej dowolny punkt (a,b) na płaszczyźnie XOY przejdzie na punkt (b,a), wystarczy rozważyć odpowiednie trójkąty przystające, na przykład, gdy $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, to są to trójkąty OPR i OQS (ryc. 5.53).

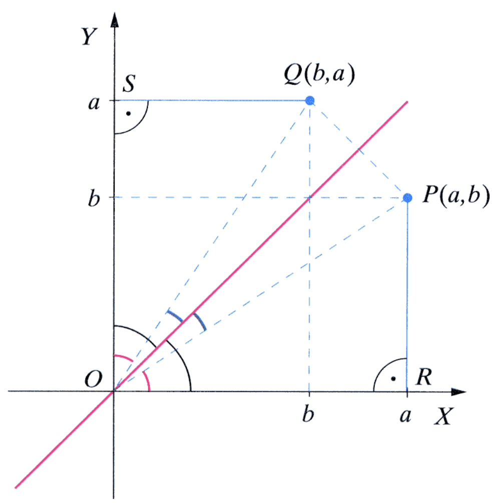
Wiemy już, że funkcje $f: X \to Y$ i $g: Y \to X$ są do siebie odwrotne, gdy dla każdego elementu x zbioru X i elementu y zbioru Y, prawdziwa jest równoważność $x = g(y) \Leftrightarrow y = f(x)$.

Zatem zbiory $\{(x,y): \ x \in X \text{ i } y \in Y\}$ i $\{(y,x): \ y \in Y \text{ i } x \in X\}$ są wykresami odpowiednio funkcji f i funkcji doń odwrotnej f^{-1}.

Stąd wynika następujący wniosek.

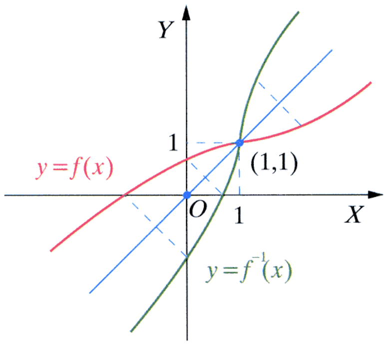


Ryc. 5.52.



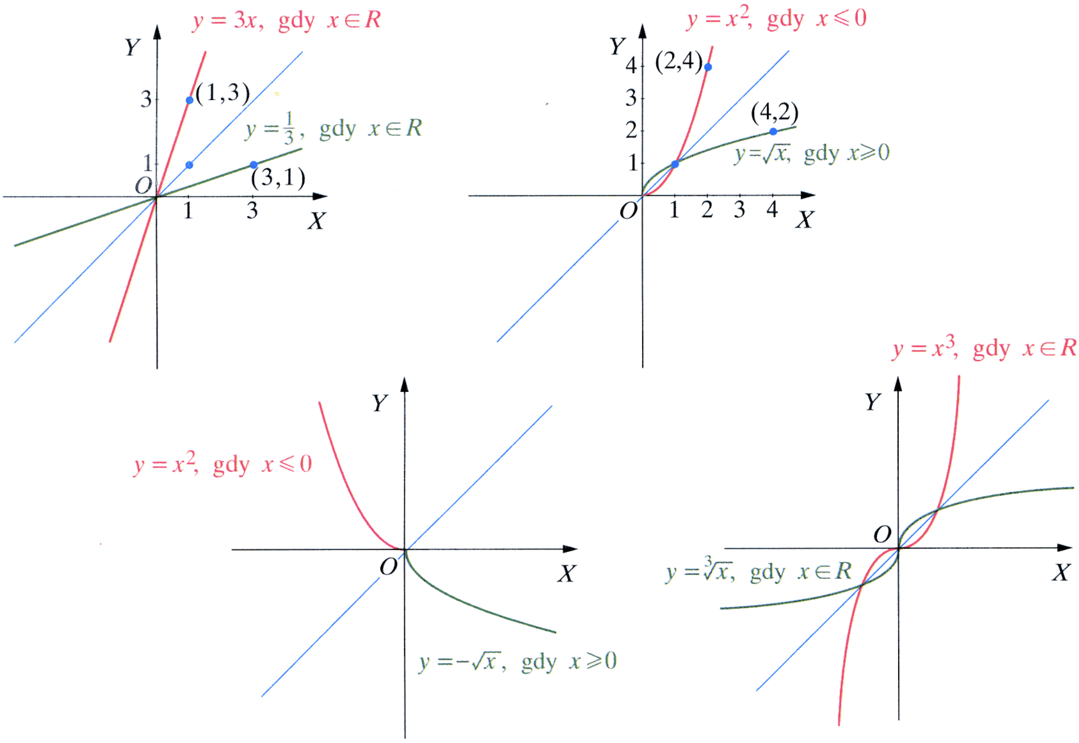
Ryc. 5.53.

Wniosek. Wykres funkcji odwrotnej do funkcji $y = f(x)$ otrzymujemy przez odbicie symetryczne wykresu funkcji $y = f(x)$ względem prostej przechodzącej przez punkty $(0, 0)$ i $(1, 1)$.



Ryc. 5.54.

Oto przykłady funkcji wzajemnie odwrotnych i ich wykresy:



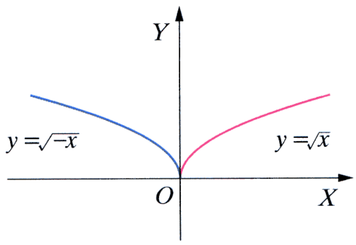
Ryc. 5.55.

Przejdźmy teraz do sporządzania wykresów funkcji.

Przykład 1. Naszkicuj wykres funkcji $y = \sqrt{|x|}$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Szkicujemy najpierw wykres funkcji $y = \sqrt{x}$, gdy $x \geqslant 0$, a następnie wykres funkcji $y = \sqrt{-x}$, gdy $x < 0$ (odbijając tamten względem osi OY) i wykres funkcji $y = \sqrt{|x|}$ gotowy, gdyż

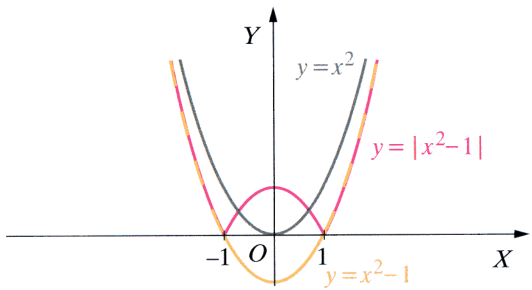
$$\sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x}: & x \geqslant 0 \\ \sqrt{-x}: & x < 0. \end{cases}$$



Ryc. 5.56.

Przykład 2. Naszkicuj wykres funkcji $y = |x^2 - 1|$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Najpierw szkicujemy wykres funkcji $y = x^2$, potem $y = x^2 - 1$ i ostatecznie $y = |x^2 - 1|$ (odbijając tę część wykresu funkcji $y = x^2 - 1$, która jest poniżej osi OX).



Ryc. 5.57.

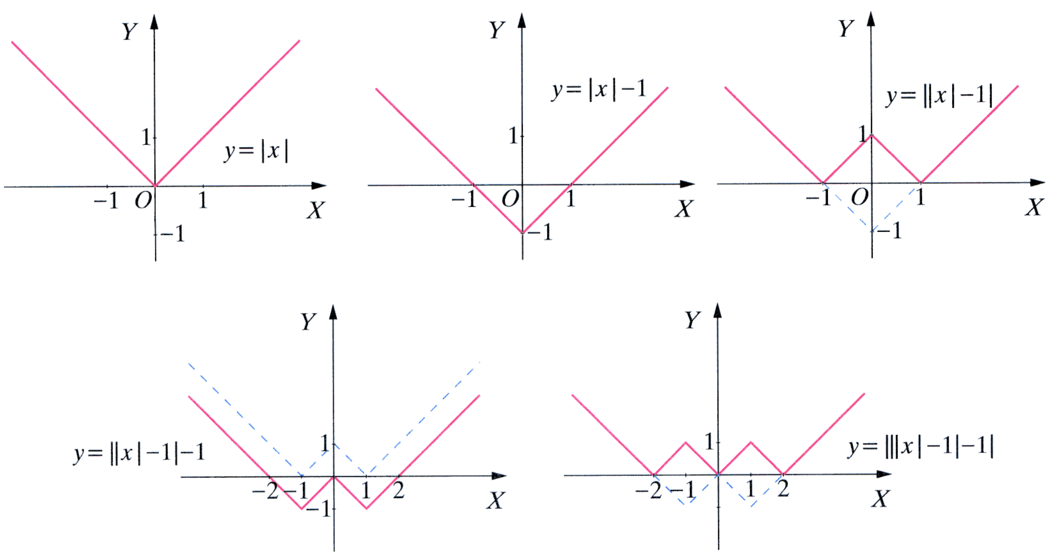
Przykład 3. Sporządź wykres funkcji $y = |||x| - 1| - 1|$, gdy $x \in R$.
Rozwiązanie:

Szkicujemy kolejno wykresy funkcji:

$y = |x|$, $\quad y = |x| - 1$, $\quad y = ||x| - 1|$, $\quad y = ||x| - 1| - 1$

i ostatecznie

$y = |||x| - 1| - 1|$.



Ryc. 5.58.

Przykład 4. Dana jest funkcja

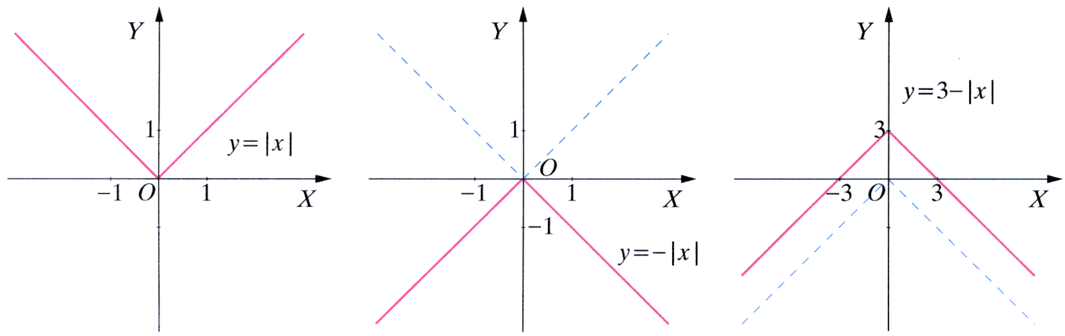
$$f(x)=\begin{cases}3-x: & x\geqslant 0\\ 3+x: & x<0.\end{cases}$$

Narysuj wykres funkcji $y=\left|f\left|f(x)\right|\right|$.

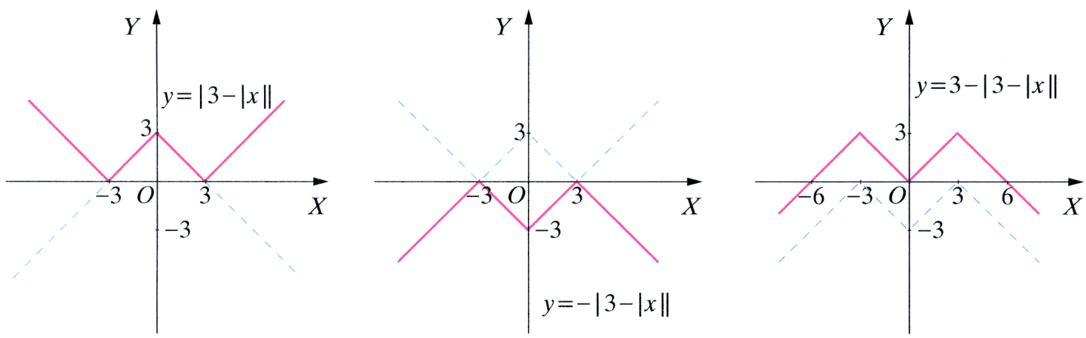
Rozwiązanie:

Zauważmy, że daną funkcję można zapisać wzorem $f(x)=3-|x|$. Wobec tego funkcja, której wykres mamy narysować, ma postać $y=\left|3-\left|3-|x|\right|\right|$.

Oto kolejne etapy otrzymywania wykresu:

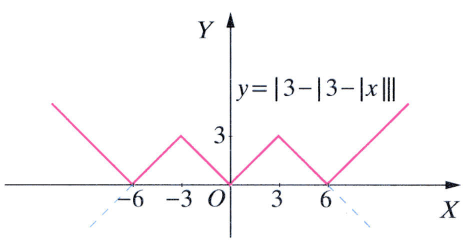


Ryc. 5.59.



Ryc. 5.60.

I gotowy wykres



Ryc. 5.61.

Przykład 5*. Narysuj wykres funkcji

$$y = \max\left\{\frac{1}{|x|}, |x|\right\},$$

gdzie $\max\{a, b\}$ oznacza nie mniejszą z liczb a i b.

Rozwiązanie:

Dana funkcja jest oczywiście określona w zbiorze $R \setminus \{0\}$.

Ponieważ zgodnie z definicją

$$\max\left\{\frac{1}{|x|}, |x|\right\} = |x| \Leftrightarrow |x| \geqslant \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow |x| \geqslant 1,$$

zaś $\max\left\{\frac{1}{|x|}, |x|\right\} = \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|} > |x| \wedge x \neq 0 \Leftrightarrow 0 < |x| < 1,$

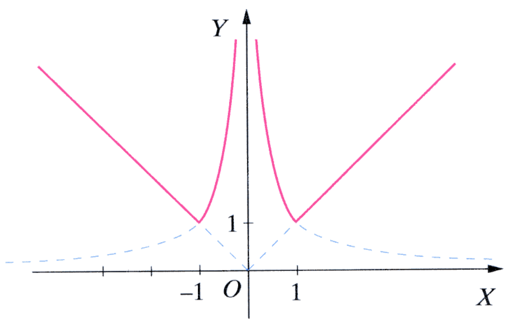
więc naszą funkcję możemy określić następująco:

$$y = \begin{cases} |x|, & \text{gdy} \quad x \leqslant -1 \quad \text{lub} \quad x \geqslant 1 \\ \frac{1}{|x|}, & \text{gdy} \quad -1 < x < 0 \quad \text{lub} \quad 0 < x < 1. \end{cases}$$

Sporządzamy najpierw wykresy funkcji $y = |x|$ i $y = \frac{1}{|x|}$, a następnie zostawiamy część wykresu:

- funkcji $y = |x|$, gdy $x \leqslant -1$ lub $x \geqslant 1$,
- funkcji $\frac{1}{|x|}$, gdy $-1 < x < 0$, lub $0 < x < 1$,

których suma stanowi wykres danej funkcji (ryc. 5.62).



Ryc. 5.62.

Przykład 6*. Sporządź wykres funkcji

$$y = \sqrt{x \cdot \frac{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} - \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}{\sqrt{\frac{1+x^2}{2x} + 1} + \sqrt{\frac{1+x^2}{2x} - 1}}}.$$

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że dziedziną tej funkcji jest zbiór liczb rzeczywistych dodatnich. Następnie przedstawmy wzór danej funkcji w najprostszej postaci.

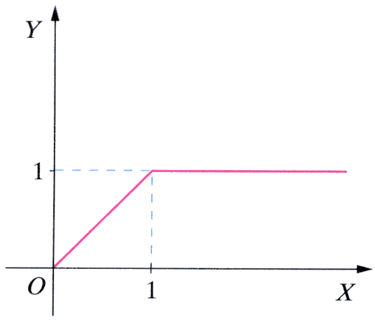
Ponieważ $\frac{1+x^2}{2x}+1=\frac{(1+x)^2}{2x}$ oraz $\frac{1+x^2}{2x}-1=\frac{(1-x)^2}{2x}$, więc

$\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}+1}=\frac{|1+x|}{\sqrt{2x}}$ oraz $\sqrt{\frac{1+x^2}{2x}-1}=\frac{|1-x|}{\sqrt{2x}}$.

Zatem wzór funkcji przybiera postać:

$$y=\sqrt{x\cdot\frac{|1+x|-|1-x|}{|1+x|+|1-x|}}=\begin{cases}x, & \text{gdy} \quad 0<x<1\\ 1, & \text{gdy} \quad x\geqslant 1.\end{cases}$$

Oto jej wykres



Ryc. 5.63.

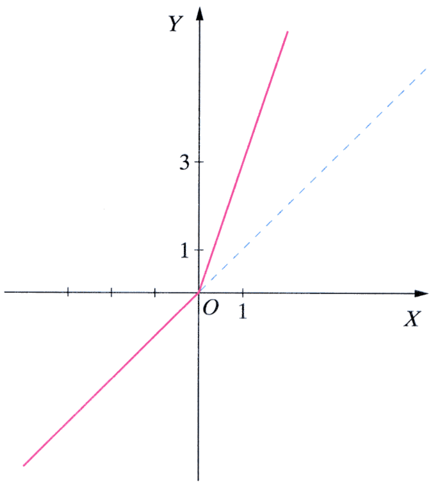
Przykład 7*. Sporządź wykres funkcji $y=x+\{x\}+[x]+|x|$, gdy $x\in R$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $[x]+\{x\}=x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, więc $y=2x+|x|$, czyli

$$y=\begin{cases}3x: & x\geqslant 0\\ x: & x<0.\end{cases}$$

Oto wykres

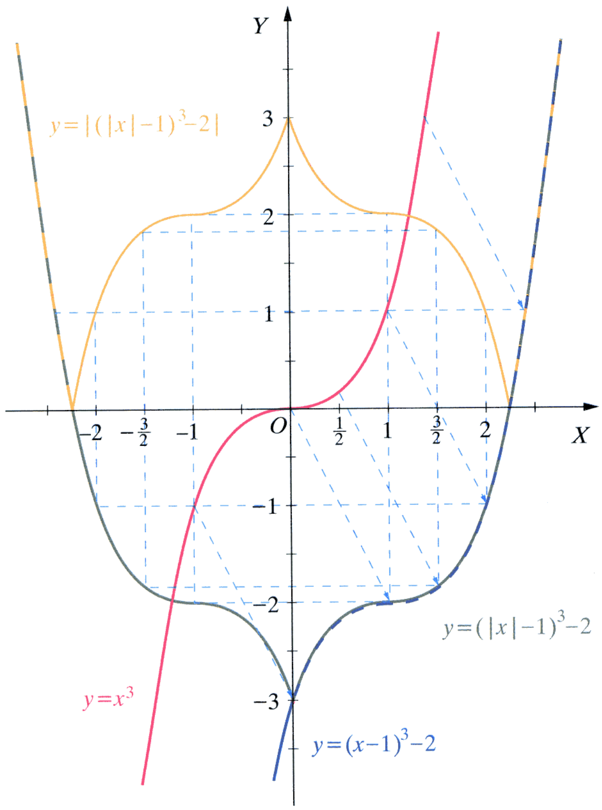


Ryc. 5.64.

Przykład 8. Sporządź wykres funkcji $y=\left||x|^3-3|x|^2+3|x|-3\right|$, gdy $x\in R$.
Rozwiązanie:
Zauważmy, że na mocy wzoru $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

$$y=\left||x|^3-3|x|^2+3|x|-3\right|=\left||x|^3-3\cdot|x|^2\cdot 1+3\cdot|x|\cdot 1^2-1^3-2\right|=\left|(|x|-1)^3-2\right|.$$

Aby więc sporządzić wykres danej funkcji, wystarczy narysować kolejno wykresy następujących funkcji:
$y=x^3$, $y=(x-1)^3-2$, $y=(|x|-1)^3-2$ i wreszcie $y=\left|(|x|-1)^3-2\right|$ (ryc. 5.65).



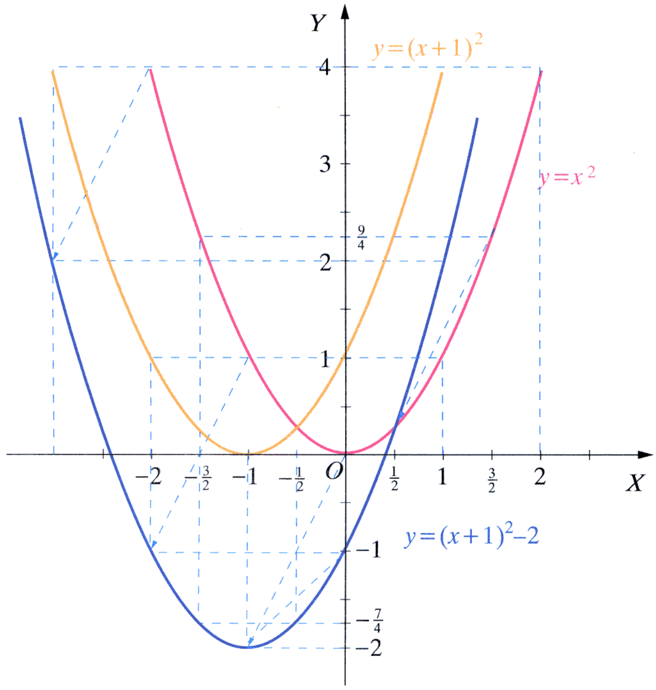
Ryc. 5.65.

Przykład 9. Narysuj wykres funkcji $y=\left|x^2+2|x|-1\right|$, gdy $x\in R$.
Rozwiązanie:
Ponieważ $y=\left|x^2+2|x|-1\right|=\left|(|x|+1)^2-2\right|$, więc wystarczy narysować kolejno wykresy funkcji:

$y=x^2$,

$y=(x+1)^2$,

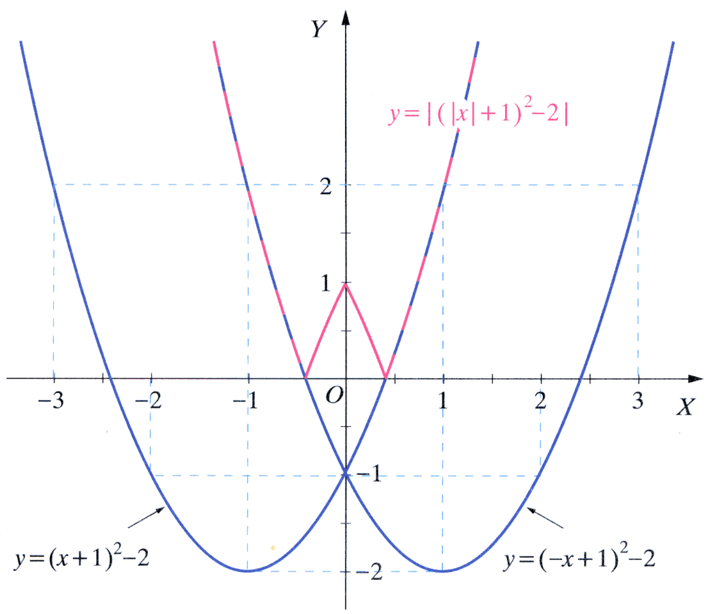
$y=(x+1)^2-2$, (ryc. 5.66)



Ryc. 5.66.

$$y=\left(|x|+1\right)^2-2$$

i ostatecznie $y=\left|\left(|x|+1\right)^2-2\right|$ (ryc. 5.67).

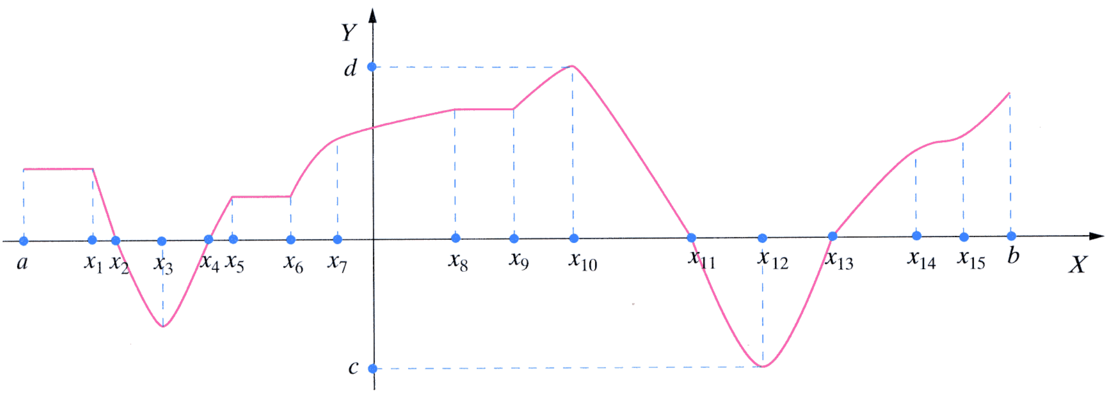


Ryc. 5.67.

Odczytywanie własności funkcji z wykresu

Niemal każdego dnia zasypywani jesteśmy informacjami w postaci wykresów dotyczących zwłaszcza gospodarki, ekonomii, meteorologii, demografii itp. Dlatego bardzo ważna w życiu jest umiejętność odczytywania pewnych własności funkcji na podstawie jej wykresu.

Spójrzmy na poniższy wykres pewnej funkcji $y=f(x)$.



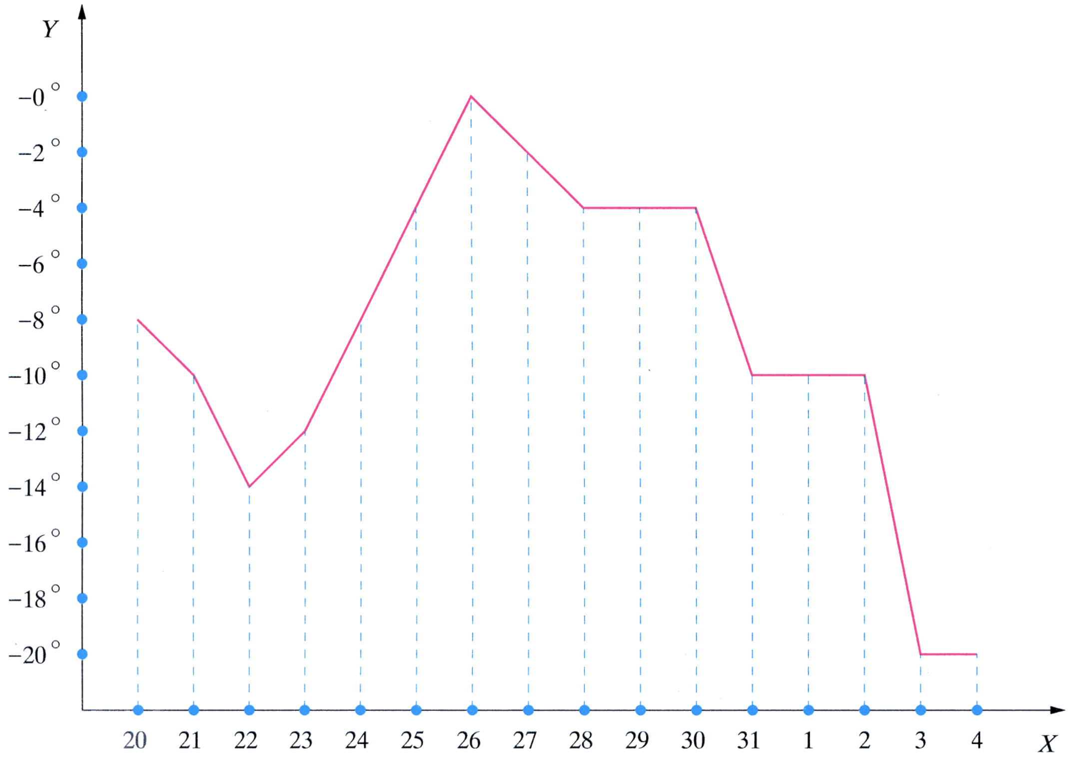
Ryc. 5.68.

Oto własności tej funkcji, możliwe do odczytania z tego wykresu :

1. Dziedziną tej funkcji jest przedział $\langle a; b\rangle$, a zbiorem wartości przedział $\langle c; d\rangle$.
2. Funkcja ta nie jest różnowartościowa, bo na przykład $f(x_5)=f(x_6)$.
3. Funkcja ta nie jest monotoniczna w całej dziedzinie, ale jest monotoniczna przedziałami, na przykład w przedziałach: $(x_1; x_3)$, $(x_{10}; x_{12})$ – maleje, w przedziałach: $(x_3; x_5)$, $(x_6; x_8)$, $(x_9; x_{10})$, $(x_{12}; x_{14})$ – rośnie, a w przedziałach: $(a; x_1)$, $(x_5; x_6)$, $(x_8; x_9)$ jest stała.
4. Funkcja ta nie jest stałego znaku, na przykład w przedziałach $(x_2; x_4)$, $(x_{11}; x_{13})$ jest ujemna (wykres funkcji w tych przedziałach jest poniżej osi OX), zaś w przedziałach: $(a; x_2)$, $(x_4; x_{11})$, $(x_{13}; b)$ jest dodatnia (wykres funkcji w tych przedziałach leży powyżej osi odciętych).
5. Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby: x_2, x_4, x_{11} i x_{13}.
6. Największą wartość funkcja ta przyjmuje w x_{10} i wynosi ona d, zaś najmniejszą – równą c – w punkcie x_{12}.
7. Funkcja ta nie jest ani parzysta, ani nieparzysta (dlaczego?).
8. Funkcja ta nie jest okresowa (dlaczego?).

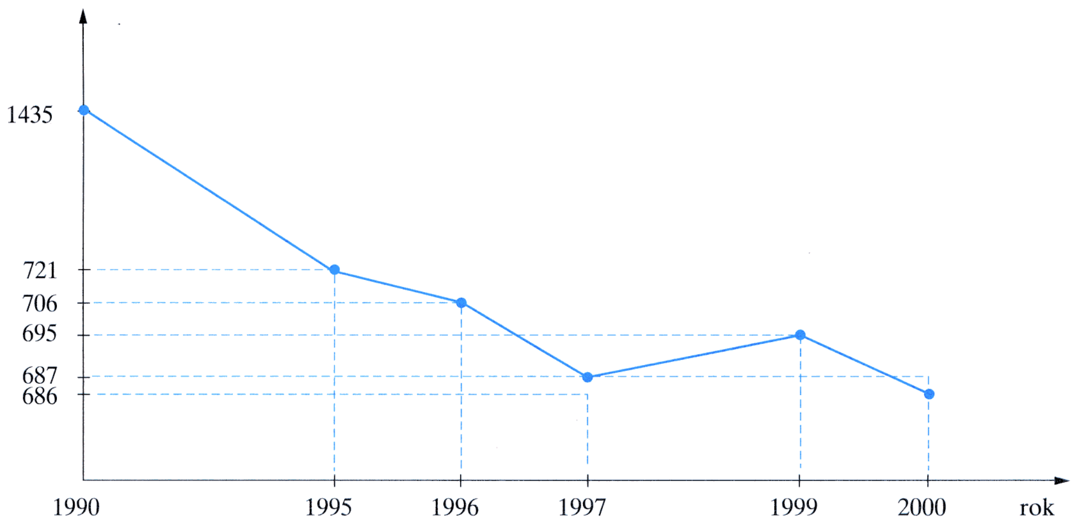
Popatrzmy na wykres, który pokazuje, jak się zmieniała temperatura powietrza od 20 grudnia 2001 roku do 4 stycznia 2002 roku (ryc. 5.69). Bez trudu można odczytać, którego dnia było najzimniej, a którego najcieplej, w jakich dniach temperatura spadała, a w jakich rosła.

I na koniec jeszcze kilka danych przedstawionych za pomocą wykresów (ryc. 5.70, 5.71, 5.72, 5.73)



Ryc. 5.69.

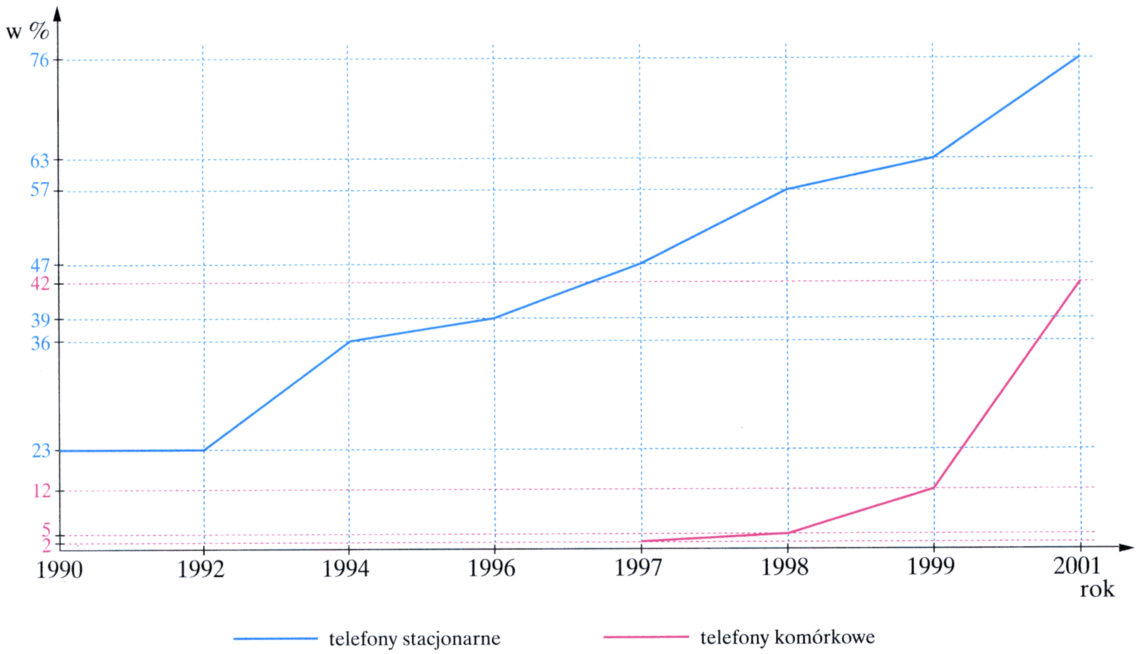
KINA (stan w dniu 31 XII)



Źródło: *Rocznik statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej.* Warszawa 1998, 2001

Ryc. 5.70.

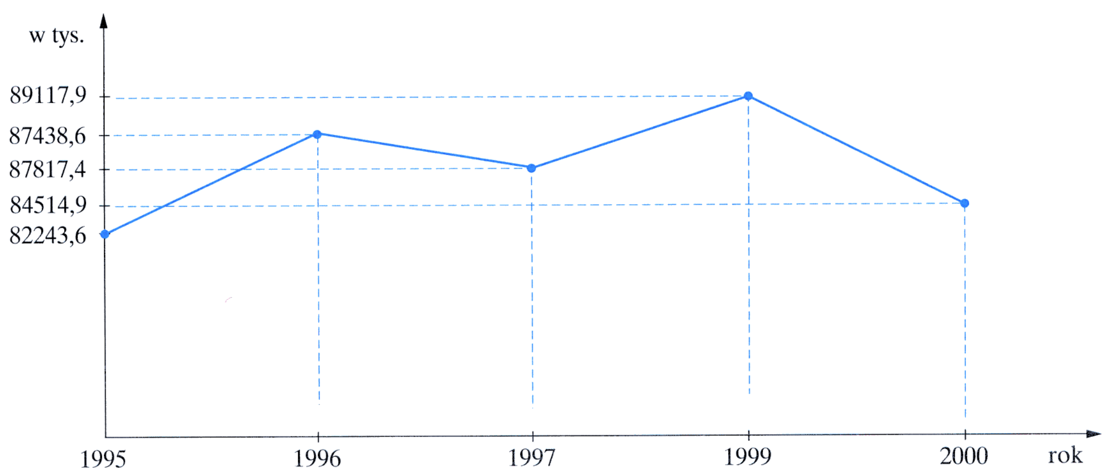
TELEFONY STACJONARNE I KOMÓRKOWE W GOSPODARSTWACH DOMOWYCH



Źródło: CBOS

Ryc. 5.71.

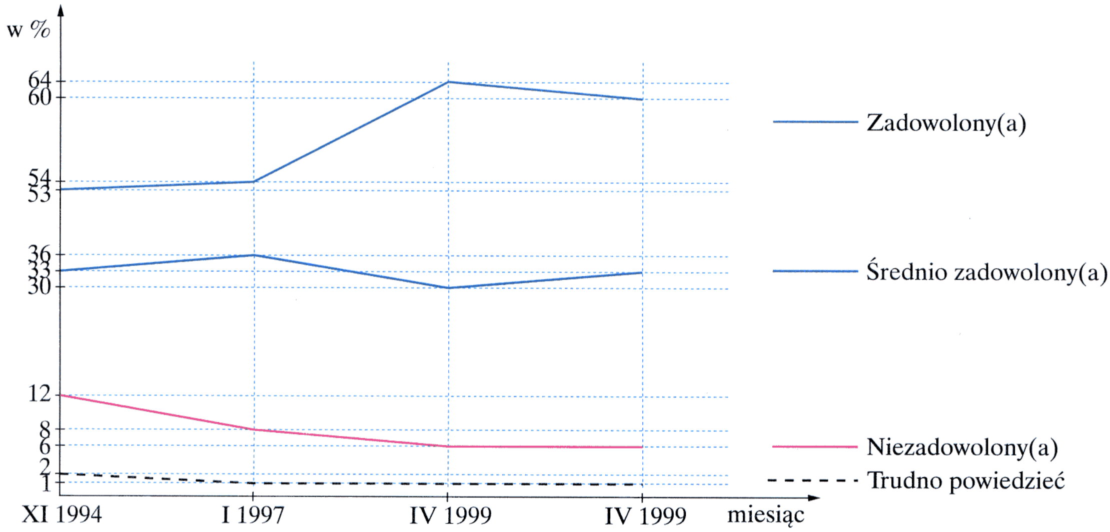
PRZYJAZDY CUDZOZIEMCÓW DO POLSKI



Źródło: *Rocznik statystyczny Rzeczypospolitej Polskiej.* Warszawa 1998, 2001

Ryc. 5.72.

CZY NA OGÓŁ JEST PAN(I) ZADOWOLONY(A) Z CAŁEGO ŻYCIA?



Źródło: CBOS

Ryc. 5.73.

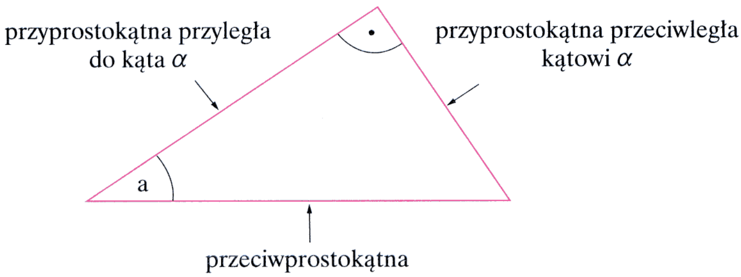
Pytania i zadania

1. W jaki sposób otrzymujemy z wykresu funkcji $y=f(x)$ wykresy funkcji:
   a) $y=f(|x|)$; b) $y=|f(x)|$; c) $y-|f(|x|)|$?
2. Jak z wykresu funkcji $y=f(x)$ otrzymujemy wykres funkcji do niej odwrotnej?
3. Narysuj wykresy funkcji:
   a) $y=[-x]$; b) $y=-[x]$; c) $y=[|x|]$; d) $y=|[x]|$.
4. Narysuj wykresy funkcji:
   a) $y=|x^2-4|x|+1|$; b) $y=\left||x|^3+3x^2+3|x|\right|$.
5. Sporządź wykresy funkcji:
   a) $y=\min\left\{\frac{1}{|x|},|x|\right\}$; b) $y=|2-|1-|1-|x|||$.

VI. Funkcje trygonometryczne

1. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

Narysujmy dowolny trójkąt prostokątny i oznaczmy jeden z jego kątów ostrych literą α.



Ryc. 6.1.

Bok tego trójkąta leżący naprzeciw kąta prostego nazywamy **przeciwprostokątną**, a pozostałe dwa boki – **przyprostokątnymi**, przy czym jedną z nich nazywamy przyprostokątną **przyległą** do kąta α, a drugą – przyprostokątną **przeciwległą** temu kątowi (ryc. 6.1).

Określmy teraz funkcje trygonometryczne kąta α jako stosunki długości odpowiednich boków tego trójkąta.

Sinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej kątowi α do długości przeciwprostokątnej.

Sinus kąta α będziemy nazywać: $\sin\alpha$.

Cosinusem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej.

Cosinus kąta α zapiszemy krótko: $\cos\alpha$.

Tangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przeciwległej kątowi α do długości przyprostokątnej przyległej do kąta α.

Tangens kąta α piszemy krótko: $\mathrm{tg}\,\alpha$.

Cotangensem kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym nazywamy stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przyprostokątnej przeciwległej kątowi α.

Cotangens kąta α będziemy zapisywać: $\mathrm{ctg}\,\alpha$.

Definicje te, wbrew pozorom, nie zależą od trójkąta prostokątnego, w którym kąt α występuje, a jedynie od miary tego kąta. Tym nie mniej na razie tę kwestię zostawmy. Wrócimy do niej nieco później.

Z powyższych definicji wynika następujący wniosek.

Wniosek. Funkcje trygonometryczne kąta ostrego w trójkącie prostokątnym są dodatnie.

Z ostatnich dwóch definicji wynika, że cotangens jest odwrotnością tangensa, a tangens – cotangensa, to znaczy

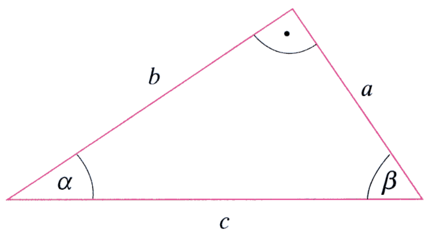
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} \text{ i } \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Zapiszemy to jako wiosek:

Wniosek. Dla każdego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzi związek

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Narysujmy trójkąt prostokątny raz jeszcze i przyjmijmy w nim następujące oznaczenia: a, b, c – długości boków, przy czym a i b – długości przyprostokątnych, zaś c – przeciwprostokątnej, α – kąt leżący naprzeciwko boku a, β – kąt leżący naprzeciwko boku b.



Ryc. 6.2.

Przy tych oznaczeniach w trójkącie prostokątnym mamy:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \quad \sin\beta = \frac{b}{c},$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c}, \quad \cos\beta = \frac{a}{c},$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a},$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{b}.$$

Widzimy więc, że dla kątów ostrych α i β trójkąta prostokątnego zachodzą równości

$$\sin\beta = \cos\alpha,$$
$$\cos\beta = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha.$$

Podstawiając do nich $\beta = 90^\circ - \alpha$ (gdyż $\alpha + \beta = 90^\circ$), otrzymujemy następujący wniosek:

Wniosek. Dla każdego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzą związki:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha.$$

Powyższe związki odczytujemy, mówiąc, że sinus i cosinus są wzajemnymi **kofunkcjami**: sinus jest kofunkcją cosinusa, a cosinus – sinusa, tangens zaś jest kofunkcją cotangensa, a cotangens – tangensa. Na przykład:

$$\sin 10^\circ = \sin\left(90^\circ - 80^\circ\right) = \cos 80^\circ,$$

$$\cos 15^\circ = \cos\left(90^\circ - 75^\circ\right) = \sin 75^\circ,$$

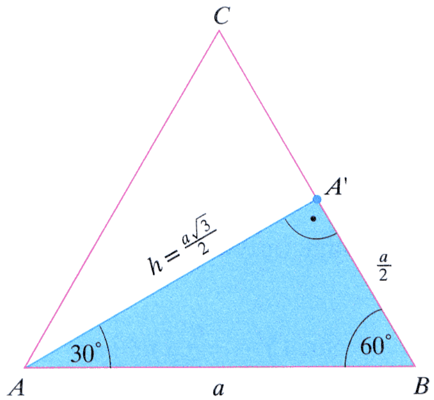
$$\operatorname{tg} 23^\circ = \operatorname{tg}\left(90^\circ - 67^\circ\right) = \operatorname{ctg} 67^\circ,$$

$$\operatorname{ctg} 40^\circ = \operatorname{ctg}\left(90^\circ - 50^\circ\right) = \operatorname{tg} 50^\circ.$$

Termin „kofunkcja" oznacza funkcję kąta dopełniającego. Otrzymane przed chwilą wzory to tak zwane **wzory redukcyjne dla kąta 90° – α**.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 30°, 45°, 60°

Kąty 30° i 60° mamy w trójkącie prostokątnym, będącym połówką trójkąta równobocznego (ryc. 6.3).



Ryc. 6.3.

Przyjmijmy, że bok tego trójkąta równobocznego jest równy a. Wówczas jego wysokość $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (na mocy twierdzenia Pitagorasa, zastosowanego do trójkąta $AA'B$).

I stąd:

$$\sin 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} 30^\circ = \frac{1}{\operatorname{tg} 30^\circ} = \sqrt{3},$$

zaś

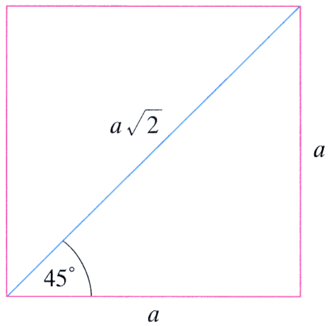
$$\sin 60^\circ = \sin\left(90^\circ - 30^\circ\right) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos 60^\circ = \sin 30^\circ = \tfrac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3},$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Aby znaleźć wartości funkcji trygonometrycznych dla **kąta 45°**, posłużmy się równoramiennym trójkątem prostokątnym, który możemy otrzymać, połowiąc kwadrat jego przekątną.



Ryc. 6.4.

Przekątna kwadratu o boku a ma, oczywiście, długość $a\sqrt{2}$.
Stąd:

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos 45^\circ = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg} 45^\circ = \frac{a}{a} = 1,$$

$$\operatorname{ctg} 45^\circ = \operatorname{tg} 45^\circ = 1.$$

Uzyskane wyniki zbierzemy w tabelce:

Funkcja \ kąt	30°	45°	60°
sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
tangens	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cotangens	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$

Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego

Jeden związek już poznaliśmy, a mianowicie

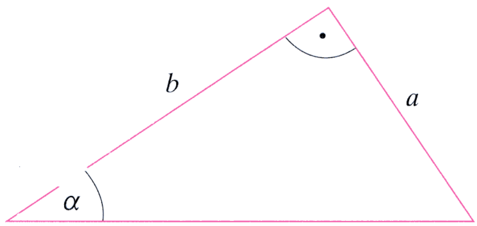
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1.$$

Wiemy, że

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}, \text{ zaś } \cos\alpha = \frac{b}{c},$$

oraz

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (twierdzenie Pitagorasa).}$$



Ryc. 6.5.

Wobec tego

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1.$$

Ponadto

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ i } \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Otrzymaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

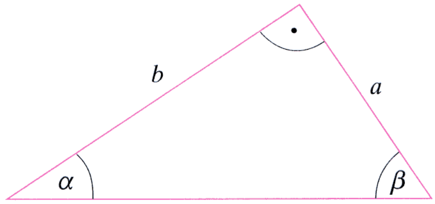
Twierdzenie

Dla każdego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzą związki:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
2. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$;
3. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;
4. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

Przejdźmy teraz do rozwiązywania zadań.

Przykład 1. Wyznacz długości boków i kąty trójkąta prostokątnego, w którym $a = 4$, $c = 8$.



Ryc. 6.6.

Rozwiązanie:

Mamy:

$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$, skąd $\alpha = 30^\circ$.

$\alpha + \beta = 90^\circ$, więc $\beta = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$.

$\sin\beta = \frac{b}{c}$, skąd $b = c \cdot \sin\beta = 8 \cdot \sin 60^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$.

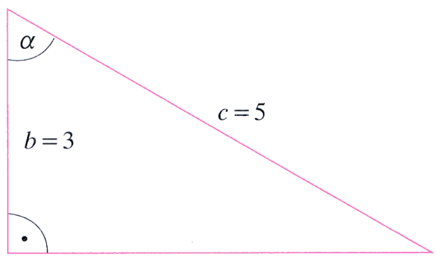
Odpowiedź: Kąty tego trójkąta są równe $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$, a szukany bok ma długość $4\sqrt{3}$.

Uwaga. Spróbuj rozwiązać to zadanie bez trygonometrii.

Przykład 2. Zbuduj kąt ostry α, wiedząc, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Rozwiązanie:

Trzeba zbudować trójkąt prostokątny, w którym stosunek długości przyprostokątnej przyległej do kąta α do długości przeciwprostokątnej wynosi $\frac{3}{5}$. Możemy przyjąć $b = 3$, $c = 5$. Budujemy więc najpierw kąt prosty. Następnie z jego wierzchołka odkładamy na jednym ramieniu odcinek długości 3, po czym z końca tego odcinka rysujemy łuk okręgu o promieniu 5, do przecięcia się z drugim ramieniem tego kąta. Otrzymane punkty na ramionach tego kąta prostego łączymy odcinkiem. Kąt miedzy tym odcinkiem a odcinkiem długości 3 jest tym, który należało zbudować (ryc. 6.7).



Ryc. 6.7.

Przykład 3. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, wiedząc, że $\sin\alpha = 0{,}8$.

Rozwiązanie:

Korzystając z poznanych związków pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta, otrzymujemy:

$$\cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - (0{,}8)^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{3}{4}.$$

Odpowiedź: $\cos\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$.

Przykład 4. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli $\operatorname{ctg}\alpha = 2$.

Rozwiązanie:

Mamy $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, czyli $\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2$, skąd $\cos\alpha = 2\sin\alpha$. Ponadto $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.

Rozwiązując układ równań z niewiadomymi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$, otrzymujemy:

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \cos\alpha = 2\sin\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2\alpha + (2\sin\alpha)^2 = 1 \\ \cos\alpha = 2\sin\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\sin^2\alpha = 1 \\ \cos\alpha = 2\sin\alpha, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}. \end{cases}$$

(Z równania $5\sin^2\alpha = 1$ wyznaczamy $\sin^2\alpha = \frac{1}{5}$, skąd $|\sin\alpha| = \sqrt{\frac{1}{5}}$, czyli $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$, gdyż funkcje trygonometryczne przyjmują dla kątów ostrych tylko wartości dodatnie).

I dalej $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, więc $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Odpowiedź: $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Przykład 5. Oblicz (nie korzystając z tablic):

a) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ$;

b) $\left(\sin 15^\circ + \sin 75^\circ\right)^2 + \left(\cos 15^\circ - \cos 75^\circ\right)^2$;

c) $\operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ \cdot \operatorname{tg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}50^\circ \cdot \operatorname{tg}60^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów redukcyjnych, otrzymujemy:

a) $\sin^2 18^\circ + \sin^2 72^\circ = \sin^2 18^\circ + \sin^2\left(90^\circ - 18^\circ\right) = \sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ = 1$;

b) $\left(\sin 15^\circ + \sin 75^\circ\right)^2 + \left(\cos 15^\circ - \cos 75^\circ\right) = \sin^2 15^\circ + 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ + \sin^2 75^\circ +$

$+\cos^2 15^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 75^\circ + \cos^2 75^\circ = \left(\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ\right) +$

$+\left(2\sin 15^\circ \sin 75^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 75^\circ\right) + \left(\sin^2 75^\circ + \cos^2 75^\circ\right) = 1 + 0 + 1 = 2$, gdyż

$2\sin 15^\circ \sin 75^\circ - 2\cos 15^\circ \cos 75^\circ = 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ - 2\cos\left(90^\circ - 75^\circ\right)\cos\left(90^\circ - 15\right) =$

$= 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ - 2\sin 15^\circ \sin 75^\circ = 0$;

c) $\operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}30^\circ \cdot \operatorname{tg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}50^\circ \cdot \operatorname{tg}60^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ =$

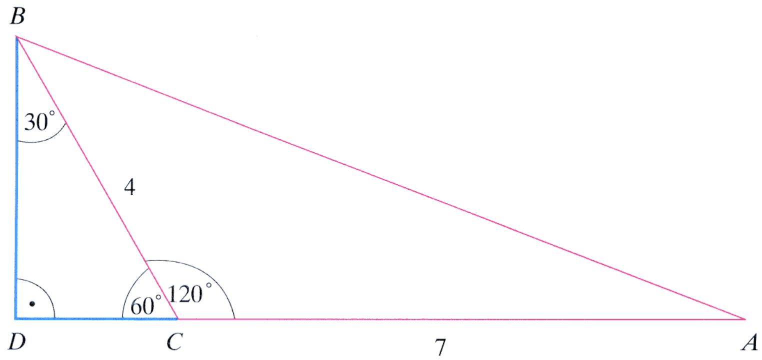
$= \left(\operatorname{tg}10^\circ \cdot \operatorname{tg}80^\circ\right) \cdot \left(\operatorname{tg}20^\circ \cdot \operatorname{tg}70^\circ\right) \cdot \left(\operatorname{tg}30^\circ \cdot \operatorname{tg}60^\circ\right) \cdot \left(\operatorname{tg}40^\circ \cdot \operatorname{tg}50^\circ\right) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$,

gdyż $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Przykład 6. W trójkącie ABC dane są: $\sphericalangle C = 120^\circ$, $AC = 7$, $BC = 4$. Wyznacz bok AB tego trójkąta.

Rozwiązanie:

Dobudujmy do danego trójkąta ABC trójkąt prostokątny BCD (ryc. 6.8). W trójkącie tym mamy kąty ostre 30° i 60°.



Ryc. 6.8.

Jego boki BD i CD wynoszą zatem:

$BD = 4\sin 60^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$,

$CD = 4\cos 60^\circ = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

Wobec tego w trójkącie prostokątnym ABD bok

$DA = DC + CA = 2 + 7 = 9$,

zaś

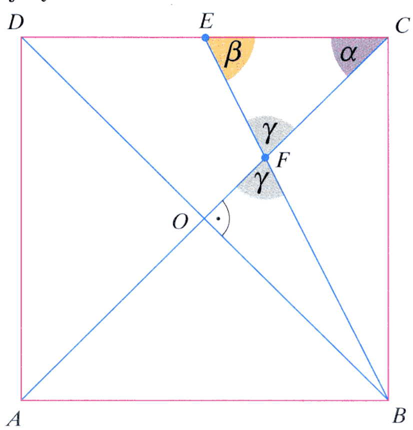
$$AB = \sqrt{BD^2 + DA^2} = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 9^2} = \sqrt{12 + 81} = \sqrt{93}.$$

Przykład 7*. W kwadracie $ABCD$ punkt E jest środkiem boku CD. Odcinki BE i AC przecinają się w punkcie F. Wyznacz tangensy kątów trójkąta CEF.

Rozwiązanie:

Oznaczmy kąty tego trójkąta przez α, β i γ. Zauważmy, że $\alpha = \sphericalangle ACD$, $\beta = \sphericalangle BEC$, zaś $\gamma = \sphericalangle AFB$. Stąd (ryc. 6.9)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{AD}{CD} = 1, \quad \operatorname{tg}\beta = \frac{BC}{CE} = \frac{2 \cdot CE}{CE} = 2.$$



Ryc. 6.9.

Poprowadźmy jeszcze przekątną BD tego kwadratu. Niech O będzie punktem, w którym ona przecina przekątną AC tego kwadratu. Ponieważ przekątne te połowią się pod kątem prostym, więc w trójkącie BDC odcinki BE i CO są środkowymi i oczywiście $OF : FC = EF : FB = 1 : 2$. Ponadto są one do siebie prostopadłe. W takim razie w trójkącie prostokątnym OFB przyprostokątna OF jest trzy razy krótsza od przyprostokątnej OB, gdyż $OB = OC$.

I wobec tego mamy $\operatorname{tg}\gamma = \frac{OB}{OF} = 3$.

Odpowiedź: Tangensy kątów trójkąta CEF wynoszą odpowiednio 1, 2 i 3.

Przykład 8*. Przekątna A_1C prostopadłościanu $ABCDA_1B_1C_1D_1$ tworzy z jego krawędziami CC_1, CD i CB odpowiednio kąty α, β i γ. Udowodnij, że

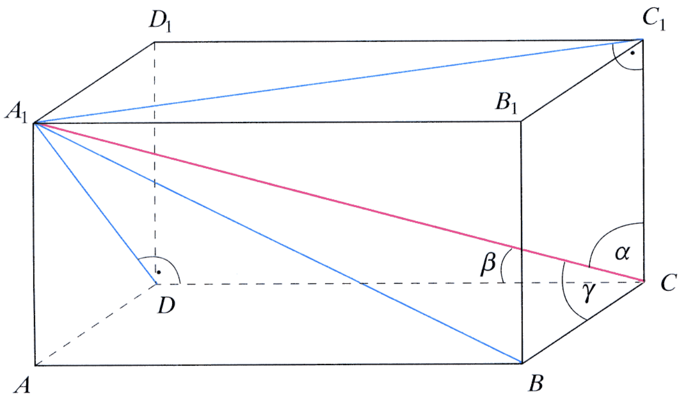
a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$;

b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Rozwiązanie:

a) Ponieważ (ryc. 6.10) w trójkącie prostokątnym ACC_1 $\sin\alpha = \frac{A_1C_1}{A_1C}$, zaś w trójkątach prostokątnych A_1CD i A_1BC $\sin\beta = \frac{A_1D}{A_1C}$ i $\sin\gamma = \frac{A_1B}{A_1C}$, więc

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{A_1C_1^2 + A_1D^2 + A_1B^2}{A_1C^2}.$$



Ryc. 6.10.

Ale na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do odpowiednich trójkątów prostokątnych mamy:

$A_1D^2 = A_1A^2 + AD^2 = C_1C^2 + AD^2$,

$A_1B^2 = A_1A^2 + AB^2 = C_1C^2 + AB^2$, bo $A_1A = C_1C$,

$AD^2 + AB^2 = A_1C_1^2$, gdyż $BD = A_1C_1$.

Po dodaniu stronami pierwszych dwóch równości i korzystając z trzeciej, otrzymujemy

$A_1D^2 + A_1B^2 = A_1C_1^2 + 2C_1C^2$,

skąd

$A_1C_1^2 + A_1D^2 + A_1B^2 = A_1C_1^2 + A_1C_1^2 + 2C_1C^2 = 2\left(A_1C_1^2 + C_1C^2\right) = 2A_1C^2$

i ostatecznie

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \frac{A_1C_1^2 + A_1D^2 + A_1B^2}{A_1C^2} = \frac{2A_1C^2}{A_1C^2} = 2.$$

b) Mamy

$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - \sin^2\alpha + 1 - \sin^2\beta + 1 - \sin^2\gamma =$

$= 3 - (\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma) = 3 - 2 = 1.$

Zastosowania funkcji trygonometrycznych w różnych dziedzinach działalności człowieka

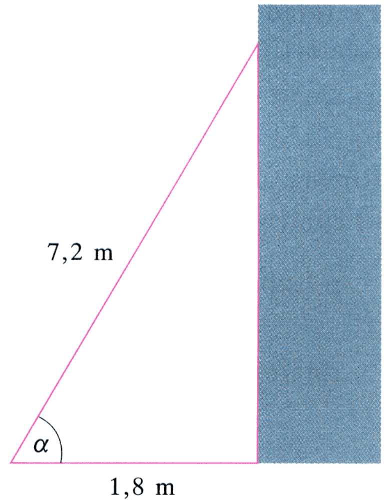
Przykład 1. Pod jakim kątem jest nachylona drabina o długości 7,2 m, jeżeli jej dolny koniec jest odległy od ściany o 1,8 m (ryc. 6.11)?

Rozwiązanie:

Korzystając z określenia cosinusa, otrzymujemy

$$\cos\alpha = \frac{1,8}{7,2} = 0,2500.$$

W tablicach wartości funkcji trygonometrycznych znajdujemy kąt α, którego cosinus wynosi 0,25, a mianowicie kątem tym jest $\alpha \approx 75^\circ$.

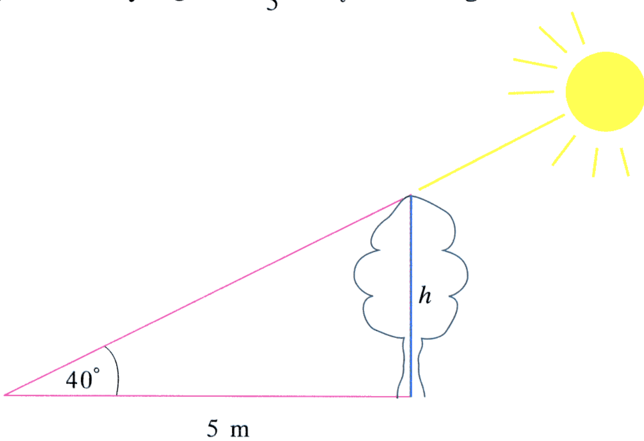


Ryc. 6.11.

Przykład 2. Promień słońca tworzy z płaszczyzną poziomą kąt 40°. Jak wysokie drzewo rzuca wówczas cień długości 5 m (ryc. 6.12).

Rozwiązanie:

Z definicji tangensa mamy: $\mathrm{tg}\,40^\circ = \frac{h}{5}$, skąd $h = 5 \cdot \mathrm{tg}\,40^\circ$.



Ryc. 6.12.

Z tablic odczytujemy, że $\mathrm{tg}\,40^\circ \approx 0,84$. Zatem ostatecznie otrzymujemy $h = 5 \cdot 0,84 = 4,2$.

Odpowiedź: To drzewo ma około 4,2 m wysokości.

Przykład 3. Aby wyznaczyć szerokość rzeki (na poniższej rycinie jest to odcinek DC), zmierzono odległość $AD = 52,5$ m prostopadle do brzegu. Drzewo BC, rosnące na brzegu po przeciwnej stronie rzeki, widać z punktu A pod kątem wzniesienia 22°, a z punktu D – pod kątem 35°. Oblicz szerokość rzeki.

Rozwiązanie:

Oznaczmy wysokość drzewa (długość odcinka BC) przez h, a szerokość rzeki (długość odcinka DC) przez x.

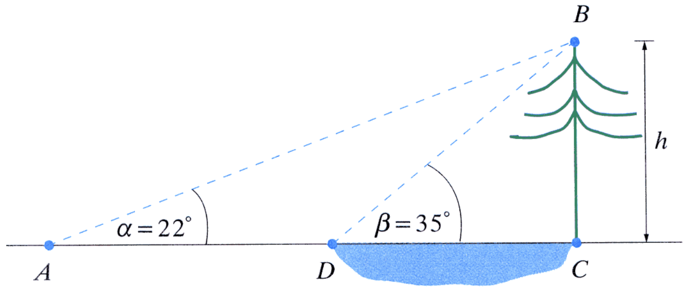
W trójkącie ABC otrzymujemy wówczas (ryc. 6.13)

$$(*)\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{AD+x},$$

a w trójkącie BCD

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{x},$$

stąd $h = x \cdot \operatorname{tg}\beta$.



Ryc. 6.13.

Wracając z tym do równości $(*)$, otrzymujemy równość

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x\operatorname{tg}\beta}{AD+x},$$

skąd

$$x = \frac{AD \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$

Ostatecznie więc

$$x = \frac{52{,}5 \cdot \operatorname{tg}22^\circ}{\operatorname{tg}35^\circ - \operatorname{tg}22^\circ} \approx \frac{52{,}5 \cdot 0{,}40}{0{,}70 - 0{,}40} \approx 72.$$

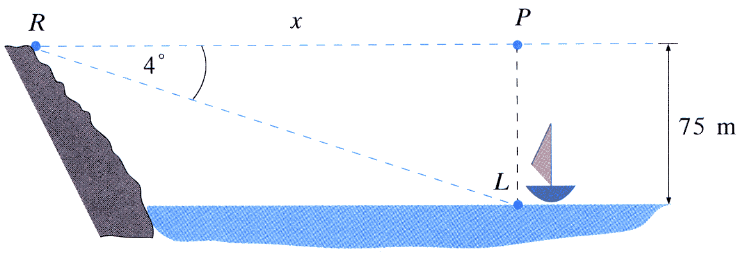
Odpowiedź: Rzeka ma szerokość 72 m.

Przykład 4. Reflektor ustawiony nad brzegiem morza na wysokości 75 m uchwycił łódź pod kątem 4° (kąt depresji). Oblicz odległość łodzi od brzegu morza.

Rozwiązanie:

W trójkącie RPL mamy (ryc. 6.14)

$$\operatorname{tg}4^\circ = \frac{75}{x},$$



Ryc. 6.14.

skąd $x = \dfrac{75}{\operatorname{tg}4^\circ} = \dfrac{75}{0{,}0699} \approx 1073$ m.

Odpowiedź: Łódź znajduje się w odległości 1073 m od brzegu morza.

Pytania i zadania

1. Podaj definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.
2. Jakie znasz związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta ostrego?
3. Podaj wzory redukcyjne dla kąta $90^\circ - \alpha$.
4. Wyznacz boki i kąty trójkąta prostokątnego, w którym:

   a) $c = 2,\ b = \sqrt{3}$; b) $c = 28,\ \alpha = 30^\circ$; c) $a = 6,\ c = 12$;

   d) $b = 24,\ \alpha = 69^\circ$; e) $a = 17,\ \beta = 43^\circ$.
5. Wyznacz długość boku AB trójkąta ABC, mając dane:

   $\sphericalangle C = 150^\circ,\ AC = 6\sqrt{3},\ BC = 12$.
6. Zbuduj kąt α, jeśli:

   a) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$; b) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; d) $\operatorname{ctg}\alpha = 3$.
7. Oblicz bez użycia tablic:

   a) $(\sin 25^\circ + \cos 25^\circ)(\sin 25^\circ - \cos 25^\circ) + 2\sin^2 65^\circ$;

   b) $\cos^2 10^\circ + \cos^2 80^\circ$;

   c) $(\cos 17^\circ + \cos 73^\circ)^2 + (\sin 17^\circ - \sin 73^\circ)^2$;

   d) $\operatorname{ctg} 10^\circ \cdot \operatorname{ctg} 20^\circ \cdot \operatorname{ctg} 30^\circ \cdot \operatorname{ctg} 40^\circ \cdot \operatorname{ctg} 50^\circ \cdot \operatorname{ctg} 60^\circ \cdot \operatorname{ctg} 70^\circ \cdot \operatorname{ctg} 80^\circ$.
8. Doprowadź do najprostszej postaci:

   a) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha$; b) $(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha)$; c) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha$;

   d) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1 - \cos\alpha} + \dfrac{\sin^2\alpha}{1 + \cos\alpha}$; e) $\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos\alpha - \cos^3\alpha}$;

   f) $\dfrac{\sin\alpha}{1 - \sin\alpha} \cdot \dfrac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}$; g) $\dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\cos\alpha \cdot \operatorname{tg}^2\alpha}$.
9. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta ostrego α, jeśli:

   a) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$; b) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$; c) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; d) $\sin\alpha = \dfrac{2\sqrt{n}}{n+1}$.
10. Wiadomo, że α i β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego. Oblicz wartość ułamka

    $\dfrac{\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}{(1 - \cos^2\beta) \cdot \sin\beta}$.
11. Lina długości 10 m podtrzymuje maszt. Kąt nachylenia liny do ziemi wynosi 55°. Na jakiej wysokości od ziemi jest zamocowana lina?
12. W odległości 5 km od pewnej góry widać jej szczyt pod kątem wzniesienia 19°. Jak wysoka jest ta góra?
13. Samolot widać pod kątem 35° w momencie, gdy znajduje się on nad punktem odległym od obserwatora o 4 km. Na jakiej wysokości i w jakiej odległości od obserwatora znajduje się ten samolot?

14*. Szklankę w kształcie walca o średnicy 6 cm i wysokości 9 cm napełniono wodą. Następnie szklankę tę przechylono tak, że $\frac{1}{3}$ ilości wody wylała się. Pod jakim kątem przechylono szklankę?

2. Pojęcie miary kąta i jego uogólnienie

Kąty możemy mierzyć. Polega to na przyporządkowaniu im liczb zwanych ich miarami (albo rozwartościami).

Aby określić miarę kąta należy najpierw zdefiniować **kąt jednostkowy** zwany krótko **jednostką** tej miary, a następnie stwierdzić, ile razy kąt jednostkowy mieści się w danym kącie. Otrzymana liczba jest **miarą kąta**.

Katem jednostkowym nazywamy ten kąt, któremu przyporządkujemy liczbę 1. Wówczas:
- kąty równe mają równe miary,
- miara sumy dwóch kątów równa jest sumie ich miar.

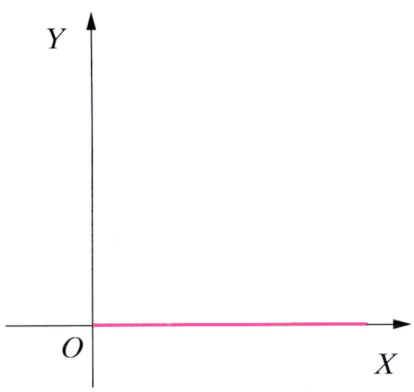
Dowodzi się, że każdemu kątowi można przyporządkować jednoznacznie (przy obranym kącie jednostkowym) miarę. Kątowi zerowemu przyporządkujemy jako miarę liczbę 0.

W szkole podstawowej i w gimnazjum poznałeś miarę stopniową kąta. Jednostką tej miary jest kąt równy $\frac{1}{360}$ kąta półpełnego. Jego miara wynosi 1° (1 stopień).

Zatem kąt zerowy ma miarę 0°, kąt prosty ma miarę 90°, a kąt półpełny 180°. Kąt ostry ma miarę mniejszą niż 90°, a kąt rozwarty – większą niż 90°.

W dotychczasowym rozumieniu miary stopniowej kąta umiemy wskazać kąty o mierze na przykład 60°, 100°, czy też 330°. Kąty, o których uczyłeś się w geometrii, mają miary stopniowe z przedziału $\langle 0^\circ ; 360^\circ \rangle$ Liczby, na przykład 450°, -630°, 1200°, nie były miarami żadnych kątów. Jak zatem rozszerzyć pojęcie miary kąta, aby rozumieć, co to takiego kąt o mierze na przykład 450°, -630°, czy też 1200°?

Określimy mianowicie **kąt** jako **miarę obrotu**. Rozważmy na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych półprostą, której punkt początkowy znajduje się w początku tego układu, i obracajmy ją dookoła tego punktu. Przyjmijmy za początkowe położenie tej półprostej – takie, gdy pokrywa się ona z dodatnią pó[illegible] (ryc. 6.15).

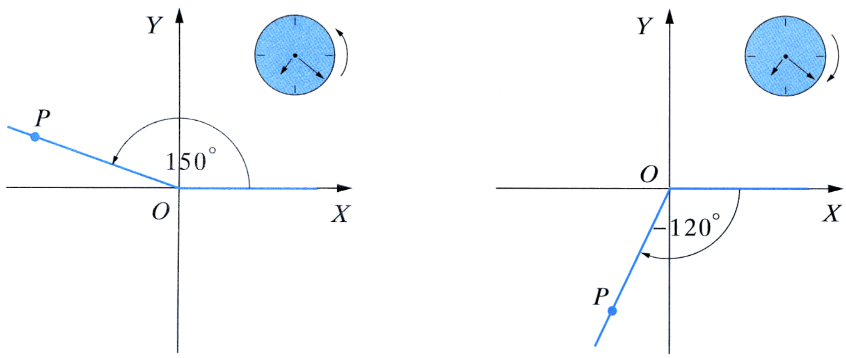


Ryc. 6.15.

Półprostą tę możemy obracać wokół punktu O w dwóch kierunkach:
- zgodnym z ruchem wskazówek zegara,
- przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.

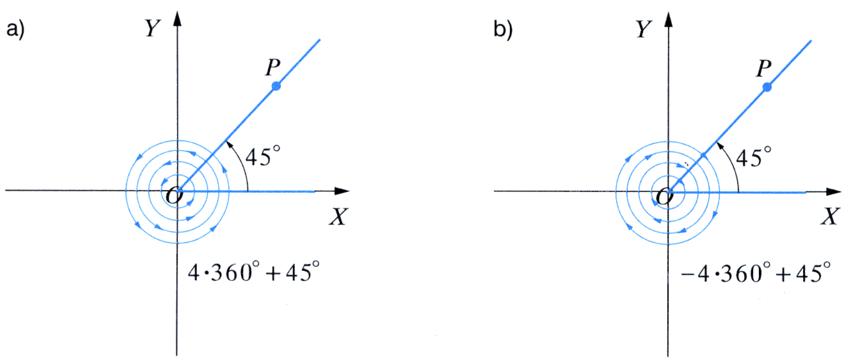
Jeżeli ją obrócimy wokół punktu O o pewien kąt, to powiemy, że półprosta ta zakreśliła ten kąt; za jego **ramię początkowe** uznajemy **dodatnią półoś OX**, a ramię końcowe oznaczamy przez OP. Ponadto przyjmujemy miarę tego kąta za:

- **dodatnią**, gdy półprosta ta zakreśliła go w kierunku **przeciwnym** do ruchu wskazówek zegara,
- **ujemną**, gdy półprosta ta zakreśliła go w kierunku **zgodnym** z ruchem wskazówek zegara.



Ryc. 6.16.

Półprostą tę możemy obrócić dowolnie wiele razy całkowicie i jeszcze o pewien kąt mniejszy od kąta pełnego. Jeżeli obrócimy ją całkowicie na przykład cztery razy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara i jeszcze o kąt 45°, to powiemy, że półprosta ta zakreśliła kąt o mierze $4 \cdot 360^\circ + 45^\circ = 1485^\circ$ (albo że suma miar wszystkich zakreślonych kątów wynosi $4 \cdot 360^\circ + 45^\circ = 1485^\circ$; ryc. 6.17a). Gdy zaś półprosta ta wykona cztery pełne obroty w kierunku zgodnym z ruchem wskazówek zegara i jeszcze obrót o kąt 45°, to zakreśli ona kąt o mierze $-4 \cdot 360^\circ + 45^\circ = -1395^\circ$ (ryc. 6.17b).



Ryc. 6.17.

Zauważmy przy tym, że ramię początkowe i końcowe kąta o mierze 1485° pokrywa się z ramieniem odpowiednio początkowym i końcowym kąta o mierze 45°. Inaczej mówiąc, ramię początkowe i ramię końcowe kąta 1485° jest w tym samym położeniu co ramię, odpowiednio, początkowe i końcowe kąta 45°. Podobnie można powiedzieć o ramionach początkowych i końcowych kątów -1395° i 45°. Będziemy więc utożsamiać ze sobą zarówno kąty 1485° i 45°, jak również kąty -1395° i 45°. Zauważmy przy tym, że liczbę 45° możemy tutaj traktować jako resztę z dzielenia przez 360° liczb 1485° i -1395°.

Wniosek. Każdą liczbę stopni kątowych, albo (co na jedno wychodzi) kąt o dowolnej mierze stopniowej, można jednoznacznie przestawić w postaci

$$(*) \qquad k \cdot 360^\circ + \alpha, \text{ gdzie } k \in C, \ \alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ).$$

Kąt $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha$ jest miarą k pełnych obrotów półprostej OP wokół punktu O (w kierunku: zgodnym z ruchem wskazówek zegara, gdy $k < 0$, a przeciwnym, gdy $k \geqslant 0$) i obrotu o kąt $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$. A ponieważ przy tym ramiona kąta β pokrywają się z ramionami kąta α, więc kąty te możemy ze sobą utożsamiać. Mówimy wtedy po prostu, że **ramiona kąta** α są **ramionami kąta** β.

Oczywiście jednoznaczność przedstawienia dowolnego kąta β w postaci $(*)$ zapewnia znane nam z arytmetyki liczb całkowitych twierdzenie o dzieleniu z resztą.

Aby zatem zbudować kąt β o dowolnej liczbie stopni, budujemy kąt α. Na przykład:

- ramiona kąta $\beta = k \cdot 360^\circ$, gdzie $k \in C$, pokrywają się z dodatnią półosią OX; kąt ten utożsamiamy z kątem zerowym,
- ramiona kąta $\beta = (2k+1) \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$, przedłużają się do całej osi OX, podobnie jak ramiona kąta półpełnego o wierzchołku w punkcie O,
- ramiona kąta $\beta = 930^\circ$ pokrywają się z ramionami kąta 210°, gdyż $930^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 210^\circ$,
- ramiona kąta $\beta = -930^\circ$ są ramionami kąta 150°, bo $-930^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 150^\circ$.

Pytania i zadania

1. Omów pojęcie kąta jako miary obrotu.
2. Przedstaw kąty: 750°, -750°, 1200°, -1200°, 1560°, -1560° w postaci $k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$.
3. Jaki kąt zakreśliła wskazówka minutowa zegara od godziny:
   a) 13^{15} do 15^{40};
   b) 14^{25} do 16^{10};
   c) 9^{45} do 11^{50}?
4. Która jest godzina, jeśli od 10^{15} wskazówka minutowa zegara zakreśliła kąt:
   a) 750°;
   b) -750°;
   c) 1200°;
   d) -1200°;
   e) 1560°;
   f) -1560°.

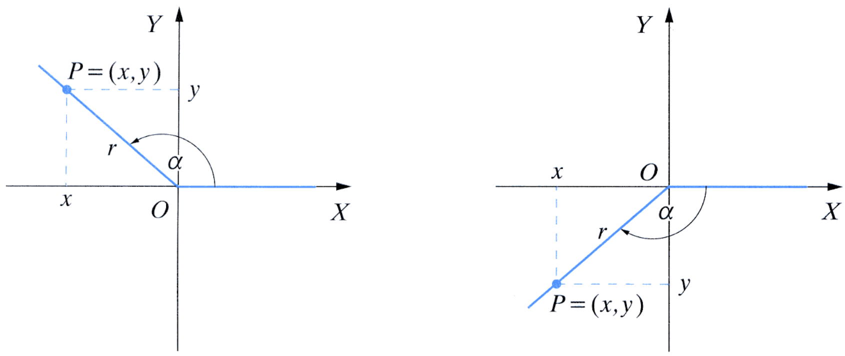
5^*. Ile razy w ciągu doby wskazówki zegara:
   a) pokrywają się;
   b) są do siebie prostopadłe?

3. Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta

Znamy już definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym. Obecnie określimy funkcje trygonometryczne dowolnego kąta.

Sinusem kąta α nazywamy stosunek **rzędnej** dowolnego punktu (różnego od O) na końcowym ramieniu kąta α do **odległości** tego punktu od początku O układu współrzędnych.

Przy oznaczeniach jak na rycinach mamy: $\boxed{\sin\alpha = \frac{y}{r}}$



Ryc. 6.18.

Cosinusem kąta α nazywamy stosunek **odciętej** dowolnego punktu (różnego od O) na końcowym ramieniu kąta α do **odległości** tego punktu od początku O układu współrzędnych.

Tak więc: $\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{r}}$

Tangensem kąta α nazywamy stosunek **rzędnej** dowolnego punktu (różnego od O) na końcowym ramieniu kąta α do **odciętej** tego punktu.

Zatem: $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}}$

Cotangensem kąta α nazywamy stosunek **odciętej** dowolnego punktu (różnego od O) na końcowym ramieniu kąta α do **rzędnej** tego punktu.

Tak więc: $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}}$

Czy określone w ten sposób: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ są rzeczywiście funkcjami kąta α? Innymi słowy, skąd wiadomo, że wartości stosunków $\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, \frac{y}{x}, \frac{x}{y}$ nie zależą od wyboru punktu na końcowym ramieniu kąta α? I wreszcie, czy stosunki te określone są dla każdego kąta α?

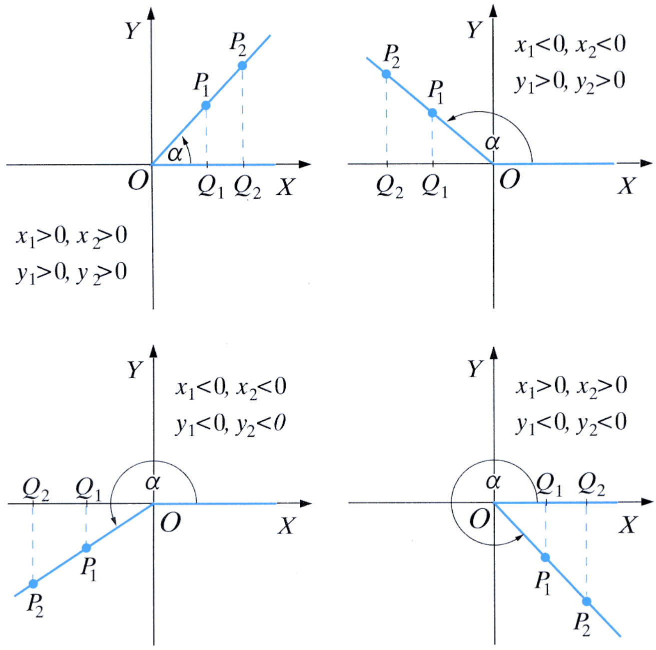
Odpowiedź na te pytania daje nam następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli $P(x,y)$ jest punktem na końcowym ramieniu kąta α odległym o $r>0$ od początku układu współrzędnych, to wartości stosunków: $\frac{y}{r}$, $\frac{x}{r}$, $\frac{y}{x}$, $\frac{x}{y}$ nie zależą od wyboru punktu P.

☐ Dowód. Aby się o tym przekonać, wystarczy wykazać, że dla dowolnych dwóch różnych punktów $P_1=(x_1,y_1)$ i $P_2=(x_2,y_2)$ na końcowym ramieniu kąta α, takich że $OP_1=r_1$ i $OP_2=r_2$, zachodzą równości:

$$\frac{y_1}{r_1}=\frac{y_2}{r_2},\quad \frac{x_1}{r_1}=\frac{x_2}{r_2},\quad \frac{y_1}{x_1}=\frac{y_2}{x_2},\quad \frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}.$$



Ryc. 6.19.

Istotnie, z twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcje (rys. 6.19):

1. $\frac{P_1Q_1}{OP_1}=\frac{P_2Q_2}{OP_2}$,
2. $\frac{OQ_1}{OP_1}=\frac{OQ_2}{OP_2}$,
3. $\frac{P_1Q_1}{OQ_1}=\frac{P_2Q_2}{OQ_2}$.

Ponieważ

$P_1Q_1=|y_1|$, $P_2Q_2=|y_2|$, $OQ_1=|x_1|$, $OQ_2=|x_2|$, $OP_1=r_1$, $OP_2=r_2$, więc równości 1–3 przybierają odpowiednio postać:

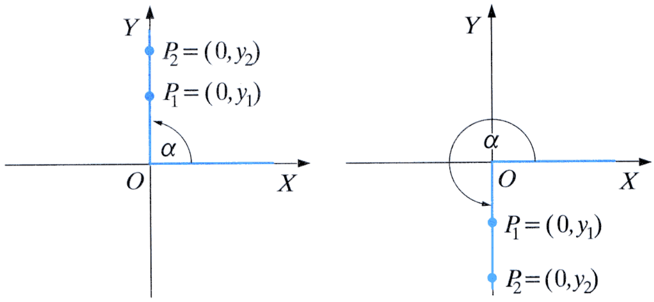
1'. $\frac{|y_1|}{r_1} = \frac{|y_2|}{r_2}$,

2'. $\frac{|x_1|}{r_1} = \frac{|x_2|}{r_2}$,

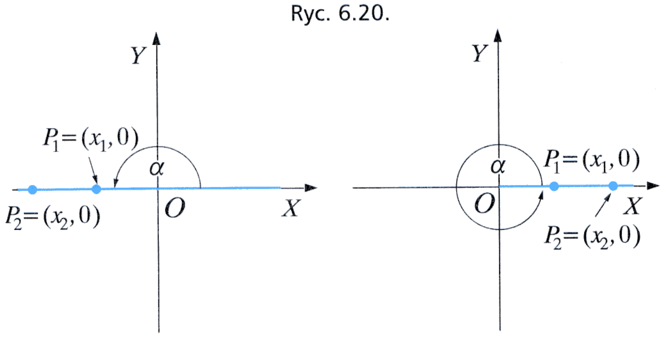
3'. $\frac{|y_1|}{x_1} = \frac{|y_2|}{x_2}$.

Stąd $\frac{y_1}{r_1} = \frac{y_2}{r_2}$, $\frac{x_1}{r_1} = \frac{x_2}{r_2}$ i $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ (dlaczego?).

Jeżeli końcowe ramię kąta α zawarte jest w osi OY (ryc. 6.20), czyli, gdy $\alpha = (2k+1) \cdot 90^\circ$, gdzie $k \in C$, to $x_1 = x_2 = 0$, i stosunki $\frac{y_1}{x_1}$ i $\frac{y_2}{x_2}$ nie są określone. Jeśli zaś końcowe ramię kąta α zawarte jest w osi OX (ryc. 6.21), czyli, gdy $\alpha = k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$, to $y_1 = y_2 = 0$ i stosunki $\frac{x_1}{y_1}$ i $\frac{x_2}{y_2}$ nie są określone.

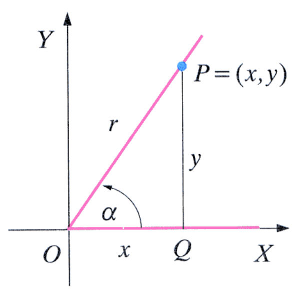


Ryc. 6.20.



Ryc. 6.21.

Wniosek. Funkcje sinus i cosinus są określone dla każdego kąta. Funkcja tangens jest określona dla wszystkich kątów różnych od $(2k+1) \cdot 90^\circ$, gdzie $k \in C$. Funkcja cotangens jest określona dla wszystkich kątów różnych od $k \cdot 180^\circ$, gdzie $k \in C$.



Ryc. 6.22.

Zauważmy, że gdy kąt α jest ostry, to przyjęte definicje funkcji trygonometrycznych są równoważne definicjom funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym.

Rzeczywiście, gdy α jest kątem ostrym, to jego końcowe ramię znajduje się w I ćwiartce układu współrzędnych. Kąt α jest kątem ostrym trójkąta prostokątnego OPQ, w którym (ryc. 6.22):

x jest przyprostokątną przyległą do α,
y jest przyprostokątną przeciwległą α,
r jest przeciwprostokątną.

Zatem $\sin\alpha = \frac{y}{r}$, $\cos\alpha = \frac{x}{r}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$.

Wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta prostego

Poniższa tabelka przedstawia wartości funkcji trygonometrycznych dla całkowitych wielokrotności kąta prostego.

Funkcja \ kąt	0°	90°	180°	270°	360°
sinus	0	1	0	-1	0
cosinus	1	0	-1	0	1
tangens	0	nie istnieje	0	nie istnieje	0
cotangens	nie istnieje	0	nie istnieje	0	nie istnieje

Uzasadnimy tylko niektóre z tych wartości.

Dowód, gdy $\alpha = 0^\circ$ (ryc. 6.23)

▢ Jeżeli $P = (x, y)$ jest punktem na końcowym ramieniu kąta α, pokrywającym się z dodatnią półosią OX, to $x = r$, $y = 0$.

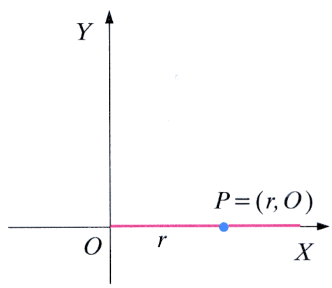
I wobec tego mamy:

$$\sin 0^\circ = \frac{y}{r} = \frac{0}{r} = 0,$$

$$\cos 0^\circ = \frac{x}{r} = \frac{r}{r} = 1,$$

$$\operatorname{tg} 0^\circ = \frac{y}{x} = \frac{0}{r} = 0,$$

$$\operatorname{ctg} 0^\circ = \frac{x}{y} = \frac{r}{0} - \text{nie istnieje.}$$ ▢



Ryc. 6.23.

Dowód, gdy $\alpha = 270^\circ$ (ryc. 6.24)

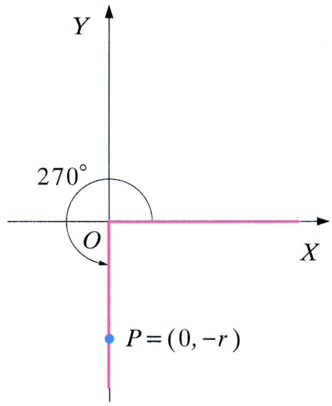
▢ Końcowe ramię kąta $\alpha = 270^\circ$ pokrywa się z ujemną półosią OY. Jeśli więc $P = (x, y)$ jest punktem na końcowym ramieniu kąta α, to $x = 0$, $y = -r$, i wtedy:

$$\sin 270^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-r}{r} = -1,$$

$$\cos 270^\circ = \frac{x}{r} = \frac{0}{r} = 0,$$

$\operatorname{tg} 270^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-r}{0}$ – nie istnieje,

$\operatorname{ctg} 270^\circ = \frac{x}{y} = \frac{0}{-r} = 0.$ ■



Ryc. 6.24.

Dowody dla $\alpha \in \{90^\circ, 180^\circ, 360^\circ\}$ przeprowadź samodzielnie.

Na koniec obliczmy wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów 870° i -765°.

Niech $\alpha = 870^\circ$

Ponieważ $870^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 150^\circ$, więc obliczamy wartości funkcji trygonometrycznych dla kąta 150°. Budujemy kąt 150° i na jego końcowym ramieniu obieramy dowolnie punkt P, a następnie znajdujemy jego współrzędne. Trójkąt OPQ jest połową trójkąta równobocznego o boku $OP = r$ (rys. 6.25), zatem $PQ = \frac{r}{2}$, zaś $OQ = \frac{r\sqrt{3}}{2}$. Końcowe ramię kąta 150° leży w II ćwiartce układu współrzędnych, więc $x < 0$, $y > 0$.

Stąd $x = -OQ = -\frac{r\sqrt{3}}{2}$, $y = PQ = \frac{r}{2}$.

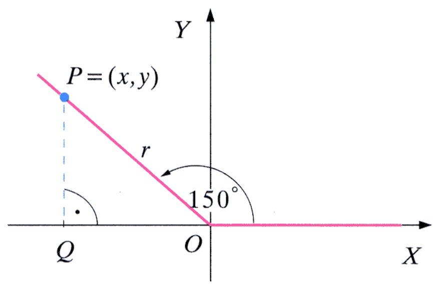
Mamy więc

$$\sin 870^\circ = \sin 150^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{r}{2}}{r} = \frac{1}{2},$$

$$\cos 870^\circ = \cos 150^\circ = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{r\sqrt{3}}{2}}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\operatorname{tg} 870^\circ = \operatorname{tg} 150^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{r}{2}}{-\frac{r\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\operatorname{ctg} 870^\circ = \operatorname{ctg} 150^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{r\sqrt{3}}{2}}{\frac{r}{2}} = -\sqrt{3}.$$



Ryc. 6.25.

Niech $\alpha = -765^\circ$

Mamy $-765^\circ = -3 \cdot 360^\circ + 315^\circ$.

Obliczamy więc wartość funkcji trygonometrycznych dla kąta 315°. Budujemy ten kąt i na jego końcowym ramieniu obieramy dowolnie punkt P, a następnie znajdujemy jego współrzędne. Trójkąt OPQ jest połową kwadratu o przekątnej $OP = r$. Zatem jego bok $OQ = PQ = \frac{r}{\sqrt{2}}$ (ryc. 6.26).

Końcowe ramię kąta 315° leży w IV ćwiartce układu współrzędnych, więc $x > 0$, $y < 0$.

Stąd $x = OQ = \frac{r}{\sqrt{2}}$, $y = -PQ = -\frac{r}{\sqrt{2}}$.

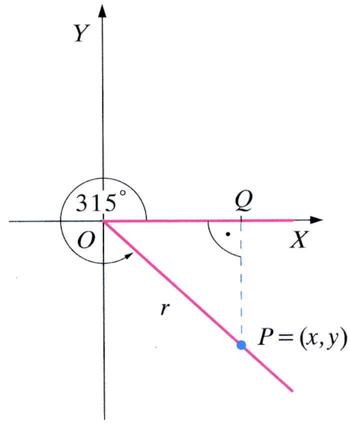
Wobec tego

$$\sin(-765^\circ) = \sin 315^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{r}{\sqrt{2}}}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\cos(-765^\circ) = \cos 315^\circ = \frac{x}{r} = \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{tg}(-765^\circ) = \operatorname{tg} 315^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{r}{\sqrt{2}}}{\frac{r}{\sqrt{2}}} = -1,$$

$$\operatorname{ctg}(-765^\circ) = \operatorname{ctg} 315^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{r}{\sqrt{2}}}{-\frac{r}{\sqrt{2}}} = -1.$$



Ryc. 6.26.

Pytania i zadania

1. Podaj definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta.
2. Dla jakich kątów α jest określony: a) $\sin\alpha$, b) $\cos\alpha$, c) $\operatorname{tg}\alpha$, d) $\operatorname{ctg}\alpha$?
3. Jakie wartości przyjmują funkcje trygonometryczne dla całkowitych wielokrotności kąta prostego?
4. W której ćwiartce układu współrzędnych leży końcowe ramię kąta α, gdy:

   a) $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha > 0$; b) $\sin\alpha > 0$ i $\cos\alpha < 0$;

   c) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha > 0$; d) $\sin\alpha < 0$ i $\cos\alpha < 0$;

   e) $\sin\alpha > 0$ i $\operatorname{tg}\alpha < 0$; f) $\cos\alpha > 0$ i $\operatorname{ctg}\alpha < 0$.
5. Oblicz wartości funkcji trygonometrycznych dla kątów:

   a) 135°, 210°, 300°; b) 1140°, 1830°, 2310°; c) -1320°, -1580°, -3450°.
6. Określ znak funkcji trygonometrycznych w poszczególnych ćwiartkach układu współrzędnych, wpisując w tabelce odpowiednio „+” lub „–”.

Funkcja \ kąt	I	II	III	IV
sinus				
cosinus				
tangens				
cotangens				

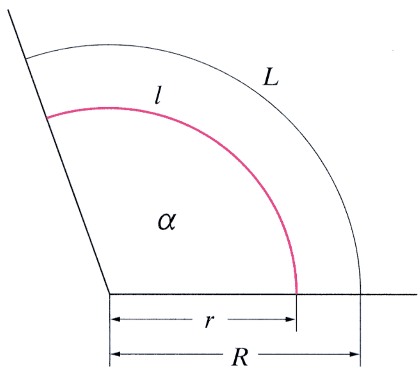
4. Miara łukowa kąta

Kąty, którymi się zajmowaliśmy dotychczas, mierzyliśmy w stopniach. Doskonale wiemy, że na przykład:
- kąt pełny ma 360°,
- kąt półpełny ma 180°,
- kąt prosty ma 90°,
- kąt zerowy ma 0°.

Miara stopniowa jest dogodna przede wszystkim w geometrii. Dokonując w tej dziedzinie dokładniejszych obliczeń, kąty można mierzyć nie tylko w stopniach, ale także w minutach (1 minuta to $\frac{1}{60}$ stopnia), a nawet w sekundach (1 sekunda to $\frac{1}{60}$ minuty). Widzimy więc, że ten sposób mierzenia kątów (podobnie jak czasu) oparty jest na sześćdziesiątkowym systemie liczenia. Nie znajduje on więc zastosowań tam, gdzie na ogół posługujemy się systemem dziesiątkowym. I choć zdefiniowaliśmy funkcje trygonometryczne kąta wyrażanego dotąd w stopniach, to w pewnych zagadnieniach teoretycznych dotyczących właśnie funkcji trygonometrycznych wygodniej jest mierzyć kąty w inny sposób. Tej właśnie kwestii poświęcimy ten podrozdział.

Wprowadzimy tak zwaną **miarę łukową kąta**, zwaną też **miarą teoretyczną**.

Rozważmy dowolny kąt i zatoczmy z jego wierzchołka okrąg o dowolnie wybranym promieniu r. Niech l oznacza długość łuku okręgu, zawartego w tym kącie (ryc. 6.27).



Ryc. 6.27.

Miarą łukową kąta nazywamy stosunek długości tego łuku do długości promienia.

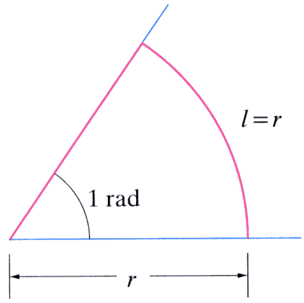
Tak więc $\alpha = \dfrac{\text{dugość łuku}}{\text{dugość promienia}} = \dfrac{l}{r}$.

Miara łukowa kąta nie zależy od długości promienia, gdyż łuki l i L zatoczone z wierzchołka danego kąta i zawarte w tym kącie są proporcjonalne do swych promieni r i R,

$$\frac{l}{r} = \frac{L}{R}.$$

Jednostką miary łukowej jest **radian** (w skrócie rad). Radian jest to kąt, w którym długość łuku jest równa długości promienia.

Krótko mówiąc: Miara łukowa kąta to liczba radianów w nim zawartych.



Ryc. 6.28.

– Kąt pełny ma miarę łukową 2π; mówimy też, że kąt pełny równa się 2π radianów.
Zatem $2\pi\,\text{rad} = 360^\circ$,
skąd

$$\boxed{1\ \text{rad} = \frac{360^\circ}{2\pi} \approx 57^\circ 17' 44''}$$

co czytamy: 1 radian to około 57 stopni, 17 minut, 44 sekundy.

– Kąt półpełny ma miarę łukową π, a więc $\pi\,\text{rad} = 180^\circ$.

– Kąt prosty ma miarę łukową $\frac{\pi}{2}$, czyli $\frac{\pi}{2}\,\text{rad} = 90^\circ$.

– Kąt 1° ma $\frac{\pi}{180}$ radianów.

– Kąt n° ma $\frac{\pi n}{180}$ radianów.
Zatem:

Wniosek. Miara łukowa kąta jest iloczynem jego miary stopniowej przez liczbę $\frac{\pi}{180}$.

Miarę łukową dowolnego kąta obliczamy z miary stopniowej, zamieniając stopnie na radiany, czyli mnożąc liczbę stopni przez $\frac{\pi}{180}$.

Tak więc miarą łukową kąta $\beta = k \cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ jest liczba $x = 2k\pi + x_0$, gdzie $x_0 = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha$ i $x_0 \in \langle 0; 2\pi)$. Na przykład:

– miarą łukową kąta 1140° jest liczba $\frac{19}{3}\pi$, gdyż

$$1140^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 60^\circ = 3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{19}{3}\pi,$$

– miarą łukową kąta -3450° jest liczba $-\frac{115}{6}\pi$, gdyż

$$-3450^\circ = -10 \cdot 360^\circ + 150^\circ = -20\pi + \frac{5}{6}\pi = -\frac{115}{6}\pi.$$

Pytania i zadania

1. Co to jest miara łukowa kąta?
2. Co to jest 1 radian?
3. Wyznacz miarę łukową kątów: 30°, 45°, 60°, 120°, 210°, 225°, 270°, 300°, 315°.
4. Wyznacz miarę stopniową kątów o mierze łukowej:
$\frac{3}{2}\pi$; $\frac{3}{4}\pi$; $\frac{4}{3}\pi$; $\frac{\pi}{10}$; 3; 0,4; $\sqrt{2}$.

5. W trójkącie jeden kąt ma miarę $\frac{\pi}{10}$, a drugi kąt jest dwa razy większy od trzeciego. Wyznacz miary nieznanych kątów tego trójkąta.
6. Wyznacz miarę łukową kąta:
   a) pięciokąta foremnego;
   b) sześciokąta foremnego;
   c) n-kąta foremnego.

5. Funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej

Funkcje trygonometryczne znamy na razie jako funkcje kąta mierzonego w stopniach. Wiemy, ile wynosi $\sin 30^\circ$, $\cos 45^\circ$, $\operatorname{tg} 60^\circ$. Potrafimy obliczyć na przykład $\sin 315^\circ$, $\operatorname{ctg}(-600^\circ)$, a zupełnie bezradni jesteśmy wobec wyrażeń typu: $\sin 1$, $\cos 30$, $\operatorname{tg} 100$, $\operatorname{ctg}\frac{2}{3}\pi$, gdyż dotąd one nie miały sensu.

Obecnie wprowadzimy funkcje trygonometryczne zmiennej rzeczywistej, a więc funkcje, której argumentami będą liczby rzeczywiste. Wiążą się one ściśle z funkcjami kąta i mają duże znaczenie dla matematyki.

Chcąc przedstawić kąt β dowolnej miary stopniowej w postaci

$$k \cdot 360^\circ + \alpha, \text{ gdzie } k \in C \text{ i } \alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ),$$

po prostu dzieliliśmy liczbę β przez 360° i oczywiście utożsamialiśmy go z otrzymaną w tym dzieleniu resztą α.

Podobnie wyrażając kąt β dowolnej miary łukowej x w postaci

$$2k\pi + x_0, \text{ gdzie } k \in C \text{ i } x_0 \in \langle 0; 2\pi),$$

należy podzielić liczbę x przez 2π. Uzyskana w tym dzieleniu reszta x_0 zostaje przyporządkowana kątowi β.

Na przykład:

$$\frac{8}{3}\pi = 1 \cdot 2\pi + \frac{2}{3}\pi;$$

$$-\frac{15}{4}\pi = (-2) \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Wiemy doskonale, co znaczy podzielić liczbę całkowitą m przez liczbę całkowitą dodatnią n. Jednakże dzielenie liczby rzeczywistej a przez liczbę rzeczywistą dodatnią b jest dla nas zupełną nowością. Określmy więc to nieznane nam dotąd dzielenie.

!

Podzielić liczbę rzeczywistą a przez liczbę rzeczywistą dodatnią b oznacza znaleźć taką liczbę całkowitą k oraz liczbę r nieujemną i mniejszą od b, że

$$(*) \qquad a = k \cdot b + r.$$

Liczbę r nazywamy **resztą** z dzielenia liczby a przez b.

Przykłady:

1. $10 = 4 \cdot \frac{5}{2} + 0;$ $\quad a = 10,\ b = \frac{5}{2},\ k = 4,\ r = 0,$

2. $10 = 3 \cdot \frac{7}{3} + 3;\quad a = 10,\ b = \frac{7}{3},\ k = 3,\ r = 3,$

3. $13 = 10 \cdot \frac{5}{4} + \frac{1}{2};\quad a = 13,\ b = \frac{5}{4},\ k = 10,\ r = \frac{1}{2},$

4. $-\frac{7}{9} = (-2) \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{9};\quad a = -\frac{7}{9},\ b = \frac{2}{3},\ k = -2,\ r = \frac{5}{9},$

5. $-\frac{17}{3}\pi = (-3) \cdot 2\pi + \frac{\pi}{3};\quad a = -\frac{17}{3}\pi,\ b = 2\pi,\ k = -3,\ r = \frac{\pi}{3}.$

Uwaga. Występująca we wzorze $(*)$ liczba k jest po prostu największą liczbą całkowitą, nieprzekraczającą liczby $\frac{a}{b}$, czyli częścią całkowitą (cechą) tej liczby. Mamy więc

$$k = \left[\frac{a}{b}\right].$$

Liczba r (reszta z dzielenia liczby a przez b) jest iloczynem tak zwanej części ułamkowej (mantysy) liczby $\frac{a}{b}$, to znaczy różnicy $\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]$ i liczby b.

Tak więc

$$r = \left(\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]\right) \cdot b.$$

Istotnie, mamy przecież równość $\frac{a}{b} = \left[\frac{a}{b}\right] + \left(\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]\right)$, czyli równość

$$(**)\qquad a = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot b + \left(\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]\right) \cdot b.$$

A ponieważ $\left[\frac{a}{b}\right] \leqslant \frac{a}{b} < \left[\frac{a}{b}\right] + 1$ z określenia symbolu $\left[\frac{a}{b}\right]$, więc

$$0 \leqslant \frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right] < 1,$$

skąd

$$0 \leqslant \left(\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]\right) \cdot b < b.$$

Podstawiając w równości $(**)$

$$\left[\frac{a}{b}\right] = k,\ \left(\frac{a}{b} - \left[\frac{a}{b}\right]\right) \cdot b = r,$$

otrzymujemy równość $(*)$.

Wniosek 1. Dla każdej liczby rzeczywistej a i każdej liczby rzeczywistej dodatniej b istnieją: jedna liczba całkowita k oraz nieujemna i mniejsza od b jedna liczba r, takie że

$$a = k \cdot b + r.$$

Na przykład, chcąc podzielić liczbę 2002 przez π, piszemy

$$2002 = \left[\frac{2002}{\pi}\right] \cdot \pi + \left(\frac{2002}{\pi} - \left[\frac{2002}{\pi}\right]\right) \cdot \pi$$

i oczywiście w ustalonym przybliżeniu obliczamy występujące w tej równości wyrażenia.

Wniosek 2. Każdej liczbie rzeczywistej x przyporządkowujemy resztę x_0 z dzielenia x przez 2π; x_0 jest oczywiście miarą łukową pewnego kąta z przedziału $\langle 0; 2\pi)$.

Możemy teraz przystąpić do zdefiniowania funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej.

Sinusem liczby x nazywamy sinus kąta o mierze łukowej x_0.

Tak więc $\sin x = \sin x_0$.

Podobnie określamy pozostałe funkcje.

Cosinusem liczby x nazywamy cosinus kąta o mierze łukowej x_0.

Zatem $\cos x = \cos x_0$.

Z definicji tych i z określenia sinusa i cosinusa kąta otrzymujemy następujący wniosek.

Wniosek. Funkcje $y = \sin x$ i $y = \cos x$ są określone dla każdej liczby rzeczywistej x.

Inaczej mówiąc, dziedziną tych funkcji jest zbiór R liczb rzeczywistych.

Tangensem liczby x nazywamy tangens kąta o mierze łukowej x_0.

Tak więc $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$, jeśli $\operatorname{tg} x_0$ istnieje.

Tangens nie jest określony, gdy $x_0 = \frac{\pi}{2}$ lub $x_0 = \frac{3}{2}\pi$, a zatem dla tych liczb rzeczywistych x, które z dzielenia przez 2π dają resztę $\frac{\pi}{2}$ lub $\frac{3}{2}\pi$, to znaczy, gdy $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ lub $x = 2k\pi + \frac{3}{2}\pi$, gdzie $k \in C$, czyli, gdy $x = (4k+1)\frac{\pi}{2}$ lub $x = (4k+3)\frac{\pi}{2}$. Liczby całkowite postaci $4k+1$ lub $4k+3$ są nieparzyste i tylko takie. Stąd wypływa wniosek.

Wniosek. Funkcja $y = \operatorname{tg} x$ jest określona gdy $x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$. Innymi słowy: dziedziną funkcji tangens jest zbiór $R \setminus \left\{(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}; k \in C\right\}$ liczb rzeczywistych bez nieparzystych wielokrotności liczby $\frac{\pi}{2}$.

Cotangensem liczby x nazywamy cotangens kąta o mierze łukowej x_0.

Zatem: $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0$, jeśli $\operatorname{ctg} x_0$ istnieje. Cotangens nie jest określony dla $x_0 = 0$ lub $x_0 = \pi$, czyli dla tych liczb rzeczywistych x, które z dzielenia przez 2π dają resztę 0 lub π, to znaczy, gdy $x = 2k\pi$ lub $x = 2k\pi + \pi$, gdzie $k \in C$, a więc gdy $x = 2k\pi$ lub $x = (2k+1)\pi$. Parzyste i nieparzyste wielokrotności π wyczerpują wszystkie całkowite wielokrotności π. Stąd wniosek.

Wniosek. Funkcja $y = \operatorname{ctg} x$ jest określona, jeśli $x \neq k\pi$, gdzie $k \in C$.

Inaczej mówiąc: dziedziną funkcji cotangens jest zbiór $R \setminus \{k\pi;\ k \in C\}$ liczb rzeczywistych bez całkowitych wielokrotności liczby π.

Przykłady:

1. $\sin\left(\frac{7}{3}\pi\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2};$

2. $\cos\left(-\frac{7}{4}\pi\right) = \cos\left(-2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2};$

3. $\mathrm{tg}\left(\frac{25}{4}\pi\right) = \mathrm{tg}\left(3 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1;$

4. $\mathrm{ctg}\left(-\frac{11}{6}\pi\right) = \mathrm{ctg}\left((-1) \cdot 2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \mathrm{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}.$

Pytania i zadania

1. Wyznacz iloraz i resztę z dzielenia przez 2π liczb:

   a) $\frac{33}{4}\pi$; b) $-\frac{17}{5}\pi$;

   c) $-\frac{83}{3}\pi$; d) $\frac{91}{11}\pi$.

2. Podaj definicje funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej.
3. Co jest dziedziną funkcji:

   a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x$;

   c) $y = \mathrm{tg}x$; d) $y = \mathrm{ctg}x$?

4. Wypełnij tabelki:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
$\sin x$					
$\cos x$					
$\mathrm{tg}\, x$					
$\mathrm{ctg}\, x$					

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$
$\sin x$	30°						
$\cos x$		45°					
$\mathrm{tg}\, x$			60°				
$\mathrm{ctg}\, x$					135°		

5. Przedstaw w najprostszej postaci wyrażenia:

   a) $a^2\,\mathrm{tg}\frac{7}{4}\pi - \frac{ab}{\sin^2\left(-\frac{7}{4}\pi\right)} + b^2\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{15}{4}\pi\right);$

   b) $a^2\,\mathrm{ctg}\left(-\frac{7}{4}\pi\right) + \frac{ab}{\cos\left(-\frac{17}{3}\pi\right)} + 2b^2\sin\left(-\frac{11}{6}\pi\right);$

   c) $2a^3\sin\frac{25}{6}\pi - a^2b\,\mathrm{ctg}^2\left(-\frac{11}{6}\pi\right) + ab^2\,\mathrm{tg}^2\left(-\frac{17}{3}\pi\right) + 2b^3\cos\frac{7}{3}\pi.$

6. Własności funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej

Znak funkcji trygonometrycznych

Dzięki rozwiązaniu zadania na stronie 128 można się przekonać, że znak funkcji trygonometrycznych kąta zależy od tego, w której ćwiartce układu współrzędnych znajduje się końcowe ramię kąta, a więc od znaku współrzędnych punktu na tym ramieniu.

Przypomnijmy, że kątami I, II, III, IV ćwiartki nazywamy te kąty, których miary stopniowe są odpowiednio z przedziału $(0^\circ, 90^\circ)$, $(90^\circ, 180^\circ)$, $(180^\circ, 270^\circ)$, $(270^\circ, 360^\circ)$, albo miary łukowe – z przedziałów $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$, $\left(\pi; \frac{3}{2}\pi\right)$, $\left(\frac{3}{2}\pi; 2\pi\right)$. Otrzymany wynik wspomnianego zadania zapiszmy w postaci łatwego do zapamiętania wiersza:

W pierwszej ćwiartce wszystkie funkcje są dodatnie,
w drugiej tylko sinus,
w trzeciej tangens i cotangens,
a w czwartej cosinus.

Parzystość i nieparzystość

Twierdzenie

Dla każdego kąta α:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha.$$

Dla każdego kąta α, dla którego istnieje $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha.$$

Dla każdego kąta α, dla którego istnieje $\operatorname{ctg}\alpha$:

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha.$$

☐ Dowód. Zauważmy, że końcowe ramiona kątów α i $-\alpha$ są położone na płaszczyźnie współrzędnych symetrycznie względem osi OX (ryc. 6.29).

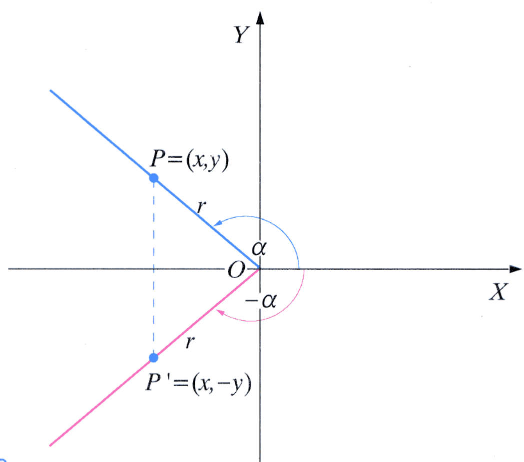
Z definicji funkcji trygonometrycznych mamy:

$$\sin(-\alpha) = \frac{-y}{r} = -\frac{y}{r} = -\sin\alpha,$$

$$\cos(-\alpha) = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{-y}{x} = -\frac{y}{x} = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } x \neq 0,$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } y \neq 0. \ ☐$$



Ryc. 6.29.

Gdy kąt α wyrazimy w mierze łukowej x, to twierdzenie to wysłowimy następująco:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin(-x) = -\sin x,$$

$$\cos(-x) = \cos x.$$

Jeśli ponadto $x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$, to

$$\mathrm{tg}(-x) = -\mathrm{tg}\, x.$$

Gdy zaś $x \neq k\pi$, gdzie $k \in C$, to

$$\mathrm{ctg}(-x) = -\mathrm{ctg}\, x.$$

Powiemy krótko: Funkcje trygonometryczne: sinus, tangens i cotangens są funkcjami nieparzystymi w swojej dziedzinie, a funkcja cosinus jest parzysta w swojej dziedzinie.

Okresowość funkcji trygonometrycznych

Z definicji funkcji trygonometrycznych kąta i przyporządkowania każdemu kątowi β takiego kąta α, że $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$ i $\beta = k\cdot 360^\circ + \alpha$, gdzie $k \in C$, wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Dla każdej liczby całkowitej k i każdego kąta α takiego, że $\alpha \in \langle 0^\circ; 360^\circ)$:

$$\sin(k\cdot 360^\circ + \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\cos(k\cdot 360^\circ + \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(k\cdot 360^\circ + \alpha) = \mathrm{tg}\,\alpha, \text{ o ile } \mathrm{tg}\,\alpha \text{ istnieje},$$

$$\mathrm{ctg}(k\cdot 360^\circ + \alpha) = \mathrm{ctg}\,\alpha, \text{ o ile } \mathrm{ctg}\,\alpha \text{ istnieje}.$$

W języku funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej twierdzenie to brzmi następująco:

Twierdzenie

Dla każdej liczby całkowitej k i każdej liczby rzeczywistej x z przedziału $(0; 2\pi\rangle$:

$$\sin(2k\pi + x) = \sin x,$$

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$

$$\mathrm{tg}(2k\pi + x) = \mathrm{tg}\, x, \text{ o ile } \mathrm{tg}\, x \text{ istnieje},$$

$$\mathrm{ctg}(2k\pi + x) = \mathrm{ctg}\, x, \text{ o ile } \mathrm{ctg}\, x \text{ istnieje}.$$

Wniosek. Funkcje trygonometryczne kąta (zmiennej rzeczywistej) są okresowe. Okresem każdej z nich jest liczba $k\cdot 360^\circ\,(2k\pi)$, gdzie $k \in C\setminus\{0\}$.

Uwaga. Wykażemy nieco później, że okresem podstawowym funkcji sinus i cosinus jest liczba 2π, a funkcji tangens i cotangens liczba π.

Przykład 1. Znajdź okres podstawowy T funkcji:

a) $\sin 2x$; b) $\sin \frac{x}{2}$; c) $\sin \pi x$; d) $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$; e) $\operatorname{ctg} 2\pi x$.

Rozwiązanie:

a) $\sin 2x = \sin(2x + 2\pi) = \sin 2(x + \pi)$. Zatem $T = \pi$.

b) $\sin \frac{x}{2} = \sin\left(\frac{x}{2} + 2\pi\right) = \sin \frac{x + 4\pi}{2}$. Zatem $T = 4\pi$.

c) $\sin \pi x = \sin(\pi x + 2\pi) = \sin \pi(x + 2)$. Zatem $T = 2$.

d) $\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2} + \pi\right) = \operatorname{tg} \frac{\pi(x + 2)}{2}$. Zatem $T = 2$.

e) $\operatorname{ctg} 2\pi x = \operatorname{ctg}(2\pi x + \pi) = \operatorname{ctg} 2\pi\left(x + \frac{1}{2}\right)$. Zatem $T = \frac{1}{2}$.

Przykład 2. Znajdź okres podstawowy T funkcji:

a) $\cos(x + 1)$; b) $\sin(2x + 5)$; c) $\operatorname{tg}(\pi - x)$; d) $\sin(1 - x)$.

Rozwiązanie:

Mamy:

a) $\cos(x + 1) = \cos(x + 1 + 2\pi) = \cos((x + 2\pi) + 1)$, więc $T = 2\pi$;

b) $\sin(2x + 5) = \sin(2x + 5 + 2\pi) = \sin(2(x + \pi) + 5)$, więc $T = \pi$;

c) $\operatorname{tg} \pi x = \operatorname{tg}(\pi x + \pi) = \operatorname{tg}(\pi + 1)$, więc $T = 1$;

d) $\sin(1 + x) = \sin(1 + x + 2\pi) = \sin(1 + (x + 2\pi))$, więc $T = 2\pi$.

Wzory redukcyjne

Sformułujemy i udowodnimy szereg twierdzeń opisujących tak zwane wzory redukcyjne. Będą to twierdzenia o funkcjach trygonometrycznych kąta. Tak jak zwykle przeformułujemy je potem na twierdzenia o funkcjach zmiennej rzeczywistej.

Twierdzenie (wzory dla kąta $90^\circ - \alpha$).

Dla dowolnego kąta α:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{ctg}\alpha \text{ jest określony,}$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ jest określony.}$$

☐ Dowód. Rozważmy kąty α i $90^\circ - \alpha$.

Nietrudno stwierdzić, że dla dowolnego kąta α końcowe ramiona kątów α i $90^\circ - \alpha$ są symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$ (zawierającej dwusieczną kąta XOY). Obierając na tych ramionach punkty odpowiednio $P = (x, y)$ i $P' = (x', y')$, odległe od punktu $(0, 0)$ o liczbę dodatnią r, otrzymujemy punkty symetryczne względem prostej o równaniu $y = x$. Zatem wtedy $x' = y$, $y' = x$.

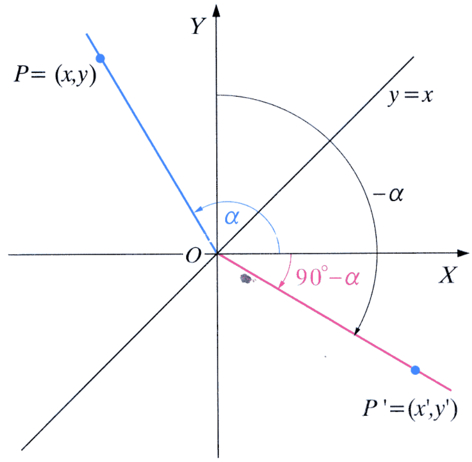
I wówczas

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \frac{y'}{r} = \frac{x}{r} = \cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{x'}{r} = \frac{y}{r} = \sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y'}{x'} = \frac{x}{y} = \mathrm{ctg}\,\alpha,$$

$$\mathrm{ctg}(90^\circ - \alpha) = \frac{x'}{y'} = \frac{y}{x} = \mathrm{tg}\,\alpha. \quad \square$$



Ryc. 6.30.

Uwaga. Wzory te otrzymaliśmy już wcześniej, gdy α był kątem ostrym w trójkącie prostokątnym.

Twierdzenie to dla funkcji zmiennej rzeczywistej możemy sformułować następująco:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x,$$

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{ctg}\,x, \text{ o ile } \mathrm{ctg}\,x \text{ istnieje},$$

$$\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \mathrm{tg}\,x, \text{ o ile } \mathrm{tg}\,x \text{ istnieje}.$$

Twierdzenie (wzory dla kąta $90^\circ + \alpha$)

Dla każdego kąta α:

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha,$$

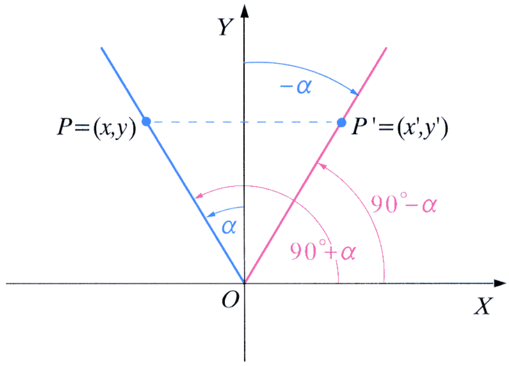
$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\mathrm{tg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha, \text{ o ile } \mathrm{ctg}\,\alpha \text{ istnieje},$$

$$\mathrm{ctg}(90^\circ + \alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha, \text{ o ile } \mathrm{tg}\,\alpha \text{ istnieje}.$$

$\square$ Dowód. Ponieważ dla dowolnego kąta α końcowe ramiona kątów $90^\circ + \alpha$ i $90^\circ - \alpha$ leżą symetrycznie względem osi OY, więc obierając na nich odpowiednio punkty $P = (x, y)$ i $P' = (x', y')$, odległe od punktu $(0, 0)$ o liczbę dodatnią r, otrzymujemy punkty symetryczne względem osi OY.

Zatem $x=-x'$, $y=y'$.



Ryc. 6.31.

I wówczas

$$\sin(90°+\alpha)=\frac{y}{r}=\frac{y'}{r}=\sin(90°-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(90°+\alpha)=\frac{x}{r}=\frac{-x'}{r}=-\frac{x'}{r}=-\cos(90°-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(90°+\alpha)=\frac{y}{x}=\frac{y'}{-x'}=-\frac{y'}{x'}=-\operatorname{tg}(90°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

(albo tak: $\operatorname{tg}(90°+\alpha)=\dfrac{\sin(90°+\alpha)}{\cos(90°+\alpha)}=\dfrac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha$),

$$\operatorname{ctg}(90°+\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(90°+\alpha)}=\frac{1}{-\operatorname{ctg}\alpha}=-\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha. \quad \square$$

Uwaga. Moglibyśmy też dowodzić tego twierdzenia w zupełnie inny sposób, mianowicie tak:

$$\sin(90°+\alpha)=\sin(90°-(-\alpha))=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\cos(90°+\alpha)=\cos(90°-(-\alpha))=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha \text{ itd.}$$

W języku funkcji zmiennej rzeczywistej udowodnione przed chwilą twierdzenie ma postać:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{ctg}x, \text{ o ile } \operatorname{ctg}x \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\operatorname{tg}x, \text{ o ile } \operatorname{tg}x \text{ istnieje}.$$

Twierdzenie (wzory dla kąta $180°-\alpha$)

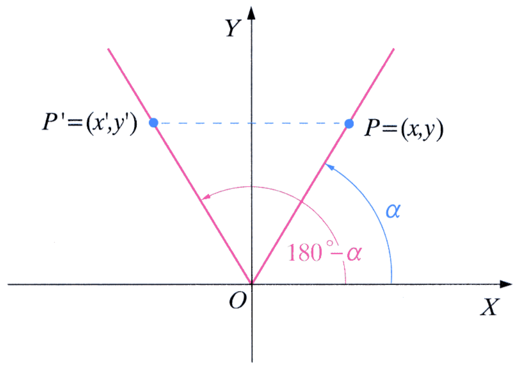
Dla każdego kąta α:

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}(180°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje}.$$



Ryc. 6.32.

☐ Dowód. Wystarczy zauważyć, że dla dowolnego kąta α końcowe ramiona kątów α i $180^\circ-\alpha$ leżą na płaszczyźnie współrzędnych symetrycznie względem osi OY.

Niech punkty $P=(x,y)$ i $P'=(x',y')$ odpowiednio na tych ramionach będą odległe od punktu $(0,0)$ o liczbę dodatnią r. Wówczas $x'=-x$, $y'=y$ oraz

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\frac{y'}{r}=\frac{y}{r}=\sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\frac{x'}{r}=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r}=-\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{\sin(180^\circ-\alpha)}{\cos(180^\circ-\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{-\cos\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{1}{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}=\frac{1}{-\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha. \ ☐$$

I podobnie jak poprzednio dla funkcji zmiennej rzeczywistej formułujemy twierdzenie.

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin(\pi-x)=\sin x,$$

$$\cos(\pi-x)=-\cos x,$$

$$\operatorname{tg}(\pi-x)=-\operatorname{tg}x, \text{ o ile } \operatorname{tg}x \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}(\pi-x)=-\operatorname{ctg}x, \text{ o ile } \operatorname{ctg}x \text{ istnieje}.$$

Twierdzenie (wzory dla kąta $180^\circ+\alpha$)

Dla każdego kąta α:

$$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{ctg}\alpha \text{ istnieje}.$$

☐ Dowód. Mamy:

$$\sin(180^\circ+\alpha)=\sin(180^\circ-(-\alpha))=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(180^\circ+\alpha)=\cos(180^\circ-(-\alpha))=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}(180^\circ-(-\alpha))=-\operatorname{tg}(-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}(180^\circ-(-\alpha))=-\operatorname{ctg}(-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha. \ ☐$$

Dla funkcji zmiennej rzeczywistej zachodzi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin(\pi + x) = -\sin x,$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos x,$$

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \text{ o ile } \operatorname{tg} x \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}(\pi + x) = \operatorname{ctg} x, \text{ o ile } \operatorname{ctg} x \text{ istnieje}.$$

Wniosek. Funkcje tangens i cotangens kąta (zmiennej rzeczywistej) są okresowe o okresie 180° (π).

Uwaga. Wykażemy niebawem, że π jest ich okresem podstawowym.

Twierdzenie (wzory dla kąta $270^\circ - \alpha$)

Dla dowolego kąta α:

$$\sin\left(270^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha,$$

$$\cos\left(270^\circ - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(270^\circ - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{ctg}\alpha \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}\left(270^\circ - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje}.$$

□ Dowód.

$$\sin\left(270^\circ - \alpha\right) = \sin\left(180^\circ + \left(90^\circ - \alpha\right)\right) = -\sin\left(90^\circ - \alpha\right) = -\cos\alpha,$$

$$\cos\left(270^\circ - \alpha\right) = \cos\left(180^\circ + \left(90^\circ - \alpha\right)\right) = -\cos\left(90^\circ - \alpha\right) = -\sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(270^\circ - \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(180^\circ + \left(90^\circ - \alpha\right)\right) = \operatorname{tg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(270^\circ - \alpha\right) = \operatorname{ctg}\left(180^\circ + \left(90^\circ - \alpha\right)\right) = \operatorname{ctg}\left(90^\circ - \alpha\right) = \operatorname{tg}\alpha. \ \square$$

Dla funkcji zmiennej rzeczywistej mamy poniższe twierdzenie:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x,$$

$$\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\sin x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \operatorname{ctg} x, \text{ o ile } \operatorname{ctg} x \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = \operatorname{tg} x, \text{ o ile } \operatorname{tg} x \text{ istnieje}.$$

Twierdzenie (wzory dla kąta $270^\circ + \alpha$)

Dla dowolnego kąta α:

$$\sin(270^\circ + \alpha) = -\cos\alpha,$$

$$\cos(270^\circ + \alpha) = \sin\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{ctg}\alpha \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}(270^\circ + \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje}.$$

▢ Dowód.

$$\sin(270^\circ + \alpha) = \sin\left(270^\circ - (-\alpha)\right) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha,$$

i dalej podobnie. ▢

Dla funkcji zmiennej rzeczywistej zachodzi twierdzenie:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin\left(\tfrac{3}{2}\pi + x\right) = -\cos x,$$

$$\cos\left(\tfrac{3}{2}\pi + x\right) = \sin x,$$

$$\operatorname{tg}\left(\tfrac{3}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{ctg}x, \text{ o ile } \operatorname{ctg}x \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}\left(\tfrac{3}{2}\pi + x\right) = -\operatorname{tg}x, \text{ o ile } \operatorname{tg}x \text{ istnieje}.$$

Twierdzenie (wzory dla kąta $360^\circ - \alpha$)

Dla każdego kąta α:

$$\sin(360^\circ - \alpha) = -\sin\alpha,$$

$$\cos(360^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje},$$

$$\operatorname{ctg}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha, \text{ o ile } \operatorname{ctg}\alpha \text{ istnieje}.$$

▢ Dowód. Dla każdego kąta α mamy

$$\sin(360^\circ - \alpha) = \sin\left(360^\circ + (-\alpha)\right) = \sin(-\alpha) = -\sin\alpha.$$

Dla pozostałych funkcji dowód taki sam. ▢

Twierdzenie to dla funkcji zmiennej rzeczywistej brzmi następująco:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x,$$
$$\cos(2\pi - x) = \cos x,$$
$$\operatorname{tg}(2\pi - x) = -\operatorname{tg} x, \text{ o ile } \operatorname{tg} x \text{ istnieje},$$
$$\operatorname{ctg}(2\pi - x) = -\operatorname{ctg} x, \text{ o ile } \operatorname{ctg} x \text{ istnieje}.$$

Pytania i zadania

1. Omów znak funkcji trygonometrycznych.
2. Scharakteryzuj parzystość i nieparzystość funkcji trygonometrycznych.
3. Omów okresowość funkcji trygonometrycznych.
4. Jakie znasz wzory redukcyjne?
5. Oblicz:

   $\sin 1200^\circ$; $\cos(-1080^\circ)$; $\operatorname{tg}(-1920^\circ)$; $\operatorname{ctg}(-330^\circ)$;
   $\sin 600^\circ$; $\cos 420^\circ$; $\operatorname{tg}(-600^\circ)$; $\operatorname{ctg} 1200^\circ$.
6. Oblicz:

   $\sin \frac{33}{4}\pi$; $\cos \frac{25}{3}\pi$; $\operatorname{tg}\left(-\frac{601}{3}\pi\right)$; $\operatorname{ctg}\left(128\frac{1}{4}\pi\right)$.
7. Wykaż, że dla każdego x:

   $\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

   $\cos\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$;

   $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, o ile ta równość ma sens;

   $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$, o ile ta równość ma sens.
8. Udowodnij, że jeśli α, β, γ są kątami dowolnego trójkąta, to:

   a) $\sin \frac{\gamma}{2} = \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$; b) $\cos \frac{\gamma}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$; c) $\sin \gamma = \cos(\alpha + \beta)$.
9. Wiedząc, że $x + y = \pi$ i $\cos x = \frac{1}{2}$, oblicz: $\sin y$, $\operatorname{tg} y$, $\operatorname{tg} x$.

10*. Oblicz

   $\cos\left(\pi \cos\left(2\pi \cos\left(3\pi \ldots \cos\left(2000\pi(\cos 2001\pi)\right)\ldots\right)\right)\right)$.

7. Przekształcanie wyrażeń trygonometrycznych

Rozdział ten poświęcimy przekształcaniu wyrażeń z zastosowaniem poznanych własności funkcji trygonometrycznych i związanych z nimi wzorów.

Przykład 1. Uprość wyrażenie $\operatorname{tg}(2\pi-x)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+\operatorname{tg}(\pi-x)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

Rozwiązanie:

Mamy:

$$\operatorname{tg}(2\pi-x)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+\operatorname{tg}(\pi-x)+\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}x=0.$$

Przykład 2. Przedstaw w najprostszej postaci

$$\frac{\sin(\alpha-180^\circ)\cos(450^\circ-\alpha)}{\sin(540^\circ+\alpha)\cos(-270^\circ+\alpha)}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\sin(\alpha-180^\circ)=\sin(-(180^\circ-\alpha))=-\sin(180^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(450^\circ-\alpha)=\cos(360^\circ+(90^\circ-\alpha))=\cos(90^\circ-\alpha)=\sin\alpha,$$

$$\sin(540^\circ+\alpha)=\sin(360^\circ+(180^\circ+\alpha))=\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,$$

$$\cos(-270^\circ+\alpha)=\cos(-(270^\circ-\alpha))=\cos(270^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,$$

więc

$$\frac{\sin(\alpha-180^\circ)\cos(450^\circ-\alpha)}{\sin(540^\circ+\alpha)\cos(-270^\circ+\alpha)}=\frac{-\sin\alpha+\sin\alpha}{-\sin\alpha-\sin\alpha}=0,\ \text{o ile}\ \sin\alpha\neq 0.$$

Przykład 3. Oblicz wartość ułamka $U=\dfrac{9\sin150^\circ-4\cos240^\circ+8\sin570^\circ}{3\sin(-210^\circ)-2\cos(-420^\circ)}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\sin150^\circ=\sin(180^\circ-30^\circ)=\sin30^\circ=\frac{1}{2},$$

$$\cos240^\circ=\cos(180^\circ+60^\circ)=-\cos60^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\sin570^\circ=\sin(360^\circ+210)=\sin210^\circ=\sin(180^\circ+30^\circ)=-\sin30^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\sin(-210^\circ)=-\sin210^\circ=-\sin(180^\circ+30^\circ)=-(-\sin30^\circ)=\frac{1}{2},$$

$$\cos(-420^\circ)=\cos420^\circ=\cos(360^\circ+60^\circ)=\cos60^\circ=\frac{1}{2},$$

więc

$$U=\frac{9\cdot\frac{1}{2}-4\left(-\frac{1}{2}\right)+8\left(-\frac{1}{2}\right)}{3\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\frac{9}{2}+2-4}{\frac{3}{2}-1}=\frac{\frac{9}{2}-2}{\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{5}{2}=5.$$

Pytania i zadania

1. Sprowadź do najprostszej postaci wyrażenia:

   a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi+x)$; b) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)-\cos(2\pi-x)$;

   c) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(\pi-x)+\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)+\operatorname{ctg}(2\pi-x)$.

2. Oblicz wartości wyrażeń:

   a) $\frac{3}{2}\operatorname{ctg}\frac{5}{3}\pi+\operatorname{tg}\frac{7}{4}\pi+\sin\frac{2}{3}\pi$; b) $\dfrac{\sin^2 120^\circ\cdot\cos\left(-180^\circ\right)}{\operatorname{tg}\left(-135^\circ\right)\operatorname{ctg}405^\circ}$;

   c) $\dfrac{3\cos\left(-300^\circ\right)\sin 135^\circ\cdot\operatorname{tg}315^\circ}{10\operatorname{ctg}315^\circ\sin\left(-150^\circ\right)\cos 225^\circ}$.

3. Przedstaw w najprostszej postaci:

   a) $\dfrac{\sin(x-\pi)\cdot\cos\left(x-\frac{5}{2}\pi\right)}{\sin(3\pi+x)\cdot\cos\left(-\frac{3}{2}\pi+x\right)}$;

   b) $\dfrac{a^4\cos 2\pi-4a^3b\sin\frac{3}{2}\pi+6a^2b^2\cos 6\pi-4ab^3\cos 3\pi-b^4\sin\frac{11}{2}\pi}{a^3\sin\frac{5}{2}\pi+3a^2b\sin\frac{9}{2}\pi-3ab^2\cos\pi-b^3\cos 15\pi}$;

   c) $\dfrac{a^4\operatorname{ctg}\frac{5}{4}\pi+4a^3b\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi+6a^2b^2\operatorname{ctg}\frac{9}{4}\pi+4ab^3\sin\frac{\pi}{2}+b^4\cos 10\pi}{a^3\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-3a^2b\operatorname{tg}(-\frac{5}{4}\pi)+3ab^2\operatorname{ctg}\frac{5}{4}\pi-b^3\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi}$.

4. Oblicz:

   a) $\dfrac{\sqrt{3}\cos\left(-510^\circ\right)-\sqrt{2}\sin\left(-495^\circ\right)}{\operatorname{tg}^2 870^\circ}$; b) $\dfrac{\sin 870^\circ+\cos\left(-1050^\circ\right)+\operatorname{tg}\left(-405^\circ\right)}{2\operatorname{tg}1140^\circ+\sqrt{2}\cos 405^\circ-\sin\left(-1170^\circ\right)}$;

   c) $\dfrac{\operatorname{tg}8\pi-\operatorname{ctg}\frac{1}{2}\pi+\sin 3\pi}{1+\operatorname{tg}\frac{5}{4}\pi+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$; d) $\left(\sin\frac{7}{2}\pi\right)^{\cos 3\pi}+(\cos 8\pi)^{\sin\frac{3}{2}\pi}$;

   e) $\left(\operatorname{tg}\frac{2}{3}\pi\right)^{\operatorname{tg}\frac{3}{4}\pi}+\left(\operatorname{ctg}\frac{11}{6}\pi\right)^{\sin 3\pi}$.

5. Niech $f(x)=\dfrac{\sin 2x+\cos 3x}{\sin 3x+\cos 4x}$. Oblicz:

   a) $f(0)$; b) $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$; c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; e) $f(\pi)$.

6. Niech $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}2x+\operatorname{ctg}3x}{1+\operatorname{tg}^2 2x}$. Wyznacz:

   a) $f(0)$; b) $f\left(\frac{\pi}{12}\right)$; c) $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$; d) $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$; e) $f(\pi)$.

7. Wykaż, że funkcja $f(x)=\dfrac{\sin x\cos x+\sin 7x\cos 12x}{1-2\cos 2x}$ jest nieparzysta.

8. Wykaż, że funkcja $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}2x+\operatorname{tg}7x\operatorname{ctg}5x}{1+2\operatorname{tg}^2 x}$ jest parzysta.

8. Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu

Wiemy już, że dla każdego kąta ostrego α w trójkącie prostokątnym zachodzą równości:

1. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$
2. $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1,$
3. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \ \operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$

Obecnie wykażemy, że związki 1–3 zachodzą nie tylko dla wspomnianych kątów.

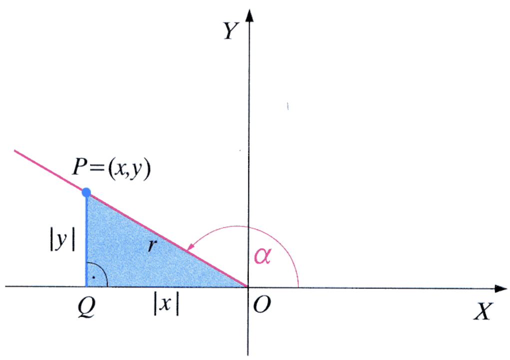
Twierdzenie

Dla każdego kąta α:

(∗) $$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Dowód. Niech α będzie dowolnym kątem, zaś $P=(x,y)$ – dowolnym punktem na końcowym ramieniu tego kąta i odległym od początku układu współrzędnych o liczbę dodatnią r.

1. Gdy końcowe ramię kąta α zawiera się w którejś z osi układu współrzędnych, to równość (∗) zachodzi; wtedy bowiem: $\sin\alpha = 0$ i ($\cos\alpha = 1$ lub $\cos\alpha = -1$), gdy końcowe ramię kąta α zawiera się w osi OX, albo $\cos\alpha = 0$ i ($\sin\alpha = 1$ lub $\sin\alpha = -1$), gdy końcowe ramię kąta α zawiera się w osi OY. W obu wypadkach jest $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$.



Ryc. 6.33.

2. Niech końcowe ramię kąta α nie zawiera się w żadnej z osi. Wówczas żadna ze współrzędnych dowolnego punktu $P=(x,y)$ na końcowym ramieniu kąta α nie jest zerem. I wtedy rzeczywiście
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{y^2}{r^2} + \frac{x^2}{r^2} = \frac{|y|^2 + |x|^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1,$$
gdyż liczby $|y|$ i $|x|$ są długościami przyprostokątnych, zaś r jest długością przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego OPQ (ryc. 6.33).

Twierdzenie (odwrotne do poprzedniego)

Jeżeli liczby a i b spełniają równość

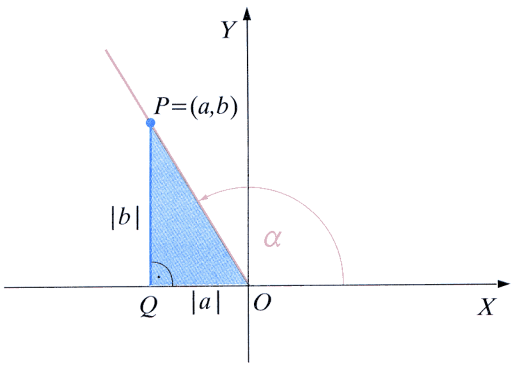
(∗) $$a^2+b^2=1,$$

to istnieje taki kąt α o mierze z przedziału $\langle 0^\circ;360^\circ)$, że

(∗∗) $$\sin\alpha=b \quad \text{i} \quad \cos\alpha=a.$$

□ Dowód. Niech a i b będą liczbami rzeczywistymi spełniającymi równość (∗). Wykażemy, że kątem α, dla którego zachodzą równości (∗∗), jest kąt, którego ramieniem początkowym jest dodatnia półoś OX, a końcowym – półprosta OP, gdzie $P=(a,b)$.

Istotnie, obierzmy na płaszczyźnie współrzędnych punkt $P=(a,b)$ i oznaczmy kąt półprostej OP z osią OX przez α (ryc. 6.34).



Ryc. 6.34.

Mamy więc z jednej strony $a^2+b^2=1$, zaś z drugiej $a^2+b^2=|a|^2+|b|^2=OP^2$.
Stąd $OP^2=1$, czyli $OP=1$.
Zatem

$$\sin\alpha=\frac{b}{OP}=\frac{b}{1}=b \quad \text{oraz} \quad \cos\alpha=\frac{a}{OP}=\frac{a}{1}=a.$$ □

Oba udowodnione twierdzenia możemy ująć krócej w jedno:

Twierdzenie

Liczby rzeczywiste a i b są odpowiednio cosinusem i sinusem tego samego kąta wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2+b^2=1$.

Ponieważ dla każdego α jest $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, więc $\sin^2\alpha\leqslant 1$ i $\cos^2\alpha\leqslant 1$, czyli $|\sin\alpha|\leqslant 1$ i $|\cos\alpha|\leqslant 1$.

Otrzymaliśmy w ten sposób następujący wniosek.

Wniosek. Dla każdego kąta α

$$-1\leqslant\sin\alpha\leqslant 1 \quad \text{i} \quad -1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1.$$

Twierdzenie

Dla każdego kąta α, dla którego istnieje $\operatorname{tg}\alpha$, mamy zależność

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

☐ Dowód. Tangens kąta α istnieje, gdy końcowe ramię kąta nie zawiera się w osi OY. Wtedy, oczywiście, $\cos\alpha \neq 0$ i dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ na końcowym ramieniu kąta α jest $x \neq 0$.

Zatem wówczas

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \ \square$$

W podobny sposób można wykazać kolejne twierdzenie:

Twierdzenie

Dla każdego kąta α, dla którego istnieje $\operatorname{ctg}\alpha$, zachodzi związek

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Z obu tych twierdzeń wynika wniosek.

Wniosek. Jeżeli kąt $\alpha \neq k \cdot 90^\circ$, gdzie $k \in C$, to $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

Dla funkcji trygonometrycznych zmiennej rzeczywistej zachodzi więc twierdzenie:

Twierdzenie

Dla każdej liczby rzeczywistej x:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{\sin x}{\cos x}, \text{ o ile } x \neq (2k+1)\cdot\frac{\pi}{2} \text{ i } k \in C,$$

$$\operatorname{ctg}x = \frac{\cos x}{\sin x}, \text{ o ile } x \neq k\pi \text{ i } k \in C,$$

$$\operatorname{tg}x \cdot \operatorname{ctg}x = 1, \text{ o ile } x \neq k\frac{\pi}{2} \text{ i } k \in C.$$

Związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu nazywane są też **podstawowymi tożsamościami trygonometrycznymi**.

Wykorzystamy je teraz do przekształcania rozmaitych wyrażeń trygonometrycznych.

Przykład 1. Uprość wyrażenie $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)\sin(\pi - x)\left(\operatorname{tg}(\pi + x) + \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\right)$.

Rozwiązanie:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x,\quad \sin(\pi-x)=\sin x,\quad \operatorname{tg}(\pi+x)=\operatorname{tg}x,\quad \operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)=\operatorname{ctg}x.$$

Zatem

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin(\pi-x)\left(\operatorname{tg}(\pi+x)+\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\right)=$$

$$=\cos x\sin x\,(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)=\cos x\sin x\left(\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=$$

$$=\cos x\sin x\,\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin x\cdot\cos x}=\sin^2 x+\cos^2 x=1,\ \text{jeśli}\ x\neq k\frac{\pi}{2}\ \text{i}\ k\in C.$$

Odpowiedź: Dane wyrażenie przyjmuje wartość 1, gdy $x\neq k\frac{\pi}{2}$ i $k\in C$.

Przykład 2. Oblicz $\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}$, jeśli $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

Rozwiązanie:

Mamy

$$\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}\cdot\frac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x}=\frac{\operatorname{tg}^2 x+1}{\operatorname{tg}^2 x-1}=\frac{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2+1}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-1}=\frac{\frac{6}{4}+1}{\frac{6}{4}-1}=\frac{\frac{5}{2}}{\frac{1}{2}}=5.$$

Przykład 3. Uprość wyrażenie $(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2$.

Rozwiązanie:

Korzystając ze wzorów skróconego mnożenia, otrzymujemy

$$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=\sin^2 x+2\sin x\cos x+\cos^2 x+$$

$$+\sin^2 x-2\sin x\cos x+\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x)=2\cdot 1=2.$$

Przykład 4. Wiadomo, że $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$. Oblicz:

a) $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x$; b) $\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x$.

Rozwiązanie:

a) Ponieważ

$$(\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x)^2=\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x=$$

$$=(\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x)-4\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x=$$

$$=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-4=2^2-4=4-4=0,$$

więc $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=0$.

b) Korzystając ze wzoru na sumę sześcianów, otrzymujemy:

$$\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{ctg}^3 x=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)(\operatorname{tg}^2 x-\operatorname{tg}x\operatorname{ctg}x+\operatorname{ctg}^2 x)=$$

$$=(\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)((\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x)^2-3\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=$$

$$=2\cdot(2^2-3\cdot 1)=2\cdot(4-3)=2\cdot 1=2.$$

Pytania i zadania

1. Uprość wyrażenia:

   a) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(2\pi-x)\left(\operatorname{ctg}(\pi+x)+\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi-x\right)\right)$;

   b) $\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$; c) $\sqrt{\sin^2 x(1+\operatorname{ctg}x)+\cos^2 x(1+\operatorname{tg}x)}$.

2. Oblicz:

   a) $\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$, jeśli $\operatorname{tg}x=\frac{1}{3}$; b) $\sin^3 x+\cos^3 x$, jeśli $\sin x+\cos x=1$;

   c) $\operatorname{tg}^4 x+\operatorname{ctg}^4 x$, jeśli $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$.

3. Oblicz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych kąta, jeśli:

   a) $\cos\alpha=\frac{5}{13}$ i $\alpha\in(270^\circ;360^\circ)$; b) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{7}{24}$ i $\alpha\in(180^\circ;270^\circ)$.

9. Dowodzenie tożsamości trygonometrycznych

Tożsamość trygonometryczna to po prostu równość zawierająca wyłącznie funkcje trygonometryczne kąta lub zmiennej rzeczywistej i prawdziwa dla wszelkich kątów lub wartości zmiennej rzeczywistej, dla których występujące w tej równości wyrażenia mają sens.

Poznane związki pomiędzy funkcjami trygonometrycznymi tego samego argumentu są, jak pamiętamy, tak zwanymi tożsamościami trygonometrycznymi **podstawowymi**. Obecnie zastosujemy je do dowodzenia tożsamości bardziej złożonych.

Aby udowodnić tożsamość, należy:

a) przekształcać jedną z jej stron tak długo, aż dojdziemy do postaci, którą ma druga strona,

albo

b) przekształcać obie jej strony, aby doprowadzić je do tej samej postaci.

Prześledźmy to na przykładach, najpierw stosunkowo prostych, a następnie nieco trudniejszych.

Przykład 1. Wykaż, że $\left(\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\operatorname{ctg}^2 x=\sin^2 x$.

Rozwiązanie:

Będziemy przekształcać lewą stronę tej tożsamości, by dojść do prawej. Otrzymujemy:

$$\left(\operatorname{tg}^2 x-\sin^2 x\right)\cdot\operatorname{ctg}^2 x=\operatorname{tg}^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x-\sin^2 x\cdot\operatorname{ctg}^2 x=$$

$$=(\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x)^2-(\sin x\cdot\operatorname{ctg}x)^2=1^2-\left(\sin x\cdot\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2=1-\cos^2 x=\sin^2 x.$$

Przykład 2. Udowodnij, że $\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x=(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{ctg}x+1)$.

Rozwiązanie:

Tym razem przekształcajmy prawą stronę, aby otrzymać postać lewej strony.

Mamy:

$$(\operatorname{tg}x-1)(\operatorname{ctg}x+1)=\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x+\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x-1=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x.$$

Przykład 3. Wykaż, że $(1+\sin x)\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=\cos x$.

Rozwiązanie:

Przekształcając lewą stronę, otrzymujemy:

$$(1+\sin x)\left(\frac{1}{\cos x}-\operatorname{tg}x\right)=(1+\sin x)\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{\sin x}{\cos x}\right)=$$

$$=(1+\sin x)\frac{1-\sin x}{\cos x}=\frac{1-\sin^2 x}{\cos x}=\frac{\cos^2 x}{\cos x}=\cos x.$$

Przykład 4. Sprawdź, że $\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)(\sin x+\cos x)=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x$.

Rozwiązanie:

Wychodząc z lewej strony, dojdziemy do prawej. Istotnie,

$$\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{\cos x}\right)(\sin x+\cos x)=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}(\sin x+\cos x)=$$

$$=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x\cos x}(\cos x+\sin x)=\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\sin x\cos x}=$$

$$=\frac{\cos^2 x}{\sin x\cos x}-\frac{\sin^2 x}{\sin x\cos x}=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x.$$

Przykład 5*. Udowodnij, że $\operatorname{tg}^6\alpha=\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha=\sin^2\alpha-\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha\left(1-\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)=$$

$$=\sin^2\alpha\cdot\frac{\cos^2\alpha-1}{\cos^2\alpha}=-\sin^2\alpha\cdot\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-\sin^2\alpha\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}$$

i analogicznie

$$\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=-\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha},\ \text{więc}$$

$$\frac{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}=\frac{-\frac{\sin^4\alpha}{\cos^2\alpha}}{-\frac{\cos^4\alpha}{\sin^2\alpha}}=\frac{\sin^4\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{\sin^6\alpha}{\cos^6\alpha}=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^6=\operatorname{tg}^6\alpha.$$

Przykład 6*. Wykaż, że $\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\frac{2}{3}$.

Rozwiązanie:

Korzystając z tożsamości $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, przekształcamy najpierw osobno licznik i mianownik ułamka stojącego po lewej stronie danej tożsamości. Mamy:

$$1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=$$

$$=(\sin^2\alpha-\sin^4\alpha)+(\cos^2\alpha-\cos^4\alpha)=\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)=$$

$$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha=2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha,$$

$$1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha=$$

$$=(\sin^2\alpha-\sin^6\alpha)+(\cos^2\alpha-\cos^6\alpha)=\sin^2\alpha(1-\sin^4\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^4\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha(1-\sin^2\alpha)(1+\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha(1-\cos^2\alpha)(1+\cos^2\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha)+\cos^2\alpha\cdot\sin^2\alpha(1+\cos^2\alpha)=$$
$$=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha(1+\sin^2\alpha+1+\cos^2\alpha)=3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha.$$

Zatem

$$\frac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{3\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}=\frac{2}{3}.$$

Przykład 7*. Udowodnij, że

$$\operatorname{tg}^5\alpha=\frac{\dfrac{1}{(1-\sin\alpha)^2}-\dfrac{1}{(1+\sin\alpha)^2}}{\dfrac{1}{(1-\cos\alpha)^2}-\dfrac{1}{(1+\cos\alpha)^2}}.$$

Rozwiązanie:

Ponieważ:

$$\frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}-\frac{1}{(1+\sin\alpha)^2}=\frac{(1+\sin\alpha)^2-(1-\sin\alpha)^2}{(1-\sin\alpha)^2(1+\sin\alpha)^2}=$$

$$=\frac{(1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha)-(1-2\sin\alpha+\sin^2\alpha)}{((1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha))^2}=\frac{4\sin\alpha}{(1-\sin^2\alpha)^2}=\frac{4\sin\alpha}{\cos^4\alpha}$$

i podobnie

$$\frac{1}{(1-\cos\alpha)^2}-\frac{1}{(1+\cos\alpha)^2}=\frac{4\cos\alpha}{\sin^4\alpha},$$

więc prawa strona P dowodzonej tożsamości jest równa

$$P=\frac{\dfrac{4\sin\alpha}{\cos^4\alpha}}{\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^4\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cdot\sin^4\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos^4\alpha}=\frac{\sin^5\alpha}{\cos^5\alpha}=\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^5=\operatorname{tg}^5\alpha.$$

Pytania i zadania

1. Wykaż tożsamości:

a) $(1+\sin x)(1-\sin x)=\cos^2 x$; b) $\cos^4 x-\sin^4 x=1-2\sin^2 x$;

c) $\operatorname{ctg}x+\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1}{\sin x}$; d) $\dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}=\sin^2 x$; e) $\dfrac{\operatorname{ctg}x}{\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x}=\cos^2 x$;

f) $\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}+\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}=\dfrac{2}{\cos x}$; g) $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{1-\sin x}=-\dfrac{2}{\sin x}$.

2. Udowodnij, że

a) $\operatorname{ctg}^6\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}{\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha}$; b) $\operatorname{ctg}^5\alpha=\dfrac{\dfrac{1}{(1-\cos\alpha)^2}-\dfrac{1}{(1+\cos\alpha)^2}}{\dfrac{1}{(1-\sin\alpha)^2}-\dfrac{1}{(1+\sin\alpha)^2}}$.

10. Wykresy funkcji trygonometrycznych

Wiemy już, że aby otrzymać wykres funkcji okresowej, wystarczy narysować go w przedziale o długości jednego okresu (np. podstawowego, jeśli taki istnieje). Cały wykres otrzymamy, przesuwając zbudowaną jego część wzdłuż osi OX o wielokrotność okresu. Warto przedtem zbadać, czy jest on symetryczny względem prostej lub punktu, gdyż ułatwia to konstrukcję takiego wykresu.

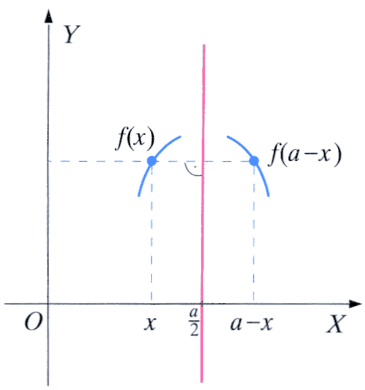
Zanim przejdziemy do rysowania wykresu funkcji trygonometrycznych, uczynimy jeszcze dwa spostrzeżenia natury ogólnej.

Niech f będzie funkcją określoną w pewnym podzbiorze A zbioru R liczb rzeczywistych, zaś a – taką liczbą rzeczywistą, że dla każdej liczby x ze zbioru A również liczba $a-x$ należy do tego zbioru. Zachodzą wówczas takie oto dwa twierdzenia.

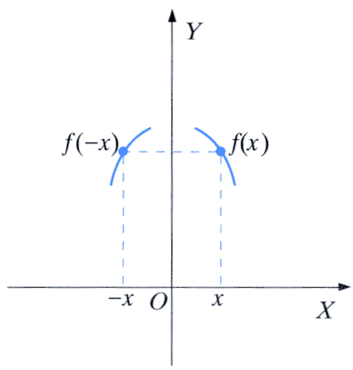
Twierdzenie 1.

Jeżeli dla każdej liczby x ze zbioru A zachodzi warunek $f(a-x)=f(x)$, to wykres funkcji f jest symetryczny względem prostej równoległej do osi OY i przechodzącej przez punkt $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$, czyli prostej o równaniu $x=\frac{a}{2}$.

☐ Dowód. Wystarczy zauważyć, że $\frac{a}{2}-x=(a-x)-\frac{a}{2}$, co oznacza, że punkt $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ jest środkiem odcinka o końcach $(x, 0)$ i $(a-x, 0)$. A ponieważ $f(x)=f(a-x)$, więc punkty $(x, f(x))$ i $(a-x, f(a-x))$ leżą na prostej prostopadłej do prostej $x=\frac{a}{2}$. Są więc do siebie symetryczne względem prostej $x=\frac{a}{2}$ (ryc. 6.35).



Ryc. 6.35.



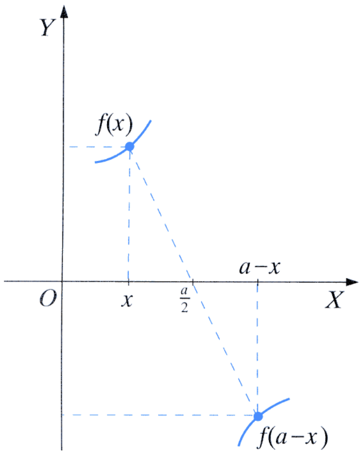
Ryc. 6.36.

W szczególności, gdy $a=0$, to funkcja f spełnia w zbiorze A warunek $f(-x)=f(x)$, jest więc parzysta w zbiorze A i (co już wiemy) ma wykres symetryczny względem prostej o równaniu $x=0$, którą jest oś OY (ryc. 6.36). ☐

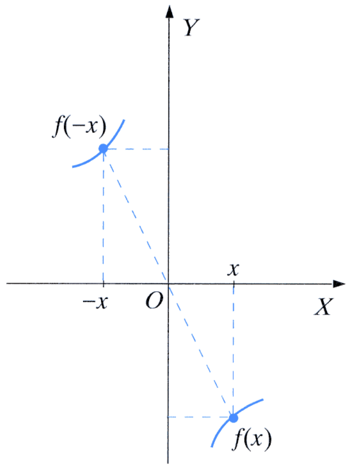
Twierdzenie 2.

Jeżeli dla każdej liczby x ze zbioru A zachodzi warunek $f(a-x)=-f(x)$, to wykres funkcji f jest symetryczny względem punktu $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$.

Dowód. Wystarczy zauważyć, że punkt $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ jest środkiem odcinka o końcach $(a-x, f(a-x))$ i $(x, f(x))$, gdy $x \in A$ (ryc. 6.37).



Ryc. 6.37.



Ryc. 6.38.

W szczególności, gdy $a=0$, to funkcja f spełnia w zbiorze A warunek $f(-x)=-f(x)$; jest więc nieparzysta w zbiorze A, a zatem jej wykres jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$ (początku układu współrzędnych) (rys. 6.38).

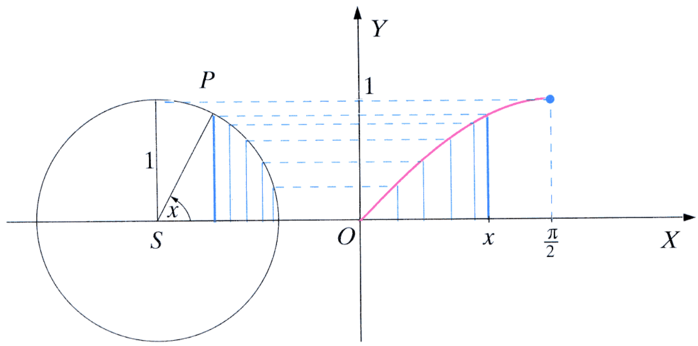
Możemy przystąpić do sporządzania wykresów funkcji trygonometrycznych.

Wykres funkcji sinus

Okresem podstawowym sinusa jest liczba 2π. Sporządzamy więc najpierw wykres tej funkcji w przedziale o długości 2π, a następnie otrzymany fragment przesuwamy wzdłuż osi OX o wielokrotność liczby 2π. Przedziałem długości 2π jest na przykład przedział $\langle 0; 2\pi \rangle$.

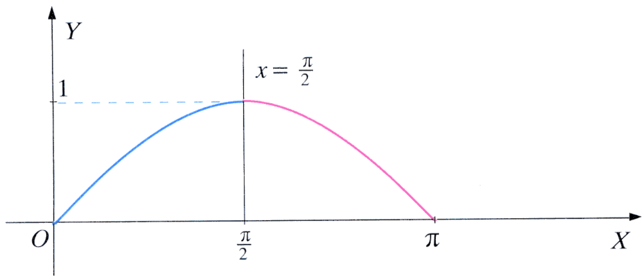
Rysujemy wykres funkcji sinus w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, posługując się okręgiem o promieniu 1, jak to pokazuje rycina 6.39. W tym celu wybieramy na okręgu jednostkowym punkty P i wystawiamy z nich odcinki prostopadłe do osi OX. Długości tych odcinków są wartościami sinusa dla x z przedziału $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, będących miarami łukowymi kątów XSP.

Ponieważ dla każdej liczby rzeczywistej x jest $\sin(\pi - x) = \sin x$ i $\sin(2\pi - x) = -\sin x$, więc wykres funkcji sinus jest symetryczny zarówno względem prostej o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$, jak również względem punktu $(\pi, 0)$.



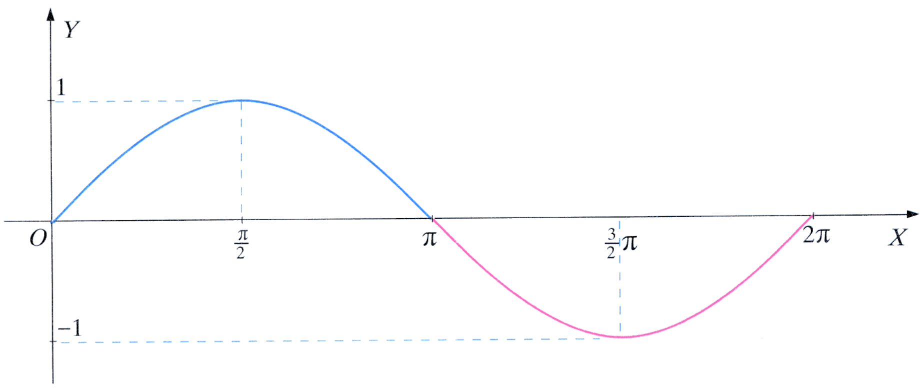
Ryc. 6.39.

Otrzymany więc przed chwilą wykres w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ odbijemy względem prostej o równaniu $x = \frac{\pi}{2}$ i mamy już wykres w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$ (ryc. 6.40).



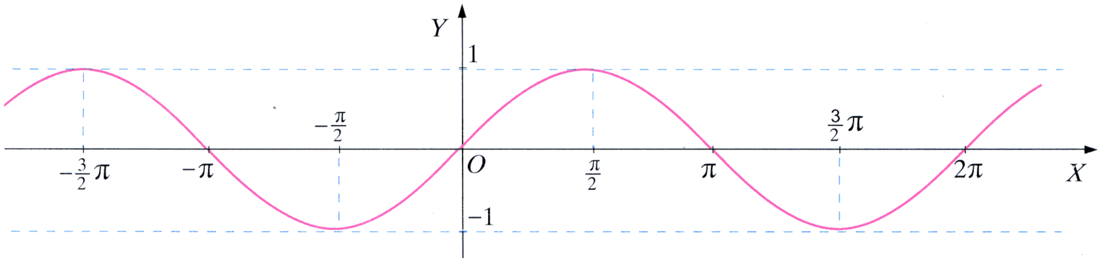
Ryc. 6.40.

Następnie odbijamy go względem punktu $(\pi, 0)$ i rysujemy wykres funkcji sinus w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ (ryc. 6.41).



Ryc. 6.41.

Przesuwamy wykres funkcji sinus w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ o wielokrotność liczby 2π wzdłuż osi OX i otrzymujemy wykres tej funkcji w całym zbiorze R (ryc. 6.42).



Ryc. 6.42.

Linię tę nazywamy **sinusoidą**.

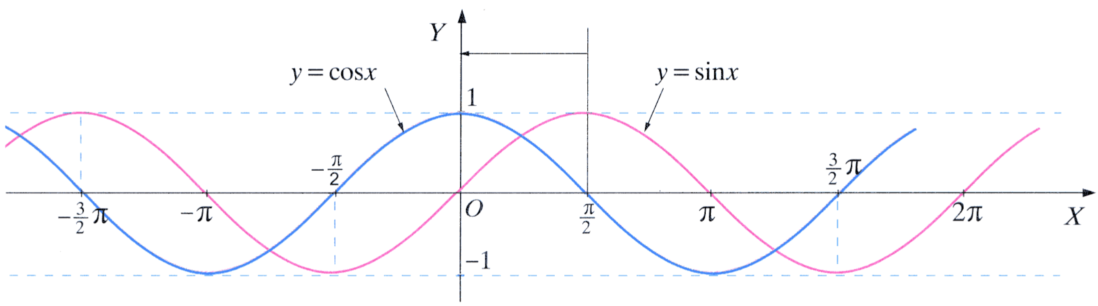
Z wykresu funkcji sinus łatwo odczytać jej własności. Oto niektóre z nich:

1. Funkcja sinus określona jest określona w zbiorze R liczb rzeczywistych.
2. Funkcja ta przyjmuje:
   - wartości dodatnie w przedziałach $(2k\pi;(2k+1)\pi)$;
   - wartości ujemne w przedziałach $((2k-1)\pi;2k\pi)$.
3. Funkcja sinus:
   - rośnie w każdym z przedziałów $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$;
   - maleje w każdym z przedziałów $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi;\frac{\pi}{2}+(2k+1)\pi\right)$.
4. Miejscami zerowymi tej funkcji są liczby $k\pi$.
5. Funkcja sinus przyjmuje wartość największą równą 1, w punktach $\frac{\pi}{2}+2k\pi$, a najmniejszą, równą -1, w punktach $-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

   Wszędzie tutaj $k \in C$.

Wykres funkcji cosinus

Ponieważ $\cos x = \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$, więc wykres funkcji cosinus jest też sinusoidą, ale przesuniętą wzdłuż osi OX o $\frac{\pi}{2}$ w lewo. Linię tę nazywamy też **cosinusoidą** (ryc. 6.43).



Ryc. 6.43.

Wykażemy teraz, że liczba 2π jest podstawowym okresem funkcji sinus i cosinus.

Dowód. Załóżmy, że t jest taką liczbą różną od zera, że dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzi równość (∗) $\sin(x+t) = \sin t$.

Wtedy, podstawiając w równości (∗) $x = 0$, otrzymujemy $\sin t = \sin 0 = 0$, skąd $t = k\pi$ (gdzie $k \in C$), bo tylko liczby tej postaci są miejscami zerowymi sinusa (ryc. 6.41). Liczba k nie może być przy tym nieparzysta, gdyż

$$\sin[x = (2l+1)\pi] = \sin(x+\pi) = -\sin x,$$

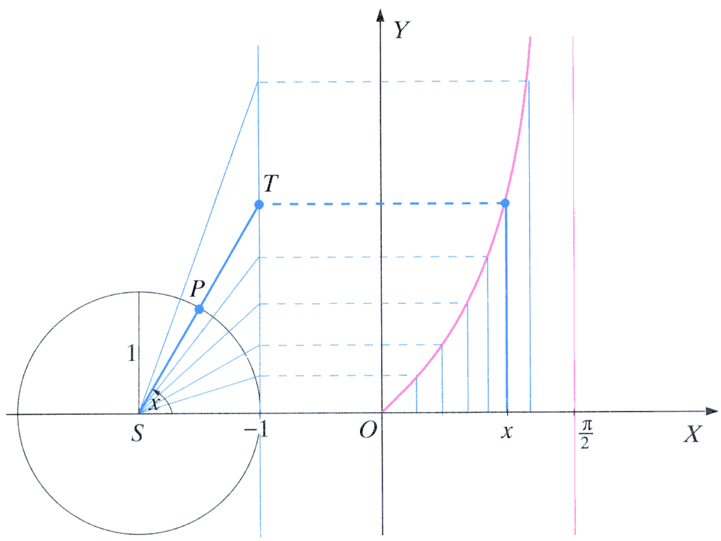
co dowodzi, że $(2l+1)\pi$ nie jest okresem sinusa.

Liczba 2π jest więc najmniejszym dodatnim okresem funkcji sinus, czyli tak zwanym okresem zasadniczym. Podobnie dowodzimy, że liczba 2π jest okresem zasadniczym cosinusa, zaś liczba π – tangensa i cotangensa.

Wykres funkcji tangens

Okresem podstawowym funkcji tangens jest liczba π. Zatem, aby otrzymać cały wykres tangensa, rysujemy go najpierw w przedziale o długości π. Niech to będzie przedział $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

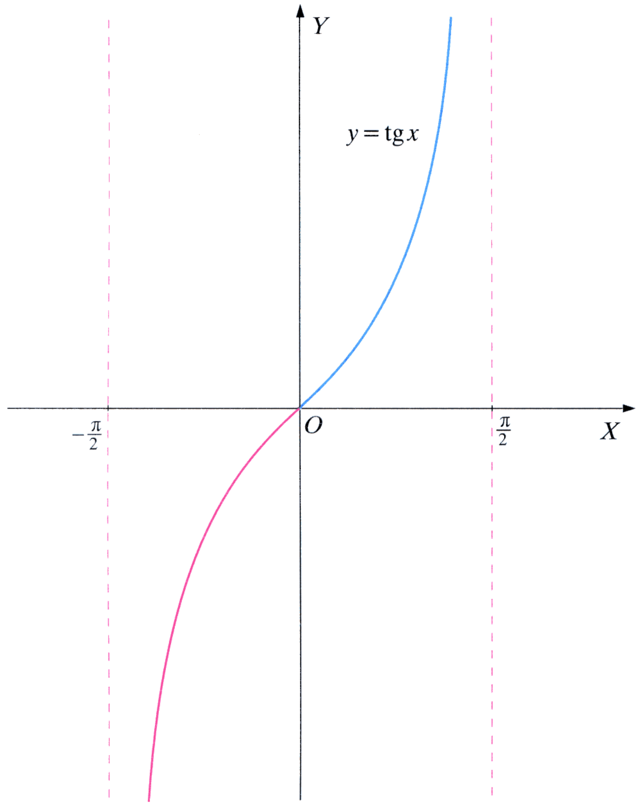
Ponieważ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg}x$, więc wykres funkcji tangens jest symetryczny względem punktu $(0, 0)$. Wykres tangensa w przedziale $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$ rysujemy podobnie jak wykres sinusa. Konstrukcję widzimy na rycinie 6.44. Wybieramy na okręgu jednostkowym (tzn. o promieniu 1) punkt P taki, aby odcinek łączący ten punkt ze środkiem S danego okręgu tworzył z osią OX kąt o mierze łukowej x z przedziału $\left\langle 0; \frac{\pi}{2}\right)$. Odcinek ten przedłużamy do przecięcia się ze styczną do tego okręgu, poprowadzoną w punkcie $(-1, 0)$. Rzędna punktu T przecięcia się tego odcinka ze styczną równa jest $\operatorname{tg}x$.



Ryc. 6.44.

Aby otrzymać wykres tangensa w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, wystarczy narysowany przed chwilą wykres odbić względem początku układu współrzędnych.

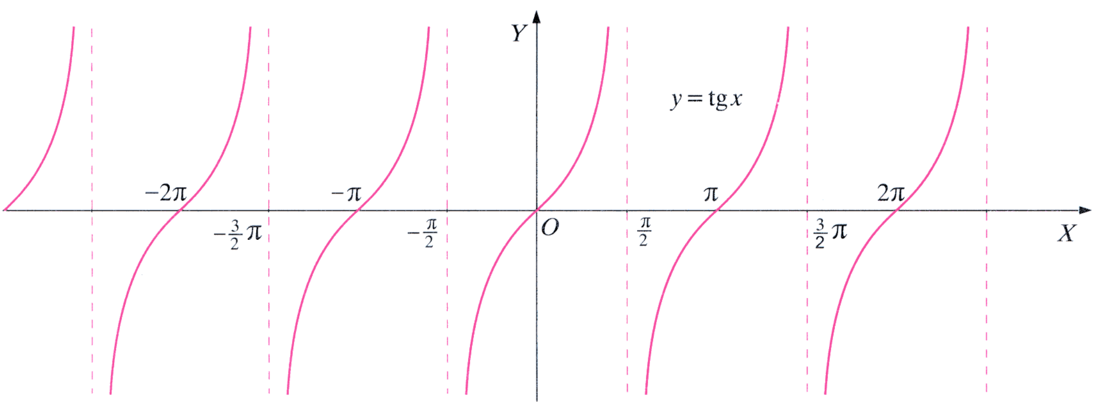
Oto wykres tangensa w przedziale $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.



Ryc. 6.45.

Przesuwając ten wykres wzdłuż osi OX o wielokrotność liczby π otrzymujemy wykres funkcji tangens w zbiorze $R \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in C\right\}$, zwany też **tangensoidą**.

Oto ten wykres.



Ryc. 6.46.

Z wykresu tego odczytujemy, że funkcja tangens:

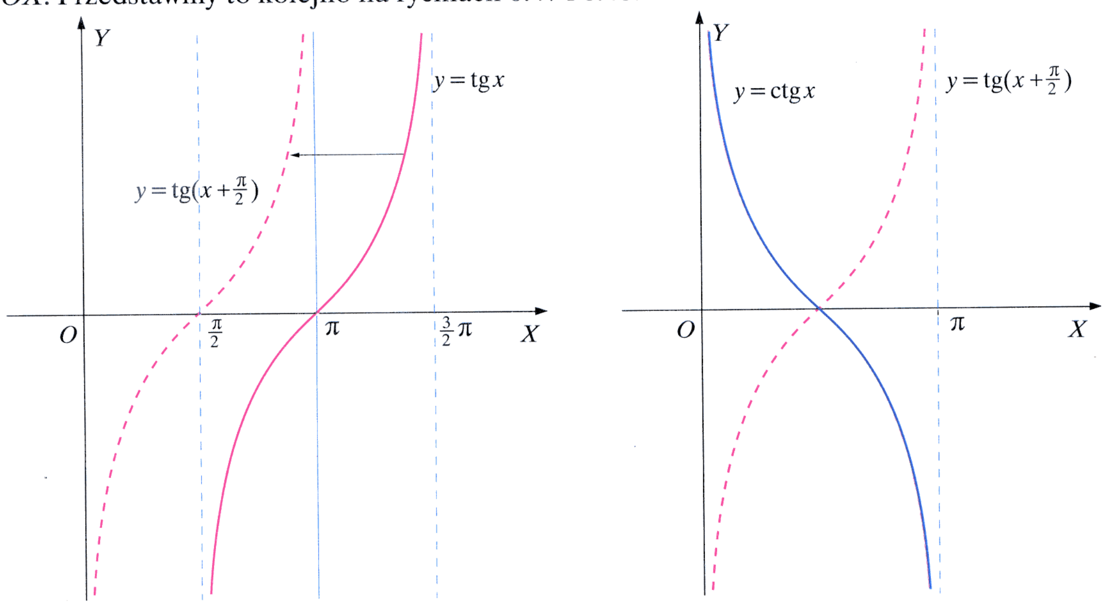
- przyjmuje wartości dodatnie w przedziałach $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, a ujemne – w przedziałach $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; k\pi\right)$;
- rośnie w każdym przedziale $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$ (ale nie w całej dziedzinie!);
- ma miejsca zerowe; są nimi liczby $k\pi$, $k \in C$.

Wykres funkcji cotangens

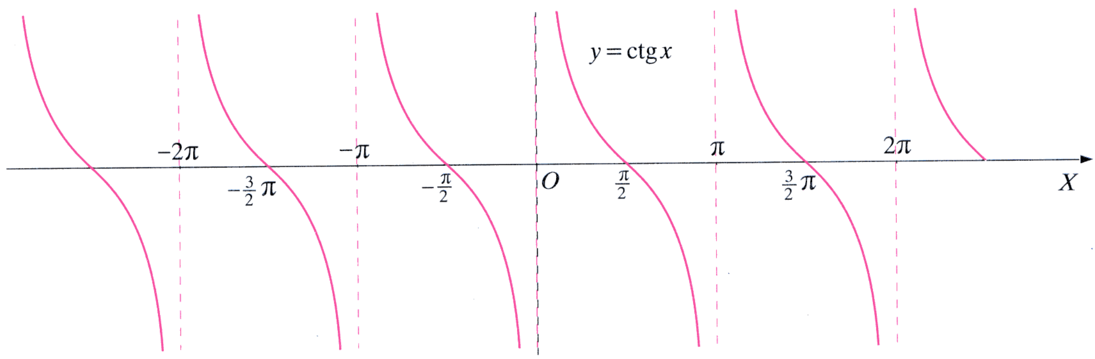
Wiemy, że jeśli $x \neq k\pi$ i $k \in C$, to

$$\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Aby więc otrzymać wykres funkcji cotangens, zwanej **cotangensoidą,** należy wykres funkcji tangens przesunąć wzdłuż osi OX w lewo o $\frac{\pi}{2}$, a następnie odbić go względem osi OX. Przedstawmy to kolejno na rycinach 6.47 i 6.48.



Ryc. 6.47.



Ryc. 6.48.

Pytania i zadania

1. Kiedy funkcja f ma wykres symetryczny względem prostej o równaniu $x=\frac{a}{2}$, a kiedy względem punktu $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$?
2. Odczytaj z wykresu własności funkcji cosinus.
3. Odczytaj z wykresu własności funkcji cotangens.
4. Wyznacz okres podstawowy funkcji:

   a) $y=\sin 2x$; b) $y=\sin\frac{x}{2}$;
   c) $y=\sin(-x)$; d) $y=|\sin x|$;
   e) $y=\sin x+|\sin x|$; f) $y=\cos 3x$;
   g) $y=2\cos 2x$; h) $y=|\operatorname{tg} x|$;
   i) $y=\left|\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right|$.
5. Posługując się wykresami funkcji trygonometrycznych sporządź wykresy funkcji:

   a) $y=\sin 2x$; b) $y=\cos\frac{x}{3}$;
   c) $y=\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}$; d) $y=\operatorname{ctg} 4x$;
   e) $y=|\sin x|$; f) $y=\operatorname{tg}\frac{2}{3}x$.

11. Proste równania i nierówności trygonometryczne

Równania trygonometryczne

Najprostszymi równaniami trygonometrycznymi są równania postaci:

$$\sin x=a,\quad \cos x=a,\quad \operatorname{tg} x=a,\quad \operatorname{ctg} x=a,$$

w których x jest niewiadomą, natomiast a oznacza liczbę daną. Równania te nazywamy **równaniami trygonometrycznymi elementarnymi** lub **podstawowymi**.

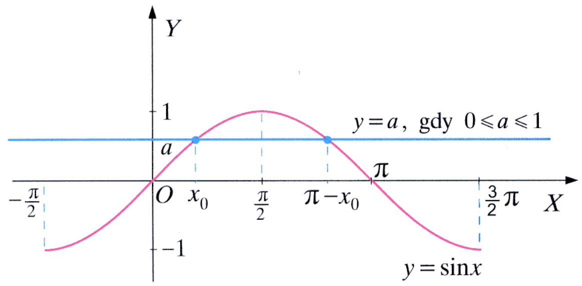
Gdy chcemy rozwiązać jakieś równanie trygonometryczne, zazwyczaj sprowadzamy je do któregoś z wyżej wymienionych równań podstawowych.

Omówmy zatem po kolei każde z nich.

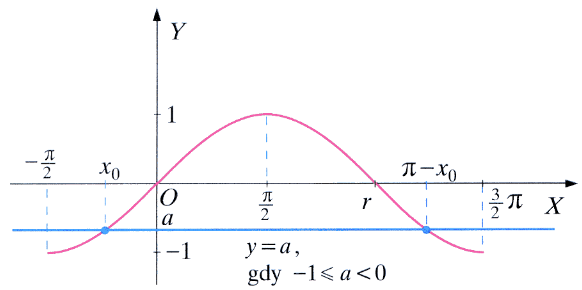
1. Równanie $\sin x = a$

Aby równanie to miało rozwiązanie, musimy założyć, że $|a| \leqslant 1$ (dlaczego?). Ponieważ sinus jest funkcją okresową o okresie podstawowym 2π, więc wystarczy rozwiązać to równanie w przedziale o długości 2π.

Weźmy zatem pod uwagę przedział $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\rangle$. Patrząc na wykres sinusa w tym przedziale (ryc. 6.49 i 6.50) widzimy, że w przedziałach $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ i $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\rangle$ funkcja ta przyjmuje każdą wartość a z przedziału $\langle -1; 1\rangle$ tylko jeden raz. Oznacza to, że w każdym z tych przedziałów istnieje tylko jedno rozwiązanie równania $\sin x=a$; jeżeli x_0 jest tym rozwiązaniem w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, to $\pi - x_0$ jest rozwiązaniem tego równania w przedziale $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right\rangle$. Dodając do każdego z tych rozwiązań wielokrotność 2π, to znaczy liczbę $2k\pi$, gdzie $k\in C$, otrzymujemy wszystkie rozwiązania równania $\sin x=a$.



Ryc. 6.49.



Ryc. 6.50.

Tak więc, jeśli $|a| \leqslant 1$, to każde rozwiązanie równania $\sin x = a$ jest jedną z liczb $x_0 + 2k\pi$ albo jedną z liczb $\pi - x_0 + 2k\pi$, gdzie $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$, $k \in C$.

Zapisując liczby $x_0 + 2k\pi$ i $\pi - x_0 + 2k\pi$ w postaci

$$(-1)^{2k} \cdot x_0 + 2k\pi \text{ i } (-1)^{2k+1} \cdot x_0 + (2k+1)\pi,$$

widzimy, że możemy podać je w jednej postaci:

$$(*) \qquad (-1)^n \cdot x_0 + n\pi, \text{ gdzie } n \in C.$$

Aby zatem znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\sin x = a$, w którym $|a| \leqslant 1$, wystarczy rozwiązać to równanie w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ i znalezione rozwiązanie podstawić do wzoru $(*)$.

Uwaga. Jeżeli a jest którąś z liczb: $0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}, \pm 1$, to znalezienie w przedziale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ liczby x_0, dla której $\sin x_0 = a$, jest sprawą prostą, gdyż na ogół dobrze pamiętamy, dla jakich kątów sinus przyjmuje wyżej wymienione wartości. Kłopot pojawia się wtedy, gdy a jest inną liczbą. Wtedy trzeba sięgać do tablic wartości sinusa. Jeśli nie zachodzi potrzeba dokładniejszych rachunków, to tę jedyną liczbę $x_0 \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ oznaczamy symbolem $\arcsin a$ i czytamy: **arkus sinus *a***.

Na przykład:

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ bo } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ i } \frac{\pi}{3} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle,$$

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ bo } \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2} \text{ i } -\frac{\pi}{6} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

Wniosek. $|a| \leqslant 1 \Rightarrow \left(\sin x = a \Leftrightarrow x = (-1)^n \arcsin a + n\pi \wedge n \in C\right)$.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $\sin x = \frac{1}{2}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ i $\frac{\pi}{6} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$ więc $\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi \wedge n \in C$.

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby postaci $(-1)^n \cdot \frac{\pi}{6} + n\pi$, gdzie $n \in C$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ i $-\frac{\pi}{3} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

Zatem $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + n\pi \wedge n \in C$.

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x = (-1)^{n-1} \cdot \frac{\pi}{3} + n\pi$, gdzie $n \in C$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\sin 2x = 1$.

Rozwiązanie:

Mamy: $\sin 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{2} + n\pi$, gdzie $n \in C$. Tutaj możemy, oczywiście, napisać dalej (sprawdź to!) $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, gdzie $n \in C$, skąd $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, gdzie $k \in C$.

Przykład 4. Rozwiąż równanie $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{\pi}{4} \in \left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, więc

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi \wedge n \in C,$$

stąd

$$2x = \left((-1)^n - 1\right) \cdot \frac{\pi}{4} + n\pi \text{ i ostatecznie } x = \left((-1)^n - 1\right) \cdot \frac{\pi}{8} + n \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x = \left((-1)^n - 1\right)\frac{\pi}{8} + n\frac{\pi}{2}$, gdzie $n \in C$.

Przykład 5. Rozwiąż równanie $\sin\frac{x}{3} = \frac{4}{5}$.

Rozwiązanie:

Tutaj liczbę x_0 z przedziału $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right\rangle$, dla której $\sin x_0 = \frac{4}{5}$ oznaczamy przez $\arcsin\frac{4}{5}$. Wtedy mamy

$$\sin\frac{x}{3} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{3} = (-1)^n \cdot \arcsin\frac{4}{5} + n\pi \wedge n \in C.$$

Stąd

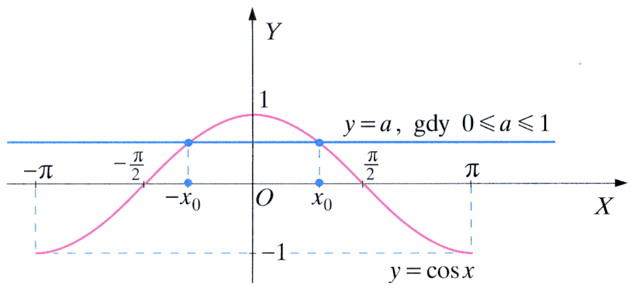
$$x = 3(-1)^n \cdot \arcsin\frac{4}{5} + 3n\pi.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x = 3(-1)^n \cdot \arcsin\frac{4}{5} + n\pi$, gdzie $n \in C$.

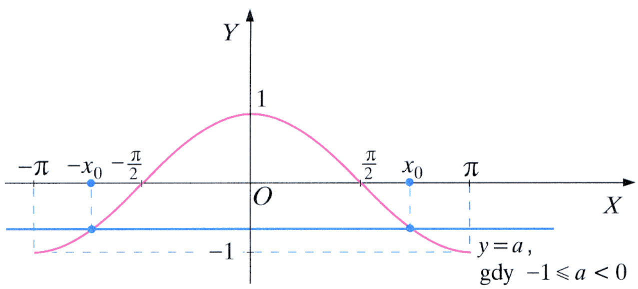
2. Równanie $\cos x = a$

Oczywiście zakładamy, że $|a| \leqslant 1$, gdyż tylko wtedy równanie to ma rozwiązania. Funkcja cosinus, podobnie jak sinus, ma okres podstawowy 2π, więc wystarczy rozwiązać to równanie w przedziale o długości 2π.

Rozważmy więc funkcję cosinus w przedziale $\langle -\pi; \pi \rangle$ (ryc. 6.51, 6.52). Widzimy, że w przedziałach $\langle -\pi; 0 \rangle$ i $\langle 0; \pi \rangle$ cosinus przyjmuje każdą wartość a z przedziału $\langle -1; 1 \rangle$ tylko jeden raz. Oznacza to, że w każdym z tych przedziałów istnieje tylko jedno rozwiązanie równania $\cos x = a$, i przy tym, jeżeli x_0 jest rozwiązaniem tego równania w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$, to $-x_0$ jest jego rozwiązaniem w przedziale $\langle -\pi; 0 \rangle$; wynika to z parzystości cosinusa. Dodając do liczb $-x_0$ i x_0 liczbę $2k\pi$, gdzie $k \in C$, otrzymujemy wszystkie rozwiązania danego równania.



Ryc. 6.51.



Ryc. 6.52.

Tak więc, jeśli $|a| \leqslant 1$, to $\cos x = a \Leftrightarrow x = -x_0 + 2k\pi$ lub $x = x_0 + 2k\pi$, gdzie $k \in C$, co zapisujemy krócej:

$$(*) \qquad x = \pm x_0 + 2k\pi.$$

Aby znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\cos x = a$, w którym $|a| \leqslant 1$ wystarczy rozwiązać je w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$. Liczbę x_0 z przedziału $\langle 0; \pi \rangle$, dla której $\cos x_0 = a$, podstawiamy do wzoru $(*)$ i otrzymujemy w ten sposób wszystkie rozwiązania.

Uwaga. To jedyne x_0 w przedziale $\langle 0; \pi \rangle$, dla którego $\cos x_0 = a$, oznaczamy symbolem $\arccos a$ i czytamy: **arkus kosinus *a***.

Na przykład:

$$\arccos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ bo } \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ i } \frac{\pi}{3} \in \langle 0; \pi \rangle,$$

$$\arccos \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3}{4}\pi, \text{ bo } \cos \frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ i } \frac{3}{4}\pi \in \langle 0; \pi \rangle.$$

Wniosek. $|a| \leqslant 1 \Rightarrow (\cos x = a \Leftrightarrow x = \pm \arccos a + 2k\pi \wedge k \in C)$.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\frac{\pi}{6} \in \langle 0; \pi \rangle$, więc

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi \wedge k \in C.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, gdzie $k \in C$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $\cos\frac{3}{4}\pi = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{3}{4}\pi \in \langle 0; \pi \rangle$.

Stąd

$$\cos\frac{x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm\frac{3}{4}\pi + 2k\pi \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{2}\pi + 4k\pi, \text{ gdzie } k \in C.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami równania są liczby $x = \pm\frac{3}{2}\pi + 4k\pi$, gdzie $k \in C$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\cos\pi(x-1) = 1$.

Rozwiązanie:

Funkcja cosinus przyjmuje wartość 1 dla liczb postaci $2k\pi$, gdzie $k \in C$.

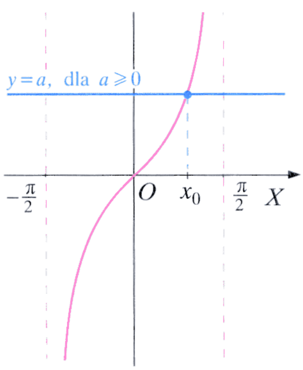
Stąd

$$\cos\pi(x-1) = 1 \Leftrightarrow \pi(x-1) = 2k\pi \Leftrightarrow x - 1 = 2k \Leftrightarrow x = 2k+1.$$

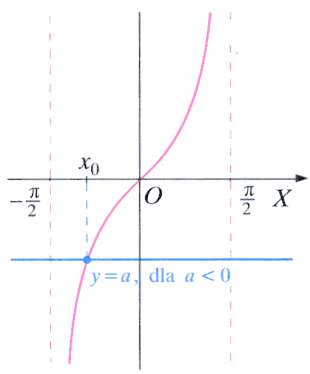
Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania jest każda liczba nieparzysta.

3. Równanie $\operatorname{tg} x = a$

Równanie to, podobnie jak poprzednie, rozwiązujemy najpierw w przedziale o długości równej okresowi podstawowemu tangensa, którym jest π. Jednym z takich przedziałów jest przedział $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. W przedziale tym tangens przybiera każdą wartość rzeczywistą jeden raz (ryc. 6.53, 6.54). Dlatego istnieje tam tylko jedno rozwiązanie x_0 danego równania, zaś jego wszystkie rozwiązania podaje wzór $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in C$.



Ryc. 6.53.



Ryc. 6.54.

Uwaga. To jedyne $x_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, dla którego $\operatorname{tg} x_0 = a$ oznaczamy symbolem $\operatorname{arc\,tg} a$ i czytamy: **arkus tangens *a*.**

Na przykład:

$$\operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}, \text{ bo } \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1 \text{ i } \frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

$$\operatorname{arc\,tg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}, \text{ bo } \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \text{ i } -\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right),$$

Wniosek. $\operatorname{tg} x = a \Leftrightarrow \operatorname{arc\,tg} a + k\pi \wedge k \in C$.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie:

Wiemy, że $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.
Stąd

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \wedge k \in C.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x = \frac{\pi}{6} + k\pi$, gdzie $k \in C$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = -1$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1$ i $-\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, więc

$$\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2} = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi x}{2} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + 2k, \text{ gdzie } k \in C.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x = 2k - \frac{1}{2}$, gdzie $k \in C$.

Przykład 3. Rozwiąż równanie $\operatorname{tg} 2x = 3$.

Rozwiązanie:

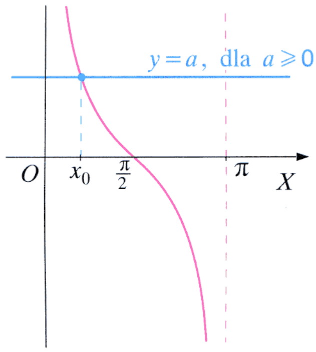
Tutaj liczbę x_0 z przedziału $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, dla której $\operatorname{tg} x_0 = 3$ oznaczamy przez $\operatorname{arc\,tg} 3$. Wtedy możemy pisać, że $\operatorname{tg} 2x = 3 \Leftrightarrow 2x = \operatorname{arc\,tg} 3 + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 3 + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$.

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 3 + k \cdot \frac{\pi}{2}$, gdzie $k \in C$.

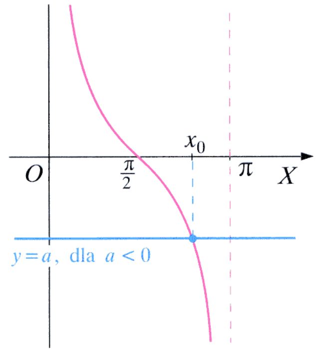
4. Równanie $\operatorname{ctg} x = a$

Rozwiązujemy je najpierw w przedziale $(0; \pi)$, w którym ctg przyjmuje każdą wartość rzeczywistą jeden raz (ryc. 6.55, 6.56). Znalezione tam tylko jedno rozwiązanie x_0 danego równania wyznacza nam ze wzoru $x = x_0 + k\pi$, gdzie $k \in C$, jego wszystkie rozwiązania.

Uwaga. Tę jedyną liczbę x_0 z przedziału $(0; \pi)$, dla której $\operatorname{ctg} x_0 = a$ oznaczamy symbolem $\operatorname{arc\,ctg} a$ i czytamy: **arkus kotangens *a*.**



Ryc. 6.55.



Ryc. 6.56.

Na przykład:

$\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$ bo $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$ i $\frac{\pi}{6} \in (0;\pi)$,

$\operatorname{arc\,ctg}(-1) = \frac{3}{4}\pi$, bo $\operatorname{ctg}\frac{3}{4}\pi = -1$ i $\frac{3}{4}\pi \in (0;\pi)$.

Wniosek. $\operatorname{ctg}x = a \Leftrightarrow x = \operatorname{arc\,ctg}a + k\pi \wedge k \in C$.

Przykład 1. Rozwiąż równanie $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie:

Ponieważ $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ i $\frac{\pi}{3} \in (0;\pi)$, więc $\operatorname{ctg}x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \wedge k \in C$.

Odpowiedź: Rozwiązaniami danego równania są liczby $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, gdzie $k \in C$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$.

Rozwiązanie:

$\operatorname{ctg}\frac{5}{6}\pi = -\sqrt{3}$ i $\frac{5}{6}\pi \in (0;\pi)$.

Stąd

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5}{6}\pi + k\pi \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi, \text{ gdzie } k \in C.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniami tego równania są liczby $x = (2k+1)\pi$, gdzie $k \in C$.

Nierówności trygonometryczne

W najprostszej postaci są to nierówności:

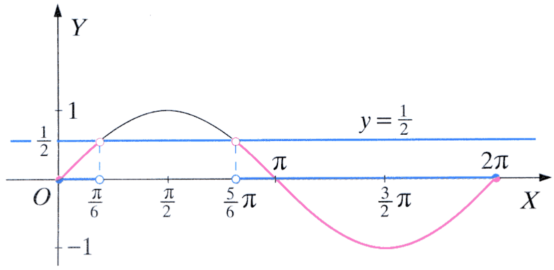
$$\underset{(\geqslant)}{f(x) > a} \quad \text{lub} \quad \underset{(\leqslant)}{f(x) < a},$$

gdzie f jest jedną z funkcji trygonometrycznych, x oznacza niewiadomą, zaś a – liczbę daną. Nierówności te nazywamy **nierównościami trygonometrycznymi elementarnymi** lub **podstawowymi**.

Wobec okresowości funkcji trygonometrycznych rozwiązanie nierówności, podobnie jak równań, wystarczy ograniczyć do przedziału obejmującego podstawowy okres danej funkcji. Oczywiście warto przy tym korzystać z wykresu tej funkcji.

Rozwiązywanie nierówności trygonometrycznych omówimy na konkretnych przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż nierówność $\sin x - \frac{1}{2} < 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.



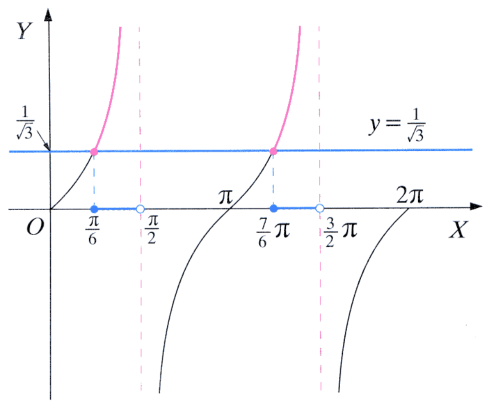
Ryc. 6.57.

Rozwiązanie:

Nierówność ta jest równoważna nierówności $\sin x < \frac{1}{2}$. Sporządzając teraz wykres sinusa w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ oraz rysując prostą o równaniu $y = \frac{1}{2}$, widzimy, że zbiorem rozwiązań danej nierówności jest suma przedziałów $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right)$ i $\left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi \right\rangle$, a więc zbiór $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi \right\rangle$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest zbiór $\left\langle 0; \frac{\pi}{6} \right) \cup \left(\frac{5}{6}\pi; 2\pi \right\rangle$.

Przykład 2. Rozwiąż nierówność $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,x - 1 \geqslant 0$ w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$.



Ryc. 6.58.

Rozwiązanie:

Dana nierówność jest równoważna nierówności $\mathrm{tg}\,x \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}$. Korzystając z wykresu tangensa w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$, otrzymujemy

$$\frac{\pi}{6} \leqslant x < \frac{\pi}{2} \text{ lub } \frac{7}{6}\pi \leqslant x < \frac{3}{2}\pi.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $\left\langle \frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2} \right) \cup \left\langle \frac{7}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi \right)$.

Przykład 3. Rozwiąż w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$ nierówność $\left|2\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Rozwiązanie:

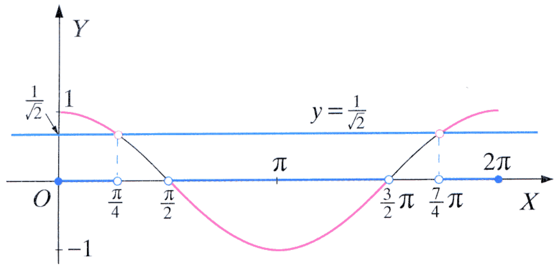
Z własności wartości bezwzględnej wynika, że

$$\left|2\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| > \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \left(2\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} < -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \vee \left(2\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x < 0) \vee \left(2\cos x > \frac{2}{\sqrt{2}}\right) \Leftrightarrow (\cos x < 0) \vee \left(\cos x > \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Stąd na podstawie wykresu cosinusa w przedziale $\langle 0; 2\pi\rangle$, wnioskujemy, że

$$x \in \left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi; 2\pi\right\rangle.$$



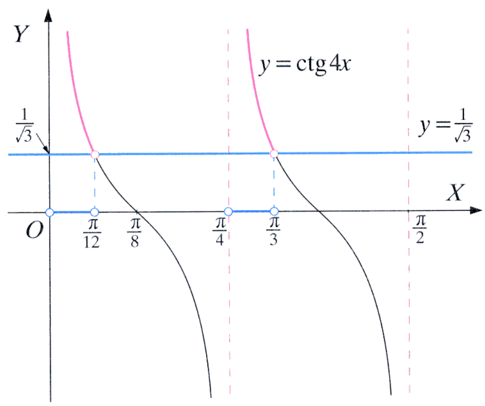
Ryc. 6.59.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań tej nierówności jest $\left\langle 0; \frac{\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3}{2}\pi\right) \cup \left(\frac{7}{4}\pi; 2\pi\right\rangle$.

Przykład 4. Rozwiąż w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nierówność $\operatorname{ctg} 4x > \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Rozwiązanie:

Narysujmy najpierw wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} 4x$ w przedziale $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$; oczywiście otrzymujemy go, zmieniając w skali $\frac{1}{4}$ względem osi OX wykres funkcji $y = \operatorname{ctg} x$ w przedziale $(0; \pi)$. I odczytujemy, że $\operatorname{ctg} 4x > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow x \in \left(0; \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$.



Ryc. 6.60.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest $\left(0; \frac{\pi}{12}\right) \cup \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$.

Pytania i zadania

1. Rozwiąż równania:

a) $\cos 3x = 0$;
b) $\sin 4x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
c) $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
d) $\operatorname{ctg}\frac{x}{2} = 0$;
e) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;
f) $\operatorname{tg} 3x = -\sqrt{3}$;
g) $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$;
h) $\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;
i) $\cos\frac{x}{3} = 1$.

2. Rozwiąż w przedziale $\langle 0; 2\pi \rangle$ nierówności:

a) $\cos x - \frac{1}{2} > 0$;
b) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 \leqslant 0$;
c) $|\cos x| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$;
d) $\left|\sin x - \frac{1}{2}\right| < 1$;
e) $\left|2\sin x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$;
f) $|\sin x|\sin x \leqslant \frac{1}{2}$;
g) $\operatorname{tg} 4x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$;
h) $|\operatorname{ctg} x| \leqslant 1$.

VII. Funkcja liniowa

1. Własności funkcji liniowej i jej wykres

Funkcją **liniową** nazywamy funkcję postaci $y = ax + b$, gdzie a i b są danymi liczbami rzeczywistymi.

a nazywa się **współczynnikiem kierunkowym**, b – **wyrazem wolnym**.

Z określenia funkcji liniowej wynika, że jej wartość y można obliczyć dla każdej liczby rzeczywistej x. Wobec tego przyjmujemy, że **dziedziną** funkcji liniowej jest zbiór R wszystkich liczb rzeczywistych.

Zauważmy, że gdy $a = 0$, to ze wzoru $y = ax + b$ otrzymujemy $y = b$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Gdy zaś $a \neq 0$, to dla dowolnej liczby rzeczywistej y ze wzoru tego otrzymujemy $x = \frac{y-b}{a}$. Oznacza to, że **zbiorem wartości funkcji** liniowej $y = ax + b$ jest:

- **zbiór** $\{\boldsymbol{b}\}$, gdy $a = 0$,
- **zbiór** $\boldsymbol{R}$, gdy $a \neq 0$.

Udowodnimy teraz twierdzenie ustalające związek współczynnika a z monotonicznością funkcji $f(x) = ax + b$.

Twierdzenie

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ jest:
1. rosnąca, gdy $a > 0$;
2. malejąca, gdy $a < 0$;
3. stała, gdy $a = 0$.

□ Dowód. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2 mamy
$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1 + b) - (ax_2 + b) = a(x_1 - x_2)$.
Niech $x_1 < x_2$, czyli $x_1 - x_2 < 0$. Wówczas widzimy, że:
1. jeśli $a > 0$, to $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2) < 0$, skąd $f(x_1) < f(x_2)$, co oznacza, że funkcja $f(x) = ax + b$ jest rosnąca w zbiorze R;
2. jeśli $a < 0$, to $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2) > 0$, skąd $f(x_1) > f(x_2)$, co oznacza, że funkcja $f(x) = ax + b$ jest malejąca w zbiorze R;
3. jeśli $a = 0$, to $f(x_1) - f(x_2) = a(x_1 - x_2) = 0$, czyli $f(x_1) = f(x_2)$, co oznacza, że funkcja $f(x) = ax + b$ jest stała. □

Zbadajmy istnienie miejsc zerowych funkcji liniowej. Jak wiemy, miejsce zerowe funkcji to taki jej argument, dla którego przyjmuje ona wartość 0.

Zapytajmy zatem, kiedy $f(x) = 0$, gdzie $f(x) = ax + b$.

1. Gdy $a \neq 0$, to $f(x) = 0 \Leftrightarrow ax + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$. Zatem funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma wtedy jedno miejsce zerowe; jest nim liczba $-\frac{b}{a}$.

2. Gdy $a = 0$ i $b = 0$, to $f(x) = 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Tak więc w tym wypadku funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ ma nieskończenie wiele miejsc zerowych.
3. Wreszcie, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$, to $f(x) \neq 0$ dla każdej liczby rzeczywistej x. Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$ nie ma więc miejsc zerowych.

   Otrzymaliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Funkcja liniowa $f(x) = ax + b$:
- ma jedno miejsce zerowe, równe $-\frac{b}{a}$, gdy $a \neq 0$;
- ma nieskończenie wiele miejsc zerowych, gdy $a = b = 0$;
- nie ma miejsc zerowych, gdy $a = 0$ i $b \neq 0$.

Funkcja liniowa była już omawiana w gimnazjum. Wiesz, że jej wykresem jest linia prosta. Wtedy jednak fakt ten podany był bez dowodu. Obecnie spróbujemy to udowodnić. Zacznijmy od szczególnego przypadku funkcji liniowej mającej postać $y = ax$. Otrzymujemy ją, gdy $b = 0$.

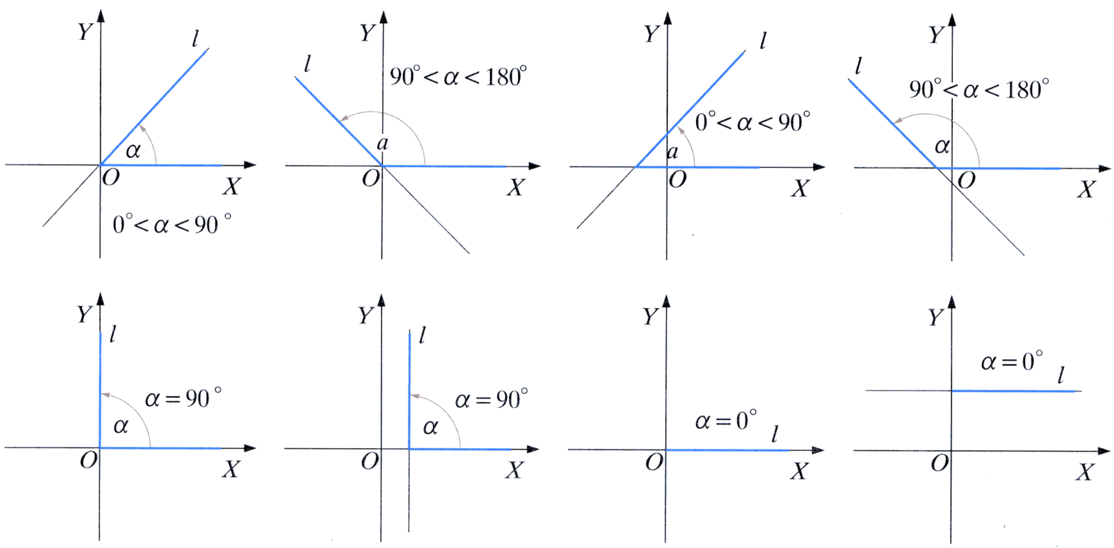
Zanim jednak sformułujemy i udowodnimy twierdzenie o jej wykresie, zdefiniujmy kąt nachylenia prostej do osi OX.

!

Kątem nachylenia prostej do osi OX nazywamy ten kąt między osią OX a daną prostą, którego ramię początkowe zawarte jest w osi OX i ma zwrot tej osi, a ramię końcowe zawarte w prostej l leży na płaszczyźnie XOY nie niżej niż oś OX.

Jeśli prosta l jest równoległa do osi OX, to mówimy, że jest nachylona do niej pod kątem 0°.

Z definicji tej wynika, że kąt nachylenia prostej do osi OX jest kątem z przedziału $\langle 0^\circ; 180^\circ)$.



Ryc. 7.1.

Oto zapowiedziane twierdzenie:

Twierdzenie

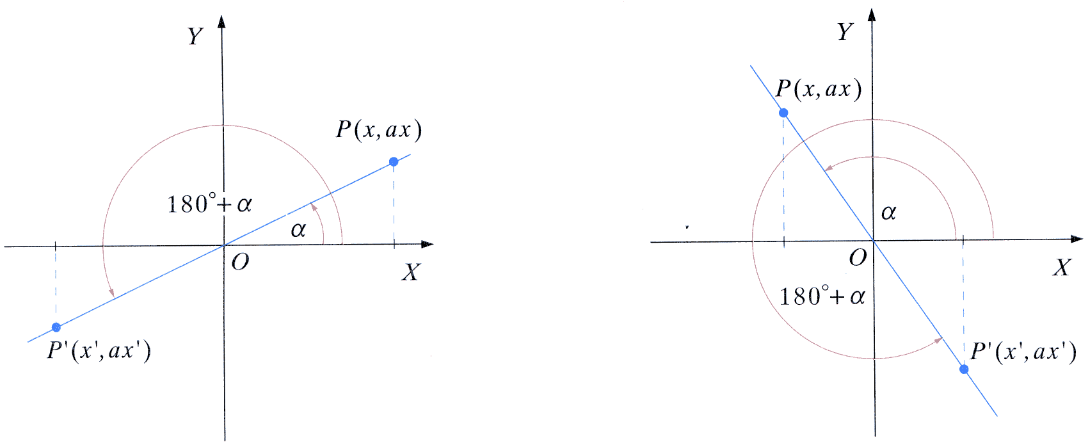
Wykresem funkcji $y = ax$, gdzie $x \in R$, jest prosta przechodząca przez początek układu XOY i nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$.

□ Dowód. Niech l będzie prostą przechodzącą przez punkt $(0, 0)$ i nachyloną do osi OX pod kątem α. Należy wykazać, że:

1. każdy punkt wykresu funkcji $y = ax$, to jest zbioru $W = \{(x;\ ax);\ x \in R\}$, leży na prostej l;
2. każdy punkt prostej l należy do zbioru W.

Zauważmy, że punkt $(0, 0)$ należy do wykresu funkcji $y = ax$ (bo $0 = a \cdot 0$) i oczywiście leży na prostej l. Weźmy więc dowolny punkt P wykresu funkcji $y = ax$ taki, że $x \neq 0$. Zatem $P = (x, ax)$ i $\sphericalangle XOP$ jest kątem nachylenia prostej OP do osi OX. Z definicji tangensa dowolnego kąta mamy:

$$\operatorname{tg} \sphericalangle XOP = \frac{ax}{a} = a.$$



Ryc. 7.2.

Widzimy więc, że $\operatorname{tg} \sphericalangle XOP$ nie zależy od wyboru punktu P, biorąc bowiem inny punkt P' wykresu funkcji $y = ax$, otrzymamy $\operatorname{tg} \sphericalangle XOP'$ także równy a. Stąd wynika, że kąty $\sphericalangle XOP = \alpha$ i XOP' są albo równe, albo się różnią o 180°. Oznacza to, że jeśli $x \neq 0$, to punkt $P = (x; ax)$ leży na prostej l.

Weźmy teraz dowolny punkt $P = (x, y)$ prostej l. Jeśli $x \neq 0$, to oczywiście $\sphericalangle XOP = \alpha$ oraz $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$. Jednakże, z założenia $\operatorname{tg}\alpha = a$. Stąd $a = \frac{y}{x}$, czyli $y = ax$. Gdy zaś $x = 0$, to również $y = 0$. A ponieważ $0 = a \cdot 0$, więc punkt $(0, 0)$ należy do wykresu funkcji $y = ax$. Zatem każdy punkt prostej l należy do wykresu funkcji $y = ax$. □

Z określenia kąta nachylenia prostej do osi OX i z własności tangensa wynika następujący wniosek.

Wniosek. Prosta będąca wykresem funkcji $y = ax$, gdzie $x \in R$, jest nachylona do osi OX pod kątem:

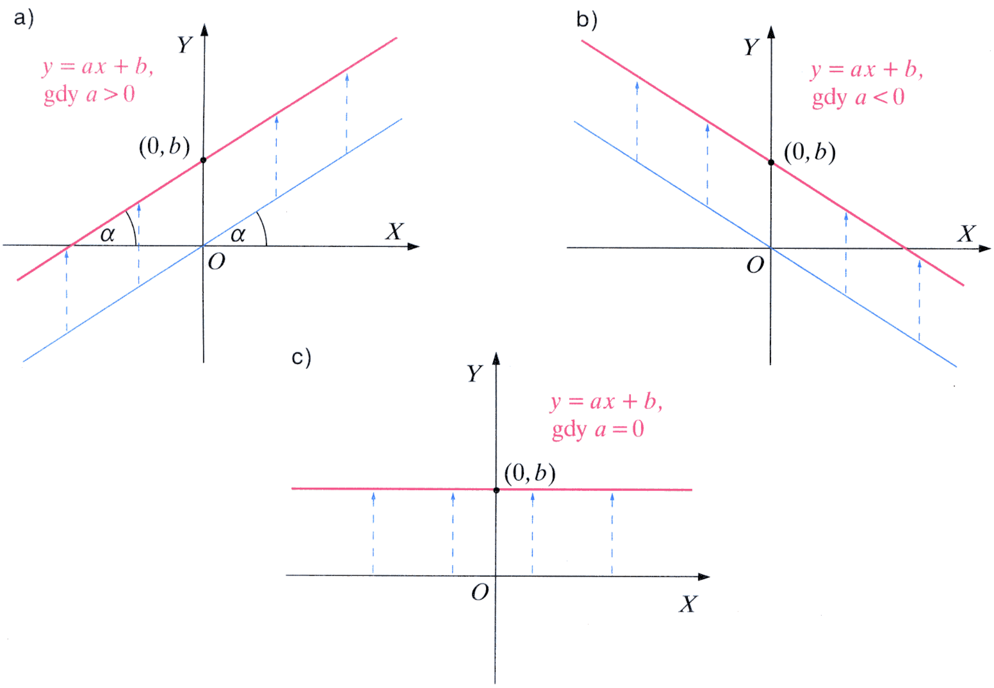
- ostrym wtedy i tylko wtedy, gdy $a > 0$,
- rozwartym wtedy i tylko wtedy, gdy $a < 0$.

Ponadto widzimy też, że:

1. Prosta będąca wykresem funkcji $y = ax$, gdzie $x \in R$, jest równoległa do osi OX wtedy i tylko wtedy, gdy $a = 0$. Prosta ta pokrywa się z osią OX (dlaczego?).
2. Prosta prostopadła do osi OX nie jest wykresem żadnej funkcji postaci $y = ax$. (A czy może być wykresem jakiejkolwiek funkcji?).

Powróćmy do funkcji liniowej postaci $y = ax + b$. Porównując funkcje $y = ax$ i $y = ax + b$, widzimy, że wartości tych funkcji dla tych samych argumentów x różnią się o b. Zatem dla otrzymania wykresu funkcji $y = ax + b$ wystarczy przesunąć wykres funkcji $y = ax$ wzdłuż osi OY o b. Stąd wniosek.

Wniosek. Wykresem funkcji $y = ax + b$, gdy $x \in R$, jest prosta przecinająca oś OY w punkcie $(0, b)$ i nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = a$ (ryc. 7.3 a, b). Wykresem funkcji stałej $y = b$ (tzn. funkcji liniowej $y = ax + b$, gdy $a = 0$) jest prosta równoległa do osi OX i przecinająca oś OY w punkcie $(0, b)$ (ryc. 7.3c).



Ryc. 7.3.

Wykres funkcji liniowej sporządzamy zazwyczaj tak, że znajdujemy jego punkty wspólne z osiami układu współrzędnych, a następnie prowadzimy przez nie prostą.

Dla funkcji $y = ax + b$, $a \neq 0$, są to punkty: $A = \left(-\frac{b}{a}, 0\right)$ i $B = (0, b)$.

Przypomnijmy jeszcze znane ci z gimnazjum pojęcie proporcjonalności prostej dwóch wielkości.

Dwie wielkości zmienne, różne od zera, nazywamy wielkościami **wprost proporcjonalnymi**, gdy ich iloraz (stosunek) jest stały. Jeżeli jedna z tych wielkości jest zerem, to druga też jest zerem.

Zatem

$$\left.\begin{array}{ll} \text{dla } x \neq 0, y \neq 0, & \frac{y}{x} = a \\ \text{gdy } x = 0, \text{ to } y = 0 & \end{array}\right\} \text{ czyli } y = ax.$$

Tak więc każda funkcja liniowa postaci $y = ax$ określa proporcjonalność prostą zmiennych x i y. Liczbę a nazywamy **współczynnikiem** tej proporcjonalności.

Na przykład obwód kwadratu $4a$ jest wprost proporcjonalny do długości a boku (współczynnik proporcjonalności wynosi 4), obwód koła $2\pi r$ jest wprost proporcjonalny do promienia r (współczynnik proporcjonalności wynosi 2π).

Na koniec rozwiążemy kilka przykładów dotyczących funkcji liniowej.

Przykład 1. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 60^\circ$.
Rozwiązanie:

Chodzi o wyznaczenie współczynnika a we wzorze $y = ax$ szukanej funkcji.
Wiemy, że $a = \operatorname{tg}\alpha$. Ale $\alpha = 60^\circ$, zaś $\operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$.
Stąd $a = \sqrt{3}$. Zatem szukany wzór to $y = \sqrt{3}\,x$.

Przykład 2. Znajdź wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez początek układu współrzędnych i punkt $P = (3, -5)$.
Rozwiązanie:

Podstawiamy współrzędne punktu P do wzoru $y = ax$ i otrzymujemy równanie $-5 = a \cdot 3$, skąd $a = -\frac{5}{3}$.
Zatem poszukiwany wzór ma postać: $y = -\frac{5}{3}x$.

Przykład 3. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta przechodząca przez punkt $P = (-2, 1)$ i nachylona do osi OX pod kątem $\alpha = 135^\circ$.
Rozwiązanie:

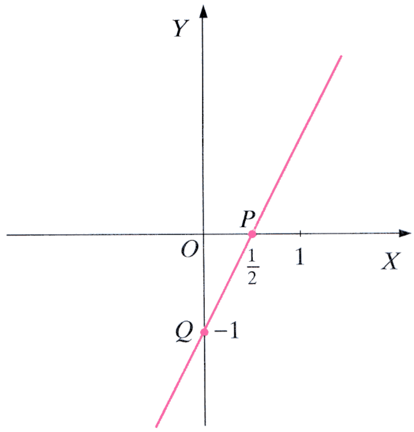
Należy znaleźć współczynniki a i b wzoru $y = ax + b$ poszukiwanej funkcji.
Mamy $a = \operatorname{tg} 135^\circ = \operatorname{tg}(180^\circ - 45^\circ) = -\operatorname{tg} 45^\circ = -1$.
Stąd $y = -x + b$. Podstawiając do tego wzoru współrzędne punktu P, otrzymujemy równanie $-2 = -1 + b$, skąd $b = -1$. Zatem funkcja, o którą chodzi w zadaniu, określona jest wzorem: $y = -x - 1$.

Przykład 4. Pod jakim kątem nachylona jest do osi OX prosta będąca wykresem funkcji $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x - 2$?
Rozwiązanie:
Prosta ta jest nachylona do osi OX pod takim kątem α, że $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Stąd otrzymujemy $\alpha = 150^\circ$.

Przykład 5. Narysuj wykres funkcji $y = 2x - 1$:
a) gdy $x \in R$, b) gdy $x \in \langle -2; 0) \cup \langle 1; 2)$, c) gdy $x \in C$.

Rozwiązanie:

a) Aby poprowadzić prostą, która jest wykresem tej funkcji, wystarczą nam dwa punkty, na przykład punkty wspólne z osiami układu współrzędnych. Punkt wspólny wykresu danej funkcji z osią OX znajdujemy, podstawiając $y=0$ do wzoru $y=2x-1$, z osią OY – podstawiając do tego wzoru $x=0$. Wówczas otrzymujemy odpowiednio punkty $P=\left(\frac{1}{2},0\right)$ i $Q=(0,-1)$ oraz wykres (ryc. 7.4).

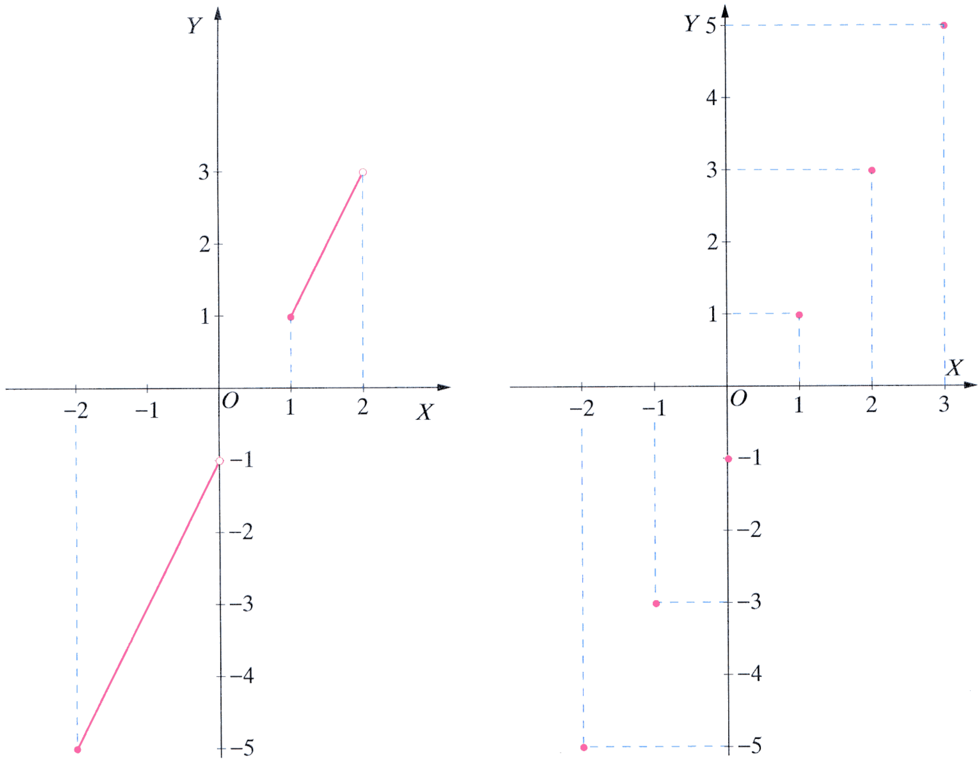


Ryc. 7.4.

A oto wykres funkcji $y=2x-1$ (ryc. 7.5):

b) gdy $x\in\langle -2;0)\cup\langle 1;2)$,

c) gdy $x\in C$.



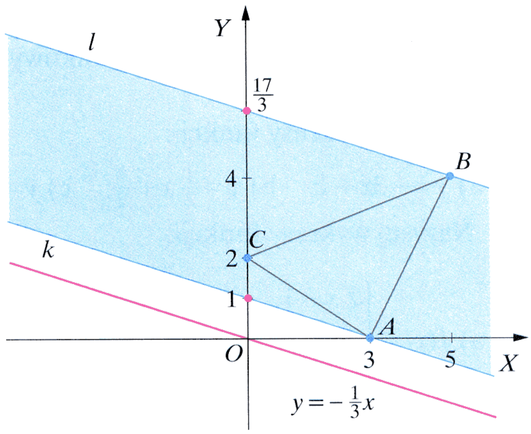
Ryc. 7.5.

Przykład 6. Dla jakiej największej i jakiej najmniejszej wartości b prosta będąca wykresem funkcji $y=-\frac{1}{3}x+b$ ma przynajmniej jeden punkt wspólny z trójkątem ABC gdy: $A=(3,0)$, $B=(5,4)$, $C=(0,2)$?

Rozwiązanie:

Narysujmy na płaszczyźnie współrzędnych trójkąt ABC oraz wykres funkcji $y=-\frac{1}{3}x$.

Przyglądając się temu rysunkowi (ryc. 7.6), widzimy, że wykres funkcji $y=-\frac{1}{3}x+b$ będzie miał przynajmniej jeden punkt wspólny z trójkątem ABC wtedy i tylko wtedy, gdy będzie się znajdował w pasie ograniczonym prostymi k i l równoległymi do wykresu funkcji $y=-\frac{1}{3}x$ i przechodzącymi przez wierzchołki A i B tego trójkąta.



Ryc. 7.6.

Równania prostych k i l otrzymamy, podstawiając do wzoru $y=-\frac{1}{3}x+b$ współrzędne odpowiednio punktów A i B:

$0=-\frac{1}{3}\cdot 3+b$, skąd $b=1$,

oraz

$4=-\frac{1}{3}\cdot 5+b$, skąd $b=\frac{17}{3}$.

Zatem wykres funkcji $y=-\frac{1}{3}x+b$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z trójkątem ABC, gdy $b\in\left\langle 1;\frac{17}{3}\right\rangle$. Wobec tego najmniejszą z szukanych wartości b jest 1, a największą $\frac{17}{3}$.

Przykład 7. Samochód ciężarowy, jadąc ze średnią prędkością 60 km/h, po przebyciu 100 km zatrzymał się na 15 minut. Następnie po 40 minutach jazdy znowu zatrzymał się na 0,5 godziny, by po przejechaniu bez przerwy jeszcze 120 km zakończyć podróż. Zapisz wzorem drogę tego samochodu jako funkcję czasu oraz oblicz, jak długo trwała podróż i ile kilometrów liczyła cała trasa.

Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika, że samochód jechał w ciągu całej podróży przez $\frac{5}{4}$, $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{2}$ godziny z dwiema przerwami trwającymi odpowiednio $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{2}$ godziny. Ze znanego wzoru na drogę w ruchu jednostajnym otrzymujemy żądany wzór funkcji, mianowicie:

$$s(t)=\begin{cases} 80t, & \text{gdy} \quad t\in\left\{\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right\}, \\ 0, & \text{gdy} \quad t\in\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right\}. \end{cases}$$

Aby obliczyć, ile czasu trwała podróż, wystarczy dodać do siebie ułamki $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{4}$ i $\frac{3}{2}$. Otrzymujemy sumę $\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}=4\frac{1}{6}$.

Natomiast drogę, którą przebył ten samochód, otrzymamy, obliczając sumę wartości funkcji $S(t)$, gdy $t\in\left\{\frac{2}{3},\frac{5}{4},\frac{3}{2}\right\}$, czyli sumę $80\cdot\frac{2}{3}+80\cdot\frac{5}{4}+80\cdot\frac{3}{2}=\left(\frac{2}{3}+\frac{5}{4}+\frac{3}{2}\right)80=$
$=80\cdot\left(\frac{8}{12}+\frac{15}{12}+\frac{18}{12}\right)=80\cdot\frac{41}{12}=20\cdot\frac{41}{3}=\frac{820}{3}=273\frac{1}{3}$.

Samochód ten przejechał $273\frac{1}{3}$ km w ciągu $4\frac{1}{6}$ godziny.

Pytania i zadania

1. Co to jest funkcja liniowa? Określ jej dziedzinę i zbiór wartości.
2. Omów monotoniczność funkcji liniowej.
3. Co to jest kąt nachylenia prostej do osi OX?

4. Czym jest wykres funkcji liniowej?
5. Co to jest współczynnik kierunkowy i jaki jest jego związek z wykresem funkcji liniowej?
6. Narysuj wykresy funkcji:

   a) $y=-3x+1$; b) $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$; c) $y=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$.
7. Narysuj wykresy funkcji:

   a) $f(x)=\begin{cases}2x-1, & \text{gdy } x\leqslant -2\\ -x-7, & \text{gdy } -2<x\leqslant 2\\ -2x-5, & \text{gdy } x>2;\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}x-2, & \text{gdy } x<-3\\ -2x+1, & \text{gdy } -3\leqslant x<0\\ x+1, & \text{gdy } 0\leqslant x<2\\ 3x, & \text{gdy } x>2.\end{cases}$
8. Dla jakiej wartości a wykres funkcji $y=ax+3$ przechodzi przez punkt $P=\left(\frac{1}{2},3\right)$?
9. Czy można tak dobrać współczynnik a, aby wykresem funkcji $y=ax+b$ była prosta równoległa do osi OY?
10. Napisz wzór funkcji liniowej, której wykresem jest prosta nachylona do osi OX pod wskazanym poniżej kątem α i przecinająca oś OY w punkcie $(0,b)$:

    a) $\alpha=30^\circ$, $b=-\sqrt{3}$; b) $\alpha=120^\circ$, $b=2$.
11. Znajdź miejsca zerowe funkcji:

    a) $y=-\frac{1}{3}x+\frac{2}{3}$; b) $y=2\sqrt{3}x-\sqrt{3}$; c) $f(x)=\begin{cases}-2x+1, & \text{gdy } x\leqslant 0\\ \frac{1}{3}x-1, & \text{gdy } 0<x\leqslant 2\\ x-4, & \text{gdy } x>2.\end{cases}$
12. Dla jakiej najmniejszej i dla jakiej największej wartości b wykres funkcji $y=-3x+b$ ma co najmniej jeden punkt wspólny z prostokątem $ABCD$, gdzie $A=(-1;-1)$, $B=(3;-1)$, $C=(3;2)$, $D=(-1;2)$?
13. Jakie warunki muszą spełniać współczynniki a_1, a_2, b_1, b_2 funkcji $y=a_1x+b_1$ i $y=a_2x+b_2$, aby wykresy tych funkcji:

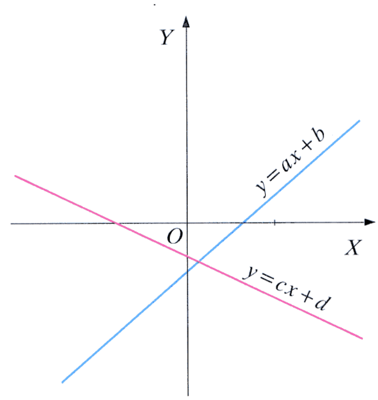
    a) były do siebie równoległe,

    b) były do siebie prostopadłe,

    c) przecinały się na osi OY,

    d) przecinały się na osi OX?
14. Wykresy funkcji $y=ax+b$ i $y=cx+d$ przedstawia rycina 7.7.

    Określ znak iloczynu $a\cdot b\cdot c\cdot d$.



Ryc. 7.7.

15*. Udowodnij, że jeżeli wykresy funkcji $y=ax+b$, $y=bx+c$, $y=cx+a$ mają punkt wspólny, to $a=b=c$.

16*. Znajdź wzór funkcji liniowej $f:R\to R$, aby dla każdej liczby rzeczywistej x spełnione były równości $f(3x)=3f(x)-2$ i $f(x+3)=f(x)+9$.

17*. Funkcja liniowa $f(x)=ax+b$ spełnia warunki $f(2001)>2001$ i $f(2003)>2003$. Udowodnij, że $f(2002)>2002$.

2. Równanie i nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Równanie liniowe z jedną niewiadomą

Chcąc znaleźć miejsca zerowe funkcji liniowej $f(x) = ax + b$, należało rozwiązać równanie $ax + b = 0$.

Każde równanie postaci

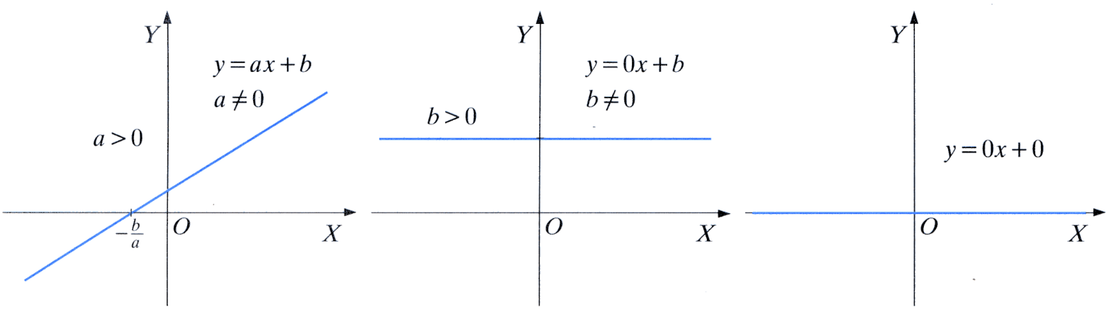
(∗) $$ax + b = 0,$$

w którym x jest niewiadomą, zaś a i b są danymi liczbami, nazywamy równaniem liniowym z jedną niewiadomą x.

Jeżeli $a \neq 0$, to $ax + b = 0 \Leftrightarrow ax = -b \Leftrightarrow x = -\frac{b}{a}$; zatem w tym wypadku równanie (∗) ma jedno rozwiązanie: $x_0 = -\frac{b}{a}$.

Jeżeli $a = 0$ i $b = 0$, to równanie (∗) ma postać $0 \cdot x + 0 = 0$ i spełnia je każda liczba rzeczywista. Równanie (∗) jest więc tożsamościowe.

Gdy zaś $a = 0$ i $b \neq 0$, to równanie (∗) przybiera postać $0 \cdot x + b = 0$ i nie spełnia go żadna liczba rzeczywista. Równanie (∗) jest w tym wypadku równaniem sprzecznym. Poniżej przedstawiamy interpretację geometryczną każdego z rozważanych wypadków.



Ryc. 7.8.

Zanim przejdziemy do rozwiązywania równań liniowych, przypomnijmy sobie ogólne wiadomości o równaniach.

Rozwiązaniem (albo pierwiastkiem) równania z jedną niewiadomą nazywamy każdą liczbę spełniającą to równanie.

Jeżeli równanie spełnia każda liczba ze zbioru A, w którym ma ono sens, to nazywamy je równaniem tożsamościowym w zbiorze A.

Na przykład:

- równanie $2(x + 2) = 2x + 4$ jest tożsamościowe w zbiorze R,
- równanie $\frac{1}{2x} + \frac{1}{3x} + \frac{1}{6x} = 1$ jest tożsamościowe w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera.

Równanie postaci $x = a$, gdzie a jest liczbą, nazywamy **elementarnym**.

Dwa równania nazywamy równoważnymi w zbiorze A, gdy ten sam podzbiór zbioru A jest zbiorem rozwiązań każdego z tych równań.

Na przykład:
- równania $(x-1)(x+1)-(x+1)^2=2$ i $-2x-2=2$ są równoważne w zbiorze R,
- równania $\frac{x^2-1}{x+1}=3$ i $x-1=3$ są równoważne w zbiorze liczb rzeczywistych różnych od -1.

Rozwiązując równanie, które nie jest tożsamościowe, przekształcamy je dopóty, dopóki ostatecznie nie doprowadzimy go do równania elementarnego. Przechodzimy przy tym od danego równania do kolejnych równań jemu równoważnych, opierając się na następujących twierdzeniach.

Twierdzenie 1.

Jeżeli występujące w danym równaniu wyrażenia zastąpimy wyrażeniami im równymi, lub jeżeli do obu stron równania dodamy tę samą liczbę albo to samo wyrażenie, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Twierdzenie 2.

Jeżeli obie strony równania pomnożymy bądź podzielimy przez liczbę różną od zera lub wyrażenie nie przyjmujące wartości zero, to otrzymamy równanie równoważne danemu.

Przystąpmy do rozwiązywania równań.

Przykład 1. Rozwiąż równanie

$2x(x+3)+(x+1)(x-2)=(x-1)(3x+2)$.

Rozwiązanie:

Przekształcamy dane równanie, i otrzymujemy kolejno równoważne jemu równania:

$(2x^2+6x)+(x^2-2x+x-2)=3x^2+2x-3x-2$, (zastąpiliśmy wyrażenia po obu stronach równania wyrażeniami im równymi)

$3x^2+5x-2=3x^2-x-2$,

$3x^2+5x-3x^2+x=-2+2$, (do obu stron równania dodajemy $-3x^2+x$)

$6x=0$, (obie strony równania dzielimy przez 6)

Otrzymujemy $x=0$.

Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania jest liczba 0.

Dla sprawdzenia, czy nie popełniliśmy błędów rachunkowych, podstawiamy otrzymaną liczbę do każdej ze stron wyjściowego równania, by się przekonać, że 0 jest rzeczywiście jego rozwiązaniem.

Mamy:

$L = 2 \cdot 0 \cdot (0+3) + (0+1)(0-2) = 0 + 1 \cdot (-2) = -2,$

$P = (0-1)(3 \cdot 0 + 2) = -1 \cdot 2 = -2,$

więc istotnie $L = P$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie

$$\frac{3x-1}{5} - \frac{13-x}{2} = \frac{7x}{3} - \frac{11(x+3)}{6}.$$

Rozwiązanie:

Mnożymy obie strony równania przez NWW $(2, 3, 5, 6)$, a więc przez liczbę 30. Otrzymujemy równanie

$6(3x-1) - 15(13-x) = 10 \cdot 7x - 5 \cdot 11(x+3),$

które dalej przekształcamy w znany sposób. Dostajemy kolejno równoważne równania.

$18x - 6 - (195 - 15x) = 70x - (55x + 165),$

$18x - 6 - 195 + 15x = 70x - 55x - 165,$

$33x - 201 = 15x - 165,$

$33x - 15x = 201 - 165,$

$18x = 36,$

$x = 2.$

Odpowiedź: Rozwiązaniem danego równania jest liczba 2.

Dla pewności sprawdzamy:

$$L = \frac{3 \cdot 2 - 1}{5} - \frac{13-2}{2} = 1 - \frac{11}{2} = -\frac{9}{2},$$

$$P = \frac{7 \cdot 2}{3} - \frac{11 \cdot (2+3)}{6} = \frac{14}{3} - \frac{55}{6} = \frac{28}{6} - \frac{55}{6} = -\frac{27}{6} = -\frac{9}{2}.$$

Jest więc $L = P$.

Równania liniowe z parametrem

Parametrami w równaniach nazywamy litery oznaczające wielkości dane.

Przykład 1. Rozwiąż równanie

$$(*) \qquad \frac{2mx-1}{3} = \frac{x-m}{6}.$$

Rozwiązanie:

Równanie to jest równoważne kolejno równaniom:

$2(2mx-1) = x - m,$	(pomnożyliśmy obie strony równania $(*)$ przez 6,
$4mx - 4 = x - m,$	wyrażenie po lewej stronie równania zastąpiliśmy wyraże-
$4mx - x = 4 - m,$	niem jemu równym, do obu stron równania dodaliśmy
$(4m-1)x = 4 - m,$	$-x + 4$, wyłączyliśmy x poza nawias)

Jeśli $4m-1 \neq 0$, czyli $m \neq \frac{1}{4}$, to $(4m-1)x = 2-m \Leftrightarrow x = \frac{2-m}{4m-1}$.

Gdy zaś $4m-1=0$, czyli $m = \frac{1}{4}$, to

$(4m-1)x = 4-m \Leftrightarrow 0 \cdot x = \frac{15}{4}$.

Ostatnie równanie jest oczywiście sprzeczne.

Odpowiedź: Dane równanie:

a) ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{2-m}{4m-1}$, gdy $m \neq \frac{1}{4}$;

b) nie ma rozwiązania (jest równaniem sprzecznym), gdy $m = \frac{1}{4}$.

Przykład 2. Rozwiąż równanie

$(a+x-b)(a-b-x) = (a^2-x)(b^2+x) - a^2b^2$.

Rozwiązanie:

Przekształcając to równanie, otrzymujemy kolejno równoważne równania:

$((a-b)+x)((a-b)-x) = (a^2-x)(b^2+x) - a^2b^2$,

$(a-b)^2 - x^2 = a^2b^2 + a^2x - b^2x - x^2 - a^2b^2$,

$(a-b)^2 = (a^2-b^2)x$,

$(a-b)(a+b)x = (a-b)^2$.

Jeżeli $a \neq b$ i $a \neq -b$, to $(a-b)(a+b)x = (a-b)^2 \Leftrightarrow x = \frac{a-b}{a+b}$.

Gdy $a \neq b$ i $a = -b$, to $(a-b)(a+b)x = (a-b)^2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 4a^2$.

Tego równania nie spełnia żadna liczba rzeczywista, gdyż $a \neq 0$ (co wynika z przyjętych w tym przypadku założeń).

Gdy wreszcie $a = b$, to $(a-b)(a+b)x = (a-b)^2 \Leftrightarrow 0 \cdot x = 0$.

Równanie to spełnia każda liczba rzeczywista, jest więc ono równaniem tożsamościowym.

Odpowiedź: Dane równanie:

a) ma jedno rozwiązanie: $x = \frac{a-b}{a+b}$, gdy $|a| \neq |b|$;

b) jest sprzeczne, gdy $a = -b$ i $b \neq 0$;

c) jest równaniem tożsamościowym, gdy $a = b$.

Nierówność liniowa z jedną niewiadomą

Badanie znaku funkcji liniowej $y = ax + b$ prowadzi do rozwiązania nierówności $ax + b > 0$ albo $ax + b < 0$.

!

Każdą nierówność postaci

$$ax+b>0 \text{ albo } ax+b<0,$$
$$(\geqslant) \qquad\qquad (\leqslant)$$

w której x jest niewiadomą, zaś a i b są danymi liczbami, nazywamy nierównością liniową z jedną niewiadomą x.

Oto proste przykłady:

nierówność	rozwiązanie	zbiór rozwiązań
1. $3x-1>0$,	$3x-1>0 \Leftrightarrow 3x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{3}$,	$\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$.
2. $-\frac{1}{2}x+3 \geqslant 0$,	$-\frac{1}{2}x+3 \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x \geqslant -3 \Leftrightarrow x \leqslant 6$,	$(-\infty;6\rangle$.
3. $2x+1<0$,	$2x+1<0 \Leftrightarrow 2x<-1 \Leftrightarrow x<-\frac{1}{2}$,	$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$.
4. $-\sqrt{2}\,x+3\sqrt{2} \leqslant 0$,	$-\sqrt{2}\,x+3\sqrt{2} \leqslant 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2}\,x \leqslant -3\sqrt{2} \Leftrightarrow x \geqslant 3$,	$\langle 3;+\infty)$.

Powróćmy do nierówności liniowych w ogólnej postaci.

Jeśli $a=0$, to nierówność liniowa jest:

– albo tożsamościowa (tzn. zachodzi dla każdej liczby rzeczywistej), na przykład:

$0\cdot x+1>0,\ 0\cdot x+2 \geqslant 0,\ 0\cdot x-3<0,\ 0\cdot x-1 \leqslant 0;$

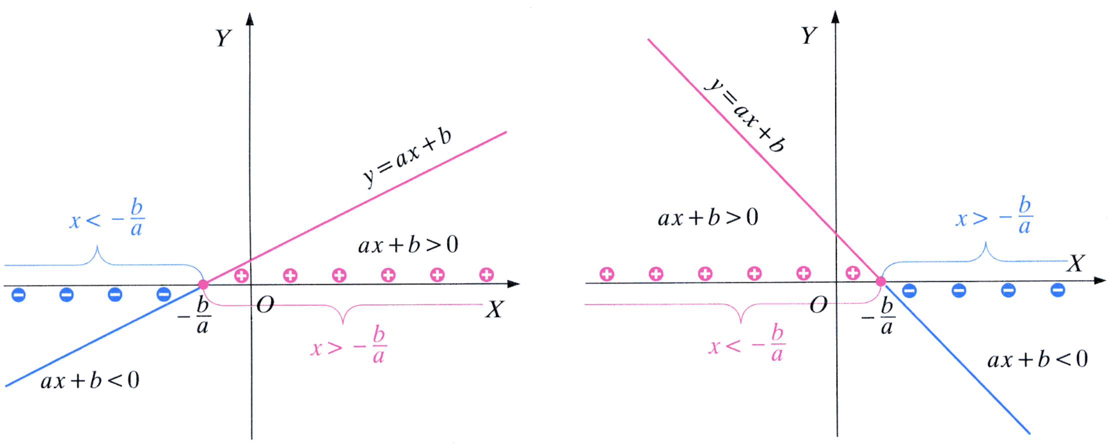
– albo sprzeczna (tzn. nie spełnia jej żadna liczba rzeczywista), na przykład:

$0\cdot x-1>0,\ 0\cdot x-2 \geqslant 0,\ 0\cdot x+\sqrt{2}<0,\ 0\cdot x+\frac{1}{2} \leqslant 0.$

Jeżeli $a \neq 0$, to zbiorem rozwiązań nierówności liniowej jest jeden z przedziałów:

$$\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right),\ \left(-\infty;-\frac{b}{a}\right\rangle,\ \left(-\frac{b}{a};+\infty\right),\ \left\langle-\frac{b}{a};+\infty\right),$$

w zależności od tego, czy nierówność jest ostra ($<$, $>$), czy nieostra ($\leqslant$, $\geqslant$). Oto interpretacja geometryczna takich nierówności:



Ryc. 7.9.

Przed przystąpieniem do rozwiązywania nierówności powtórzmy sobie ogólne wiadomości o nierównościach.

> Zbiorem rozwiązań nierówności z jedną niewiadomą nazywamy zbiór wszystkich liczb spełniających tę nierówność.

Jeżeli nierówność spełniona jest przez każdą liczbę ze zbioru A, w którym ma ona sens, to nazywamy ją **tożsamościową** w zbiorze A.

Na przykład:
– nierówność $3(x+2) > 3x+1$ jest tożsamościowa w zbiorze R,
– nierówność $x^2+1 > 1$ jest tożsamościowa w zbiorze wszystkich liczb rzeczywistych różnych od zera.

Nierówności postaci $x > a$, $x \geqslant a$, $x < a$, $x \leqslant a$, gdzie a jest liczbą, nazywamy elementarnymi.

Dwie nierówności nazywamy równoważnymi w zbiorze A, gdy ten sam podzbiór zbioru A jest zbiorem rozwiązań każdej z tych nierówności.

Na przykład:
– nierówności $3(x-1)+1 < -x+2$ i $4x < 4$ są równoważne w zbiorze R;
– nierówności $\frac{x^2+1}{x} \geqslant 2$ i $(x-1)^2 \geqslant 0$ są równoważne w zbiorze liczb rzeczywistych dodatnich;
– nierówności $|1-2x| < 2$ i $1-2x < 2$ są równoważne w przedziale $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right\rangle$.

Nierówności rozwiązujemy, przekształcając je (podobnie jak równania) dopóty, dopóki ostatecznie nie doprowadzimy ich do nierówności elementarnych. Przechodząc przy tym od danej nierówności do kolejnych nierówności jej równoważnych, korzystamy z następujących twierdzeń.

Twierdzenie 1.

Jeżeli występujące w danej nierówności wyrażenia zastąpimy wyrażeniami im równymi lub jeżeli do obu stron nierówności dodamy tę samą liczbę albo to samo wyrażenie, to otrzymamy nierówność równoważną danej.

Twierdzenie 2.

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę **dodatnią**, to otrzymamy nierówność równoważną o **tym samym** zwrocie.

Twierdzenie 3.

Jeżeli obie strony nierówności pomnożymy lub podzielimy przez tę samą liczbę **ujemną**, to otrzymamy nierówność równoważną o **zwrocie przeciwnym**.

Przejdźmy teraz do rozwiązywania nierówności.

Przykład 1. Rozwiąż nierówność

$$(*)\quad \frac{x+2}{3} + \frac{5}{6} > \frac{3x-4}{2}.$$

Rozwiązanie:

Nierówność ta jest równoważna kolejno nierównościom:

$2(x+2)+5>3(3x-4)$, (pomnożyliśmy obie strony nierówności (*) przez 6)

$2x+4+5>9x-12$, (wykonaliśmy wskazane działania)

$2x+9>9x-12$,

$2x-9x>-12-9$,

$-7x>-21$, (podzieliliśmy obie strony nierówności przez -7)

$x<3$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(-\infty; 3)$.

Przykład 2. Rozwiąż nierówność

$$\frac{x-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-2}>x.$$

Rozwiązanie:

Mnożymy obie strony danej nierówności przez liczbę $\sqrt{3}-2$ (ujemną!) i otrzymujemy nierówność $x-\sqrt{3}<(\sqrt{3}-2)x$, równoważną wyjściowej.

Przekształcając dalej tę nierówność, otrzymujemy kolejno równoważne nierówności:

$-\sqrt{3}<(\sqrt{3}-2)x-x$,

$-\sqrt{3}<(\sqrt{3}-3)x$,

$-\sqrt{3}<-(3-\sqrt{3})x$,

$-\sqrt{3}<-\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)x$,

$\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)x<\sqrt{3}$,

$$x<\frac{1}{\sqrt{3}-1},$$

$$x<\frac{\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)},$$

$$x<\frac{\sqrt{3}+1}{3-1},$$

$$x<\frac{1+\sqrt{3}}{2}.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left(-\infty; \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)$.

Przykład 3. Rozwiąż nierówność

$$(x-3)(x+3)-(2x-1)^2\leqslant x(6-3x)-9.$$

Rozwiązanie:

Przekształcamy daną nierówność, stosując wzory skróconego mnożenia oraz wykonując działania prowadzące do nierówności równoważnych. Otrzymujemy kolejno nierówności:

$$x^2 - 9 - (4x^2 - 4x + 1) \leqslant 6x - 3x^2 - 9,$$
$$x^2 - 9 - 4x^2 + 4x - 1 \leqslant 6x - 3x^2 - 9,$$
$$-3x^2 + 4x - 10 \leqslant 6x - 3x^2 - 9,$$
$$-3x^2 + 4x - 6x + 3x^2 \leqslant -9 + 10,$$
$$-2x \leqslant 1,$$
$$x \geqslant -\frac{1}{2}.$$

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań nierówności jest przedział $\left\langle -\frac{1}{2}; +\infty \right)$.

Przykład 4. Dla jakich m równanie $2x - m = 3(m-1) - x$ ma rozwiązanie w przedziale $(1; +\infty)$?

Rozwiązanie:

Mamy:

$$2x - m = 3(m-1) - x \Leftrightarrow 2x + x = 3m - 3 + m \Leftrightarrow 3x = 4m - 3 \Leftrightarrow x = \frac{4m-3}{3}.$$

Znalezione rozwiązanie będzie rozwiązaniem tego równania w przedziale $(1; +\infty)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{4m-3}{3} > 1$.

Rozwiązując tę nierówność, otrzymujemy $m > \frac{3}{2}$.

Odpowiedź: Dane równanie ma rozwiązanie w przedziale $(1; +\infty)$, gdy $m \in \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$.

Układ nierówności liniowych z jedną niewiadomą

Układ nierówności to inaczej koniunkcja nierówności. Mogą w nim występować dwie lub więcej nierówności.

Zbiorem rozwiązań układu nierówności jest część wspólna zbiorów rozwiązań każdej z nierówności układu. Aby było nam łatwiej wyznaczyć ową część wspólną, będziemy zbiory rozwiązań nierówności układu przedstawiać na osi liczbowej.

Czasami układ nierówności:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ g(x) < h(x) \end{cases}$$

zapisany bywa w postaci tak zwanej nierówności podwójnej $f(x) < g(x) < h(x)$.

Przykład 1. Rozwiąż układ nierówności

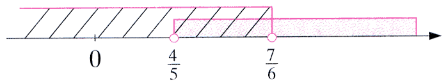
$$\begin{cases} (x+1)^2 + 7 > (x-4)^2 \\ (1+x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 7. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Mamy kolejno:

$$\begin{cases} (x+1)^2 + 7 > (x-4)^2 \\ (1+x)^2 + 3x^2 < (2x-1)^2 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + 1 + 7 > x^2 - 8x + 16 \\ 1 + 2x + x^2 + 3x^2 < 4x^2 - 4x + 1 + 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10x > 8 \\ 6x < 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{4}{5} \\ x < \dfrac{7}{6}. \end{cases}$$



Ryc. 7.10.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań układu nierówności jest przedział $\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{6}\right)$.

Przykład 2. Rozwiąż układ nierówności

$$\begin{cases} \dfrac{7-6x}{2} + 12 \leqslant \dfrac{8x+1}{3} - 10x \\ 8 + \dfrac{3x-4}{5} > \dfrac{x-1}{6} - \dfrac{5x-3}{8}. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

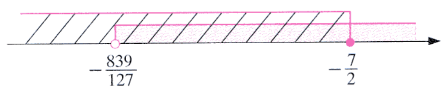
Mnożymy obie strony pierwszej nierówności przez 6, a drugiej przez 120. Otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} 3(7-6x) + 72 \leqslant 2(8x+1) - 60x \\ 960 + 24(3x-4) > 20(x-1) - 15(5x-3) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 21 - 18x + 72 \leqslant 16x + 2 - 60x \\ 960 + 72x - 96 > 20x - 20 - 75x + 45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -18x - 16x + 60x \leqslant 2 - 72 - 21 \\ 72x - 20x + 75x > -20 + 45 + 96 - 960 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 26x \leqslant -91 \\ 127x > -839 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant -\dfrac{7}{2} \\ x > -\dfrac{839}{127}. \end{cases}$$



Ryc. 7.11.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań układu nierówności jest przedział $\left(-\frac{839}{127}; -\frac{7}{2}\right\rangle$.

Przykład 3. Rozwiąż nierówność podwójną

$2(x-1) < 3(x-1) < 4(x-1)$.

Rozwiązanie:

Nierówność ta to układ nierówności

$$\begin{cases} 2(x-1) < 3(x-1) \\ 3(x-1) < 4(x-1). \end{cases}$$

Jest on równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} 2x - 2 < 3x - 3 \\ 3x - 3 < 4x - 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x - 3x < -3 + 2 \\ 3x - 4x < -4 + 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x < -1 \\ -x < -1, \end{cases}$$

czyli nierówności $x > 1$.

Odpowiedź: Zbiorem rozwiązań danej nierówności jest przedział $(1; +\infty)$.

Pytania i zadania

1. Co to jest równanie liniowe, nierówność liniowa z jedną niewiadomą?
2. Jakie dwa równania (dwie nierówności) liniowe nazywamy równoważnymi? Podaj przykłady takich równań i nierówności.
3. Rozwiąż równania:

   a) $\frac{7x+4}{5} - x = \frac{3x-5}{2}$; b) $x - \frac{3x-2}{5} = 3 - \frac{2x-5}{3}$;

   c) $6(x^2 + x + 1) = (x+1)^3 - (x-1)^3$; d) $\left(\frac{3x-1}{2}\right)^2 - (x-2)^2 = \frac{5}{4}(x-1)(x+1)$;

   e) $(x-2)(x+2) = 2(x+1)^2 - (x-3)^2 - 7$.
4. Rozwiąż nierówności:

   a) $\frac{3x}{2} - \frac{2-x}{3} > x + 1$; b) $\frac{5}{2}x - \frac{3(1-x)}{4} < 1 - \frac{x+1}{2}$;

   c) $x + 2 - \frac{3-x}{2} > -\frac{x}{2} + 2x$; d) $\frac{9-7x}{3} + 1 \leqslant x - \frac{1-x}{2}$;

   e) $(1+x)^2 + 3x^2 \geqslant (2x-1)^2 + 6$; f) $(x-3)^3 + (3x-1)(3x+1) - 5x + 3 \leqslant x^3 - 2$.
5. Rozwiąż układy nierówności:

   a) $\begin{cases} 3 + 5x < 7x + 4 \\ 3(x-2) > 4x - 9; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 4(x+1)^2 - 2(x-2)^2 > 2x^2 + 12 \\ (x+1)^2 + 5 \leqslant (x-4)^2; \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 2 - \frac{3}{4}x < \frac{2+x}{3} \\ \frac{x+2}{3} + 1 > \frac{3x-4}{2}; \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2(x-2)^2 + 4 < (x+2)^2 + (x+1)^2 \\ 1 + \frac{4}{5}x > x - \frac{x-2}{6}. \end{cases}$
6. Rozwiąż nierówności podwójne:

   a) $2(x+1) < 3(x+1) < 4(x+1)$; b) $(x-1)^2 \leqslant (x-2)^2 \leqslant (x-3)^2$;

   c) $\frac{x-3}{2} - 1 \geqslant 5x + 2 > \frac{x+3}{3} - 1$.
7. Dla jakich wartości m liczba 1 jest rozwiązaniem równania?

   a) $\frac{26x}{3} + 4 = 2\left(m + \frac{x}{3}\right)$; b) $\frac{m}{2}(1-x) = 1 + \frac{3}{2}x$;

   c) $3(2x+m)(3x+2) - 2(3x+1)^2 = 43$; d) $5(m+3x)(x+1) - 4(1+4x)^2 = 80$.

8. Które z poniższych równań jest tożsamościowe, a które jest sprzeczne?

a) $\frac{2x-1}{3}-\frac{4-x}{2}-x=1+\frac{x-3}{6}$; b) $5x+(x-1)^2=(x+2)(x-2)+3x+5$.

9. Rozwiąż równania, w których a jest parametrem:

a) $(x+2)(a-1)+1=a^2$; b) $(a-2)(x-1)=a^2$; c) $a^2x=a(x+2)-2$;

d) $(x+2)(x+a)=(x+1)^2$; e*) $a^2x-a(x+1)=6x-3$; f*) $x+2=|a|(x+2|a|)$.

10. Dla jakich wartości a i b równanie

$\frac{a-b}{a+b}\left(a(x-a)+b(x-b)\right)=\frac{x-2ab(b-a)}{a+b}-\frac{2}{b-a}$ jest tożsamościowe?

11. Dla jakich wartości parametru m równanie $2x-5m=3(m+1)-6x$ ma rozwiązanie w przedziale $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$?

12. Dla jakich wartości parametru m równanie $1-\frac{3m-x}{2}=\frac{x-9m}{10}-\frac{3x-1}{5}$ ma rozwiązanie w przedziale $\langle-1;2)$?

13. Dla jakich a zbiór rozwiązań nierówności $(ax-1)^2>(ax+2)^2$ jest przedziałem $(1;+\infty)$?

3. Zadania prowadzące do równań i nierówności liniowych z jedną niewiadomą

Obecnie zajmiemy się rozwiązywaniem zadań powszechnie zwanych zadaniami z treścią. Prowadzą one zazwyczaj do równań lub nierówności, układanych przede wszystkim na podstawie analizy treści zadania.

Przykład 1. Cegła waży 1 kg i jeszcze pół cegły. Ile waży ta cegła?
Rozwiązanie:

Oznaczmy nieznaną nam wagę cegły przez x. Z treści zadania wynika, że ta sama cegła waży $1+\frac{1}{2}x$. Stąd dochodzimy do równania $x=1+\frac{1}{2}x$, którego rozwiązaniem jest liczba 2. I sprawdzamy, że istotnie $2=1+\frac{1}{2}\cdot 2$.
Odpowiedź: Cegła waży 2 kg.

Przykład 2. Ile soli należy dodać do 400 g jednoprocentowego roztworu, aby otrzymać 10% roztwór tej soli?
Rozwiązanie:

W 400 g jednoprocentowego roztworu tej soli znajduje się, oczywiście $\frac{1}{100}\cdot 400\text{ g}=4\text{ g}$ czystej soli. Załóżmy, że aby otrzymać z tego roztworu roztwór 10%, należy dodać x gramów soli.

Zatem:
$400+x$ – tyle gramów waży otrzymany roztwór, $\frac{10}{100}\cdot(400+x)$ – tyle gramów soli jest w tym roztworze.

Wobec tego otrzymujemy równanie

$\frac{10}{100}(400+x)=4+x.$

Stąd kolejno

$400 + x = 40 + 10x$,

$9x = 360$,

$x = 40$.

Odpowiedź: Aby otrzymać roztwór 10% należy dodać do danego roztworu 40 g soli.

Przykład 3. (Starożytne zadanie chińskie). W ogrodzie mandaryna biegały bażanty i króliki. Miały one razem 35 głów, a nóg 94. Ile tam było bażantów, a ile królików?

Rozwiązanie:

Oznaczmy liczbę biegających w tym ogrodzie królików przez x. Wobec tego bażantów tam było $35 - x$ (każde z tych zwierząt ma jedną głowę, a głów było 35).

Każdy królik ma 4 nogi, a bażant 2. W takim razie króliczych nóg tam było $4x$, a bażancich $2(35 - x)$. A ponieważ biegające w tym ogrodzie bażanty i króliki miały razem 94 nogi, więc mamy równanie

$4x + 2(35 - x) = 94$.

Stąd

$2x + 35 - x = 47 \Leftrightarrow x = 12$, zaś $35 - x = 23$.

I rzeczywiście $12 + 23 = 35$ oraz $4 \cdot 12 + 2 \cdot 23 = 94$.

Odpowiedź: W ogrodzie tym biegało 12 królików i 23 bażanty.

Przykład 4. Według podania sławny grecki matematyk i filozof Pitagoras z Samos, żyjący w VI i V wieku p.n.e., założyciel słynnej szkoły filozoficznej, na pytanie o liczbę swoich uczniów odpowiedział taką oto zagadką: „Połowa moich uczniów studiuje matematykę, czwarta część uprawia muzykę, siódma część ćwiczy się w sztuce milczenia i są jeszcze 3 kobiety". Ile osób liczyła szkoła Pitagorasa?

Rozwiązanie:

Nie wiemy, ile osób liczyła owa szkoła, więc tę szukaną liczbę oznaczmy przez x. Wówczas z treści zadania otrzymujemy, że uczniów:

- studiujących matematykę jest $\frac{1}{2}x$,
- uprawiających muzykę jest $\frac{1}{4}x$,
- ćwiczących się w sztuce milczenia jest $\frac{1}{7}x$.

A ponieważ oprócz nich w szkole tej są jeszcze 3 kobiety, więc ostatecznie otrzymujemy równanie

$\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + \frac{1}{7}x + 3 = x$.

Stąd

$x - \left(\frac{14}{28} + \frac{7}{28} + \frac{4}{28}\right)x = 3$,

$\frac{3}{28}x = 3$,

$x = 28$.

I sprawdzamy, że istotnie

$\frac{1}{2} \cdot 28 + \frac{1}{4} \cdot 28 + \frac{1}{7} \cdot 28 + 3 = 14 + 7 + 4 + 3 = 28$.

Odpowiedź: Szkoła Pitagorasa liczyła 28 osób.

Ryc 7.12.

Przykład 5*. Piłka futbolowa uszyta jest z 32 sześciokątnych i pięciokątnych łatek. Każdy sześciokąt jest biały i graniczy z trzema innymi sześciokątami oraz z trzema pięciokątami, które są czarne. Każdy pięciokąt graniczy tylko z sześciokątami. Z ilu łatek każdego rodzaju uszyta jest ta piłka?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że białych łatek na tej piłce jest x. Wobec tego granic między białymi i czarnymi łatkami jest $3x$, gdyż każda łatka biała graniczy z trzema łatkami czarnymi. Czarnych łatek na tej piłce mamy $32-x$ (bo wszystkich jest 32) i każda z nich graniczy z pięcioma białymi. Stąd wynika równanie $5(32-x)=3x$, którego rozwiązaniem jest $x=20$.

Odpowiedź: Piłka futbolowa uszyta jest z 20 białych łatek sześciokątnych i z 12 czarnych łatek pięciokątnych.

Przykład 6. Ojciec postanowił podzielić swój majątek pomiędzy swoich synów. Najstarszemu z nich dał 1000 zł i $\frac{1}{10}$ pozostałej części majątku, drugi syn otrzymał 2000 zł i $\frac{1}{10}$ nowej pozostałej części majątku, trzeciemu z nich przypadło 3000 zł i $\frac{1}{10}$ tego, co jeszcze pozostało itd. W ten sposób każdy z synów otrzymał tyle samo pieniędzy. Oblicz, ile pieniędzy było do podziału, ilu było synów i po ile złotych przypadło każdemu z nich?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że do podziału było x złotych. Zgodnie z treścią zadania:

– najstarszemu z synów przypadło $1000+\frac{1}{10}(x-1000)$ zł,

– drugiemu z nich $2000+\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}x-2900\right)$ zł,

a ponieważ każdy z nich (oraz pozostali synowie) otrzymał tyle samo pieniędzy, stąd równanie

$$1000+\frac{1}{10}(x-1000)=2000+\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}x-2900\right).$$

Rozwiązując to równanie, otrzymujemy kolejno równoważne jemu równania:

$$\frac{1}{10}(x-1000)=1000+\frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}x-2900\right),$$

$$x-1000=10000+\frac{9}{10}x-2900,$$

$$x-\frac{9}{10}x=11000-2900,$$

$$\left(1-\frac{9}{10}\right)x=8100,$$

$$\frac{1}{10}x=8100$$

i ostatecznie $x=81000$.

Odpowiedź: Najstarszy z synów (i każdy z pozostałych) otrzymał

$$1000+\frac{1}{10}\cdot 8000=9000 \text{ zł},$$

a w podziale całej kwoty 81000 zł wzięło udział $81000:9000=9$ synów.

Przykład 7. Jeżeli do szukanej liczby dodamy 4, to otrzymamy liczbę większą od potrojonej liczby szukanej. Podaj liczbę szukaną.
Rozwiązanie:

Niech x oznacza szukaną liczbę. Po dodaniu do niej 4 otrzymamy liczbę $x+4$, zaś potrojona liczba szukana to $3x$. Z treści zadania wynika nierówność $x+4>3x$, której rozwiązaniem jest $x<2$.
Odpowiedź: Szukaną liczbą jest każda mniejsza od 2.

Przykład 8. Aleksander Wielki zmarł w kwiecie wieku. Gdyby żył o 5 lat krócej, to panowałby $\frac{1}{4}$ swego życia. Gdyby zaś żył o 9 lat dłużej, to panowałby $\frac{1}{2}$ swego życia. Ile lat żył, a ile panował Aleksander Wielki?
Rozwiązanie:

Wiemy, że Aleksander Wielki panował do końca swoich dni. Niech x oznacza liczbę lat życia Aleksandra Wielkiego. Z treści zadania wynika, że $\frac{1}{4}(x-5)$ to liczba lat panowania Aleksandra Wielkiego, gdyby żył o 5 lat krócej, a $\frac{1}{2}(x+9)$ jest liczbą lat jego panowania, gdyby żył o 9 lat dłużej.

Faktyczną liczbę lat panowania Aleksandra Wielkiego możemy więc oznaczyć dwojako:

$$\frac{1}{4}(x-5)+5 \quad \text{i} \quad \frac{1}{2}(x+9)-9.$$

Stąd równanie

$$\frac{1}{4}(x-5)+5=\frac{1}{2}(x+9)-9,$$

którego rozwiązaniem jest $x=33$.

I sprawdzamy, że

$$\frac{1}{4}(33-5)+5=\frac{1}{4}\cdot 28+5=7+5=12=\frac{1}{2}(33+9)-9.$$

Odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata, w tym panował przez 12 lat.

Przykład 9. Bolek ma 108 znaczków pocztowych polskich i zagranicznych. Gdyby 8 znaczków polskich wymienił z Lolkiem na 8 zagranicznych, to znaczków zagranicznych miałby więcej niż polskich. Ile ma Bolek znaczków polskich, a ile zagranicznych?
Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że Bolek ma w swoim zbiorze x znaczków polskich. Wobec tego znaczków zagranicznych ma $108-x$. Po wymianie z Lolkiem będzie miał $x-8$ znaczków polskich, a zagranicznych $108-x+8=116-x$. Z treści zadania wynika nierówność $x-8<116-x$, czyli nierówność $x<62$.
Odpowiedź: Bolek ma mniej niż 62 znaczki polskie i więcej niż 46 znaczków zagranicznych.

Pytania i zadania

1. (Zadanie Bhaskary*) Piąta część pszczelej gromadki usiadła na kwiatach magnolii, trzecia część roju – na kwiatach lotosu, potrojona różnica drugiej z tych liczb i pierwszej – odleciała ku krzewom jaśminu. Jedna tylko pszczółka – zwabiona słodko pachnącym kwieciem koniczyny – krążyła nad nim. Ile pszczół było w tej gromadce?
2. Według legendy, na płycie grobowej wielkiego matematyka starożytnej Grecji Diofantosa z Aleksandrii (III–IV wiek n.e.) był taki napis (ułożony przez Eutropiusza): „Przechodniu! Pod tym kamieniem spoczywają prochy Diofantosa, który umarł w głębokiej starości. Przez szóstą część swego życia był on dzieckiem, przez dwunastą część – młodzieńcem. Następnie upłynęła siódma część jego życia, zanim się ożenił. W pięć lat po zawarciu związku małżeńskiego urodził mu się syn, który żył dwa razy krócej od niego. W cztery lata po śmierci swego syna Diofantos, opłakiwany przez swych najbliższych, zasnął snem wiecznym. Powiedz, jeśli umiesz obliczać, ile on miał lat, kiedy zmarł".
3. Ojciec Janka jest teraz 4 razy starszy od syna, a za 5 lat będzie od niego starszy tylko 3 razy. Ile lat ma Janek, a ile jego ojciec?

4*. Na balu tańczyły 42 osoby. Pani A_1 tańczyła z 7 panami, a pani A_2 – z 8 panami, pani A_3 – z 9 panami, ..., pani A_n tańczyła ze wszystkimi panami. Ile pań i ilu panów tańczyło na tym balu?

5. *Rzekł Twardowski raz do żaka:*
„Niech umowa stoi taka:
Gdy przebiegniesz most ten cały,
zdwoję Twoje kapitały,
Ty zaś potem mi w nagrodę,
po 8 groszy rzucaj w wodę!"
Żaczek chętnie przez most leci,
raz i drugi, w końcu trzeci...
nagle woła:„Jakaś zdrada!
Ani grosza nie posiadam!"
Czy obliczysz – (wnet zobaczę),
ile groszy miał ten żaczek?
6. Z miejscowości A w kierunku miejscowości B odległej od A o 72 km wyjechał motocyklista. Jaka była prędkość motocyklisty, jeżeli po 1 godzinie i 20 minutach:
   a) jeszcze do B nie dojechał,
   b) już minął B?
7. Jeżeli do 5 l roztworu wodnego soli kuchennej dolejemy 2,5 l wody, to otrzymamy roztwór o stężeniu mniejszym niż 4%. Od ilu procent było mniejsze stężenie 5 l roztworu?

* Aćarja Bhaskara – wielki mędrzec i matematyk hinduski (z XII wieku n.e.) – napisał wierszem dzieło matematyczno-astronomiczne, którego pierwsza część nosi tytuł *Lilavati* (czarująca). Było to imię jego córki, której poświęcił swe dzieło.

8. Znajdź taką liczbę dwucyfrową, żeby suma jej cyfr wynosiła 16 i żeby po przestawieniu tych cyfr otrzymać:
   a) liczbę większą od liczby szukanej, b) liczbę mniejszą od liczby szukanej.
9. Suma cyfr liczby dwucyfrowej jest równa 11. Jeżeli napiszemy cyfry w odwrotnej kolejności, to otrzymamy liczbę mniejszą od połowy szukanej. Jaka to liczba?
10. Jedna z przekątnych rombu ma długość 8 cm. Pewien trójkąt ma wysokość 6 cm i podstawę o 1 cm dłuższą od drugiej przekątnej rombu. Jaką długość powinna mieć druga przekątna rombu, aby pole tego trójkąta było mniejsze od pola rombu?
11*. Z dwóch przystani K i L wypłynęły na jezioro kajaki. Z przystani L wypłynęło ich mniej niż dwa razy tyle, ile ich wypłynęło z przystani K. Gdyby z przystani K wypłynęło o dwa kajaki więcej, a z przystani L – o dwa kajaki mniej, to z L wypłynęłoby ich więcej niż z K. Ile kajaków wypłynęło z każdej przystani, jeśli wiedomo, że wypłynęło ich mniej niż 18?

4. Równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi

Dotychczas zajmowaliśmy się równaniami i nierównościami liniowymi z jedną niewiadomą. Obecnie przedmiotem naszych rozważań będą równania i nierówności liniowe z dwiema niewiadomymi.

Równaniem liniowym z dwiema niewiadomymi nazywamy każde równanie postaci

$$ax+by+c=0,$$

a nierównością liniową z dwiema niewiadomymi – każdą nierówność postaci

$$ax+by+c>0,\quad ax+by+c\geqslant 0,$$

$$ax+by+c<0,\quad ax+by+c\leqslant 0,$$

gdzie a, b, c są danymi liczbami rzeczywistymi i co najmniej jedna z liczb a i b jest różna od zera.

Rozwiązaniem równania $ax+by+c=0$ nazywamy **każdą parę** (x_0, y_0) liczb rzeczywistych, spełniających to równanie.

Na przykład rozwiązaniami równania $-x+y+2=0$ są pary liczb $(2;0)$, $(1;-1)$, $(\sqrt{2};-2+\sqrt{2})$ itp.

Podobnie **rozwiązaniem** nierówności $ax+by+c>0$ jest **każda para** (x_0, y_0) liczb rzeczywistych spełniających tę nierówność.

Na przykład:
- pary liczb $(0;0)$, $(1;1)$, $(1;3)$ są rozwiązaniami nierówności $2x-y+1\geqslant 0$;
- pary liczb $(1;-1)$, $\left(0;\frac{1}{2}\right)$, $(\sqrt{3};1)$ są rozwiązaniami nierówności $-\sqrt{3}\,x+2y-1\leqslant 0$.

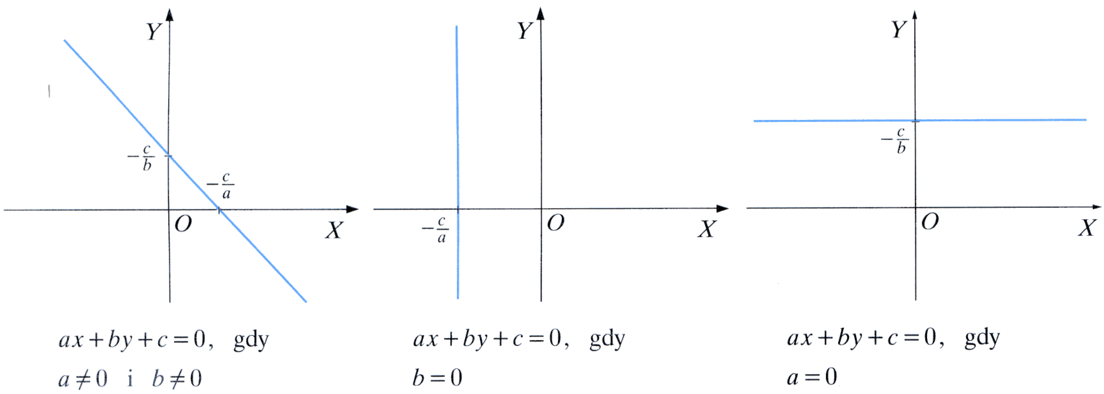
Wróćmy do równania $(*)$ $ax+by+c=0$.

Jeśli przyjmiemy w nim $b\neq 0$, to możemy wyznaczyć z niego y i zapisać $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$.
Otrzymane równanie, równoważne równaniu $(*)$, jest, jak wiemy, wzorem pewnej funkcji liniowej. Zatem zbiór punktów, których współrzędne spełniają to równanie, jest prostą.

Gdy zaś w równaniu (∗) założymy, że $b=0$, to przyjmie ono równoważną postać $x=-\frac{c}{a}$. Zbiór punktów, których współrzędne spełniają to równanie, jest także prostą. Jest to prosta prostopadła do osi OX i przecinająca ją w punkcie $\left(-\frac{c}{a}, 0\right)$.

Wreszcie, gdy w równaniu (∗) przyjmiemy $a=0$, to będzie miało ono postac $y=-\frac{c}{b}$, a punkty, których współrzędne spełniają to równanie, leżą na prostej równoległej do osi OX i przecinającej oś OY w punkcie $\left(0, -\frac{c}{b}\right)$.

Oto ilustracje graficzne powyższych przypadków.



Ryc. 7.13.

Zbiór wszystkich punktów płaszczyzny, których współrzędne spełniają równanie liniowe (nierówność liniową) z dwiema niewiadomymi, nazywamy **wykresem** albo **ilustracją graficzną** tego równania (tej nierówności).

Z przeprowadzonych rozważań wynika następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Wykresem równania liniowego z dwiema niewiadomymi jest linia prosta.

Aby zatem otrzymać wykres równania liniowego $ax+by+c=0$ wystarczy, znaleźć dwa rozwiązania tego równania. Wyznaczą one bowiem dwa punkty, przez które przechodzi żądana prosta.

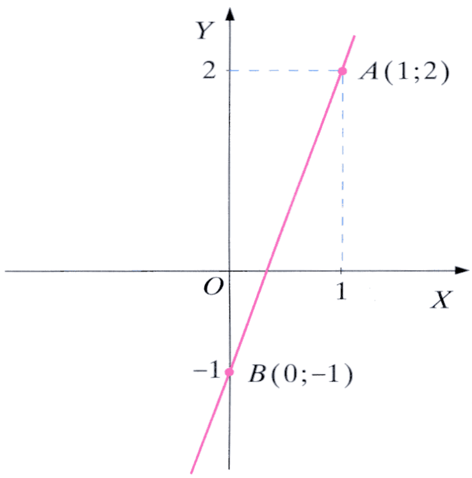
Przykład 1. Wykonaj wykres równania $-3x+y+1=0$.
Rozwiązanie:

Znajdujemy dwa różne rozwiązania tego równania. Są nimi na przykład pary: $(1,2)$ i $(0,-1)$. Przez punkty $A=(1,2)$ i $B=(0,-1)$ prowadzimy prostą i mamy żądany wykres (ryc. 7.14 na następnej stronie).

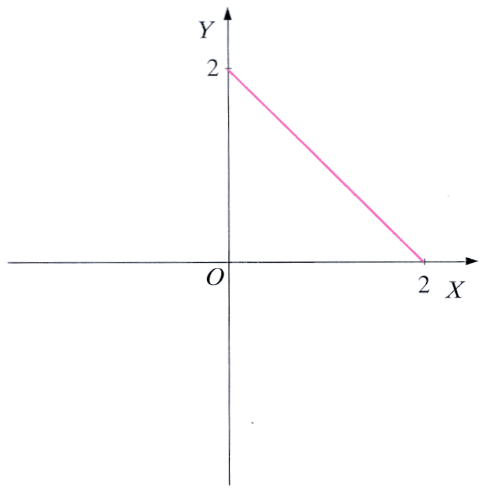
Przykład 2. Zilustruj graficznie równanie $|x|+|y|=2$.
Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeżeli para (a,b) jest rozwiązaniem danego równania, to również pary: $(-a,b)$, $(a,-b)$, $(-a,-b)$ są rozwiązaniami tego równania. Oznacza to, że jego wykres jest symetryczny względem osi układu współrzędnych. Wystarczy zatem najpierw narysować ten wykres, gdy $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, a następnie odbić go względem osi OX i OY.

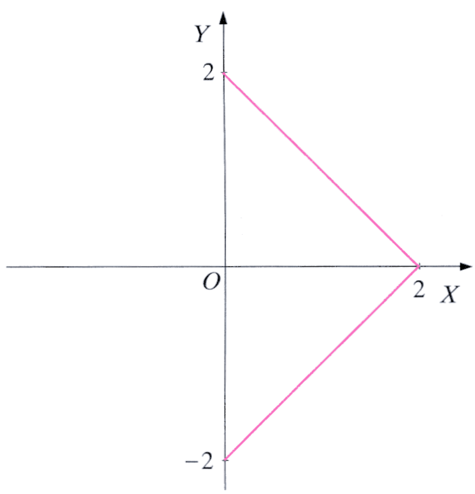
Jeśli $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, to równanie $|x|+|y|=2$ jest równoważne równaniu $x+y=2$. Rysujemy więc najpierw wykres tego równania, gdy $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$ (ryc. 7.15), następnie odbijamy go względem osi OX (ryc. 7.16) – a potem względem osi OY (ryc. 7.17) i wykres równania $|x|+|y|=2$ mamy gotowy.



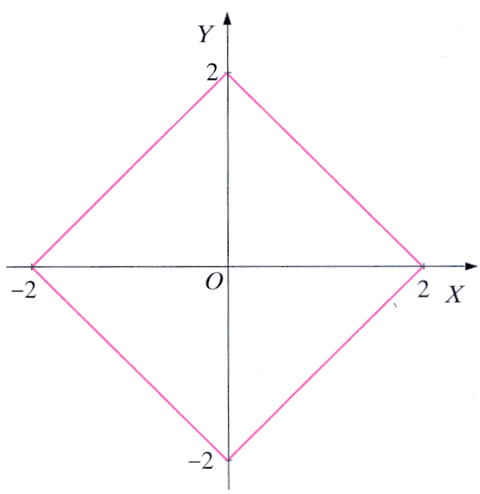
Ryc. 7.14.



Ryc. 7.15.



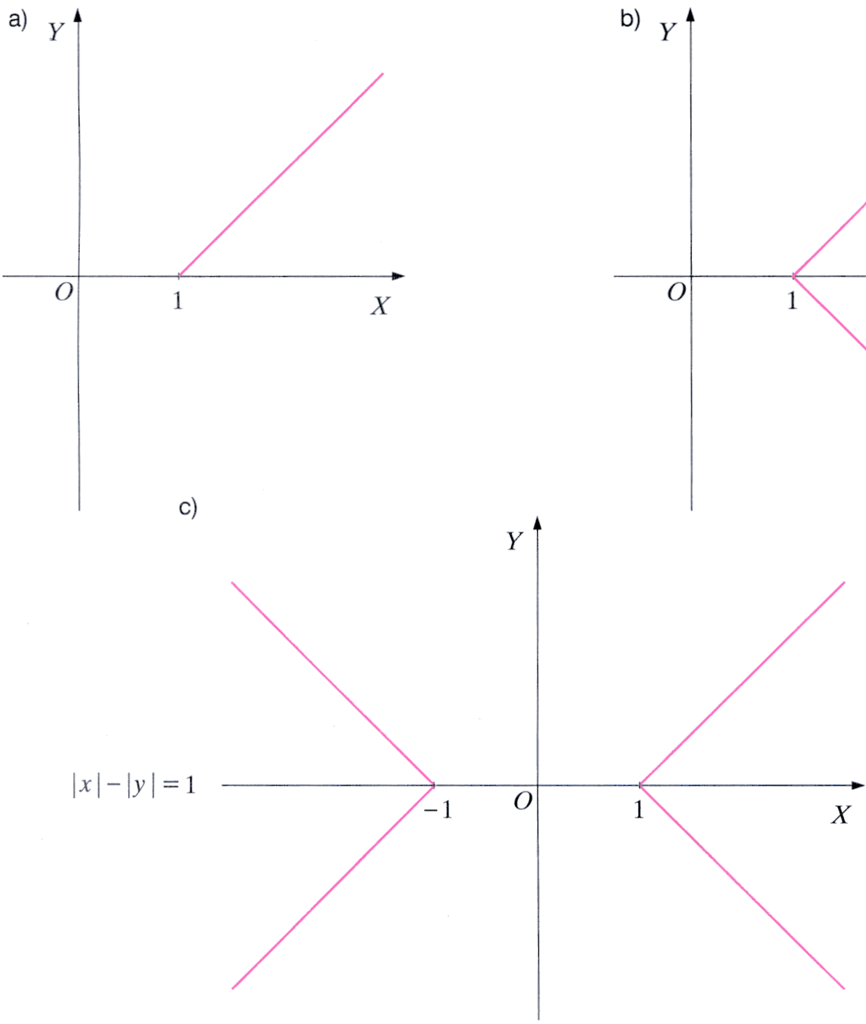
Ryc. 7.16.



Ryc. 7.17.

Przykład 3. Narysuj wykres równania $|x|-|y|=1$.
Rozwiązanie:

Postępujemy tutaj tak jak w poprzednim przykładzie. Rysujemy wykres tego równania, gdy $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$ (ryc. 7.18a), a następnie odbijamy go względem osi układu współrzędnych (ryc. 7.18 b, c).



Ryc. 7.18.

Wiemy już, że równanie $ax+by+c=0$, w którym co najmniej jedna z liczb a i b jest różna od zera, przedstawia pewną prostą.

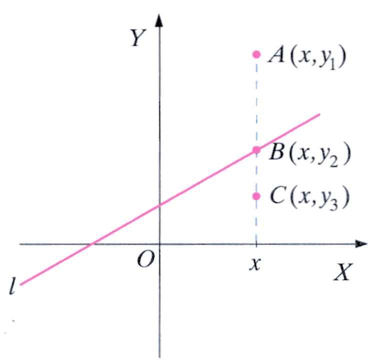
Powstaje pytanie o ilustrację geometryczną każdej z nierówności:

$ax+by+c>0$, $ax+by+c\geqslant 0$,

$ax+by+c<0$, $ax+by+c\leqslant 0$,

Rozpatrzmy prostą l będącą wykresem równania $ax+by+c=0$, w którym $b\neq 0$.

Prosta ta dzieli płaszczyznę XOY na dwie półpłaszczyzny. Obierzmy dowolnie trzy różne punkty A, B i C o tej samej odciętej, z których jeden (np. B) leży na prostej l, zaś A i C – po jej różnych stronach (ryc. 7.19).



Ryc. 7.19.

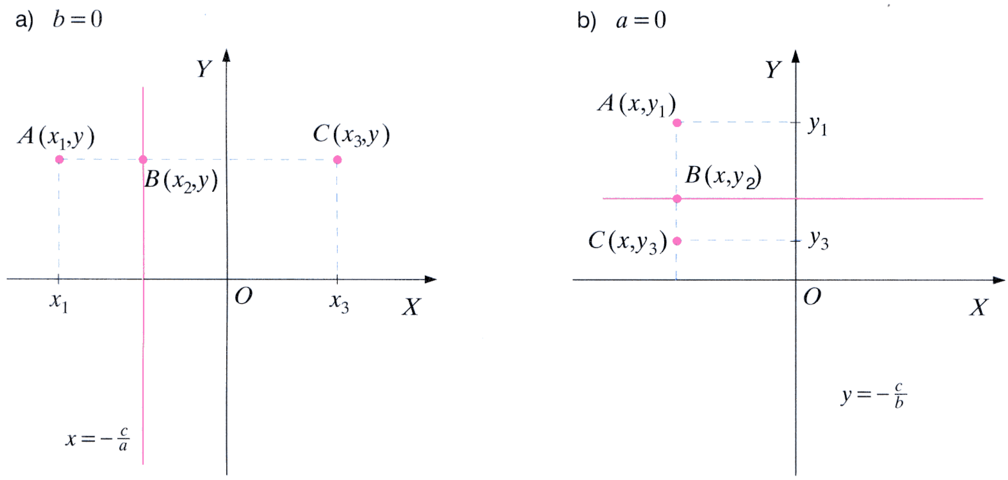
Widzimy, że rzędna y_1 punktu A leżącego powyżej prostej l jest większa, a rzędna y_3 punktu C, leżącego poniżej tej prostej, jest mniejsza niż rzędna punktu B leżącego na prostej l. Oczywiście rzędna punktu B jest równa $y_2=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a}$.

Zachodzą więc nierówności

$$y_1>-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a} \quad \text{i} \quad y_3<-\frac{a}{b}x-\frac{c}{a}.$$

Stwierdzamy więc, że współrzędne punktu A leżącego powyżej prostej o równaniu $ax+by+c=0$ spełniają nierówność $ax+by+c>0$, a współrzędne punktu C leżącego poniżej tej prostej – nierówność $ax+by+c<0$.

Popatrzmy teraz na wykres prostej l o równaniu $ax+by+c=0$.



Ryc. 7.20.

Widzimy (ryc. 7.20a), że współrzędne punktów leżących na lewo od prostej o równaniu $x=-\frac{c}{a}$ spełniają nierówność $x<-\frac{c}{a}$, a współrzędne punktów leżących na prawo od tej prostej – nierówność $x>-\frac{c}{a}$.

Podobnie stwierdzamy (rys. 7.20b), że współrzędne punktów leżących powyżej prostej o równaniu $y=-\frac{c}{b}$ spełniają nierówność $y>-\frac{c}{b}$, a współrzędne punktów leżących poniżej tej prostej – nierówność $y<-\frac{c}{b}$.

Udowodniliśmy więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Wykresem każdej z nierówności liniowych postaci

$ax+by+c>0$ albo $ax+by+c<0$

jest jedna z półpłaszczyzn ograniczonych prostą o równaniu $ax+by+c=0$, bez tej prostej.

Rzecz jasna, wykresem każdej z nierówności liniowych postaci

$$ax+by+c\geqslant 0 \quad \text{albo} \quad ax+by+c\leqslant 0$$

jest jedna z półpłaszczyzn ograniczonych prostą o równaniu $ax+by+c=0$, wraz z tą prostą. Aby stwierdzić, która z dwóch półpłaszczyzn jest wykresem danej nierówności, wystarczy sprawdzić, w której półpłaszczyźnie leży punkt o współrzędnych spełniających tę nierówność.

Przykład 4. Podaj ilustrację graficzną nierówności $2x-y-1 \leqslant 0$.

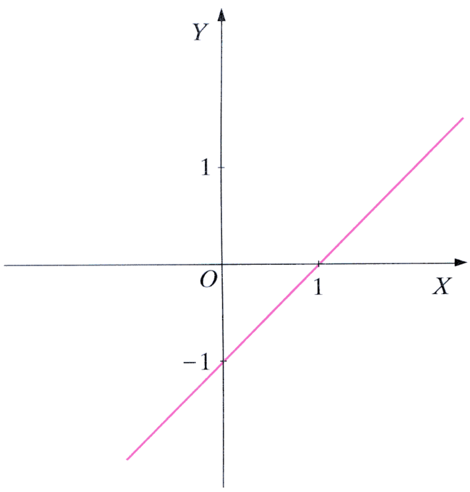
Rozwiązanie:

Dana nierówność jest równoważna nierówności $y \geqslant 2x-1$.

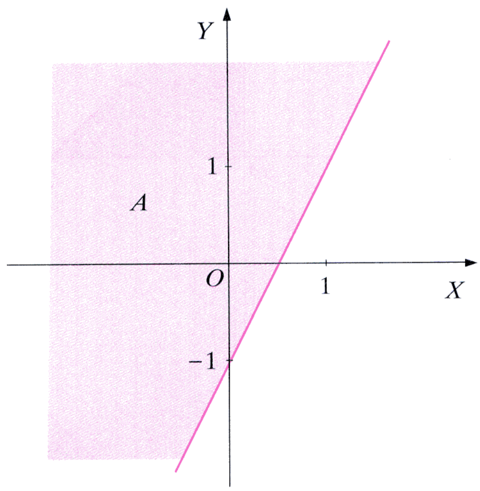
Sporządzamy najpierw wykres równania $y=2x-1$ (ryc. 7.21).

Punktami, których współrzędne spełniają nierówność $y > 2x-1$, są te, które leżą powyżej prostej o równaniu $y=2x-1$.

Zatem ilustracją geometryczną nierówności $2x-y-1 \leqslant 0$ jest zbiór A, który przedstawia rycina 7.22.



Ryc. 7.21.



Ryc. 7.22.

Przykład 5. Przedstaw ilustrację graficzną układu nierówności

$$\begin{cases} -x+y-1 \geqslant 0 \\ -2x-y+1 \geqslant 0. \end{cases}$$

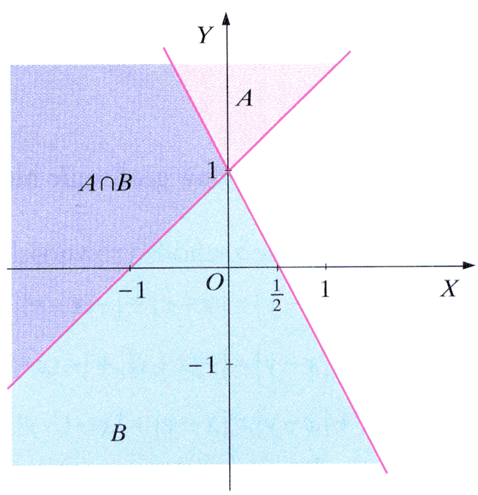
Rozwiązanie:

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} y \geqslant x+1 \\ y \leqslant -2x+1. \end{cases}$$

Sporządzamy najpierw wykresy równań $y=x+1$ i $y=-2x+1$, a następnie zakreślamy te półpłaszczyzny, które odpowiadają zbiorom A i B rozwiązań nierówności $y \geqslant x+1$ i $y \leqslant -2x+1$.

Część wspólna tych półpłaszczyzn stanowi ilustrację geometryczną danego układu.

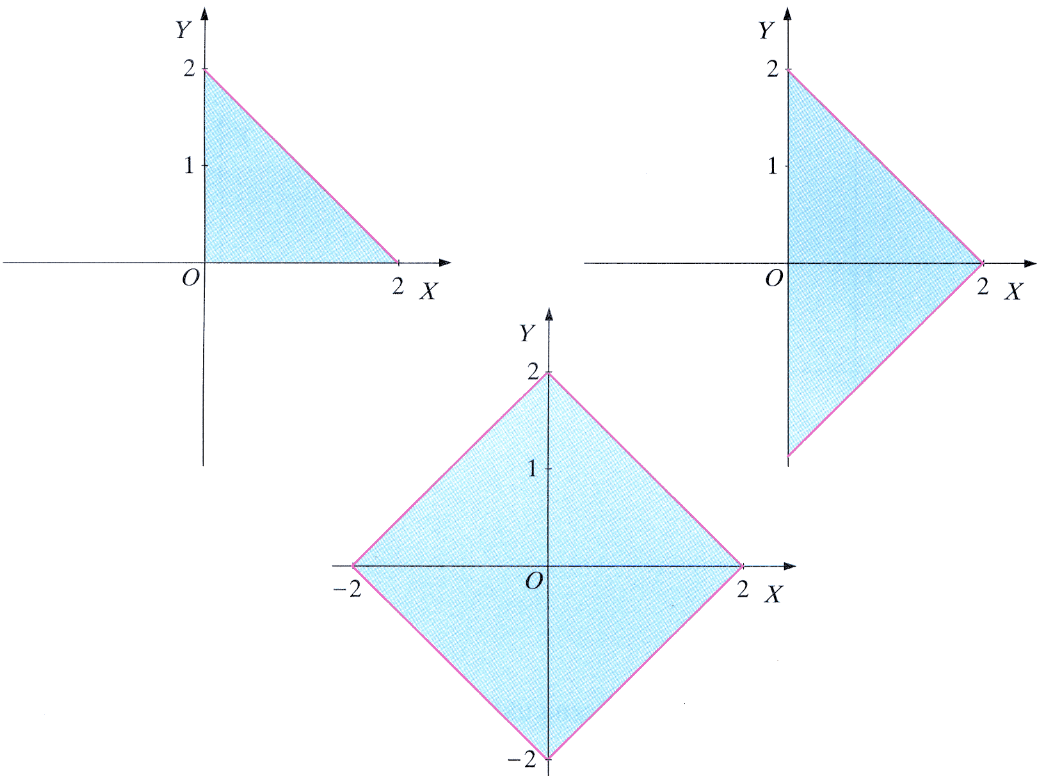


Ryc. 7.23.

Przykład 6*. Przedstaw ilustrację graficzną nierówności $|x|+|y| \leqslant 2$.
Rozwiązanie:

Zauważmy, że jeśli para (x,y) jest rozwiązaniem tej nierówności, to także pary $(-x,y)$, $(x,-y)$, $(-x,-y)$ są rozwiązaniami danej nierówności. Oznacza to, że poszukiwany zbiór punktów jest symetryczny względem osi układu współrzędnych. Przedstawiamy zatem graficznie tę nierówność w I ćwiartce układu XOY, to znaczy, gdy $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$, a następnie otrzymany zbiór punktów odbijamy symetrycznie względem osi OX i OY.

Nierówność $|x|+|y| \leqslant 2$, gdy $x \geqslant 0$ i $y \geqslant 0$ jest równoważna nierówności $x+y \leqslant 2$. Ryciny 7.24 ilustrują sposób otrzymania wykresu danej nierówności.



Ryc. 7.24.

Przykład 7*. Przedstaw graficznie nierówność $|x+y|+|x-y| \geqslant 4$.
Rozwiązanie:

Zauważmy, że zachodzą równości:

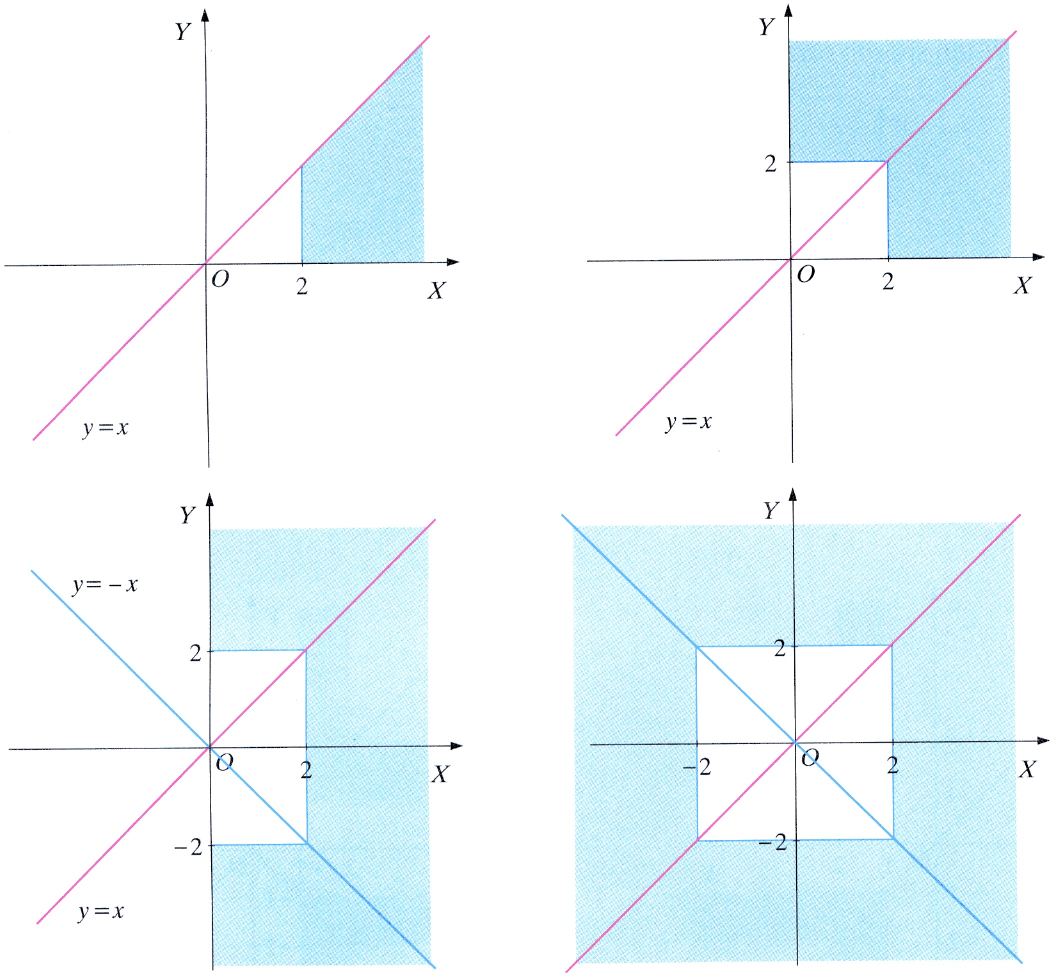
$$|x+y|+|x-y| = |y+x|+|-(x-y)| = |y+x|+|y-x|,$$

$$|x+y|+|x-y| = |-(x+y)|+|-(x-y)| = |-x-y|+|-x+y| = |-x+y|+|-x-y|,$$

$$|x+y|+|x-y| = |x-y|+|x-(-y)| = |x+(-y)|+|x-(-y)|,$$

które dowodzą, że jeśli para (x,y) jest rozwiązaniem danej nierówności, to są nimi także pary (y,x), $(-x,y)$, $(x,-y)$. To zaś oznacza, że wykres tej nierówności jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$ i osi układu współrzędnych. Wystarczy zatem przedstawić graficznie daną nierówność w I „ósemce" układu XOY, to znaczy, gdy $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ i $y \leqslant x$, a następnie otrzymany wykres odbić kolejno względem prostej $y=x$, osi OX i osi OY. Jeżeli $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ i $y \leqslant x$, to nierówność $|x+y|+|x-y| \geqslant 4$ jest równoważna kolejno nierównościom: $x+y+x-y \geqslant 4$, $2x \geqslant 4$, $x \geqslant 2$.

Ryciny 7.25 ilustrują sposób otrzymania wykresu danej nierówności.



Ryc. 7.25.

Przykład 8*. Przedstaw graficznie nierówność podwójną $2 \leqslant ||x+y|-|x-y|| \leqslant 4$.

Rozwiązanie:

Podobnie, jak w poprzednim przykładzie stwierdzamy, że jeśli para (x,y) jest rozwiązaniem danych nierówności, to ich rozwiązaniami są takie pary: (y,x), $(-x,y)$, $(x,-y)$. To zaś, jak wiemy, oznacza, że wykres danych nierówności jest symetryczny względem prostej o równaniu $y=x$ i osi OX i OY. Zatem najpierw wykreślamy dane nierówności w I „ósemce" układu XOY, czyli gdy $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ i $y \leqslant x$, a następnie otrzymany wykres odbijamy względem prostej o równaniu $y=x$ i osi OX i OY.

Jeśli $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $y \leqslant x$, to dana nierówność jest równoważna kolejno nierównościom:

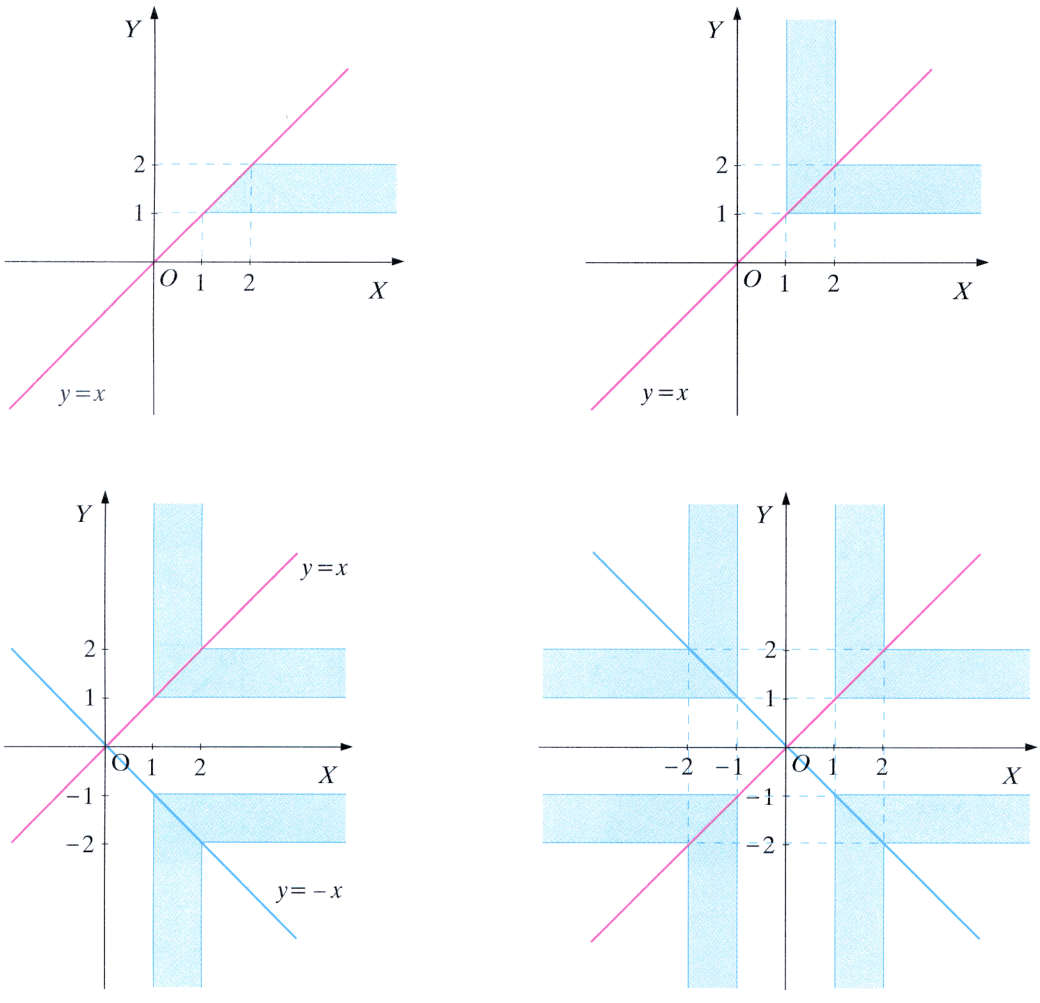
$2 \leqslant |x+y-(x-y)| \leqslant 4$,

$2 \leqslant |x+y-x+y| \leqslant 4$,

$2 \leqslant |2y| \leqslant 4$,

$1 \leqslant y \leqslant 2$.

W ten sposób otrzymujemy kolejno wykresy – ryc. 7.26.



Ryc. 7.26.

Pytania i zadania

1. Co to jest:
   a) równanie liniowe z dwiema niewiadomymi;
   b) nierówność liniowa z dwiema niewiadomymi?
2. Co jest rozwiązaniem równania lub nierówności z dwiema niewiadomymi?

3. Co jest wykresem:
   a) równania liniowego z dwiema niewiadomymi,
   b) nierówności liniowej z dwiema niewiadomymi?
4. Co jest ilustracją graficzną równania $ax+by+c=0$, gdy $a=b=0$?
5. Sporządź wykresy równań:
   a) $x-y+1=0$; b) $2x+y-4=0$; c) $x-2=0$; d) $y+1=0$.
6. Przedstaw graficznie nierówności:
   a) $x \geqslant y$; b) $x-2y+1<0$; c) $3x-y+2 \geqslant 0$; d) $x-1 \leqslant 0$; e) $y+2>0$.
7*. Przedstaw graficznie równania i nierówności:
   a) $|x|-|y| \leqslant 1$; b) $|x-1|+|y-1|=1$; c) $\frac{|x|}{x}=\frac{|y|}{y}$;
   d) $x+|x|=y+|y|$; e) $|x+y|+|x-y| \leqslant 2$; f) $\frac{x^2}{|x|}<\frac{y^2}{|y|}$.
8. Dane są punkty: $A=\left(0, \frac{5}{3}\right)$, $B=(5,0)$, $C=(0,4)$, $D=\left(\frac{8}{3}, 0\right)$. Proste AB i CD przecinają się w punkcie P. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne punktu P, aby należał on do czworokąta $ODPA$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych?

5. Układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi to inaczej koniunkcja tych równań.

Rozwiązaniem układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi nazywamy parę liczb spełniających oba równania układu.

Rozwiązać układ równań oznacza: znaleźć wszystkie jego rozwiązania albo wykazać, że układ ten nie ma rozwiązań.

Dwa układy równań nazywamy równoważnymi, gdy mają ten sam zbiór rozwiązań.

Układy dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi rozwiązywaliście już w gimnazjum. Stosowaliście trzy metody: **podstawiania**, **przeciwnych współczynników** i **graficzną**. Przypomnijmy je sobie teraz na konkretnych przykładach.

Przykład 1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=7. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

1. Metoda podstawiania

Wyznaczamy z któregokolwiek z równań jedną z niewiadomych i podstawiamy ją do drugiego równania. Otrzymujemy kolejno układy równoważne:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ y=-2x+7, \end{cases}$$

wyznaczyliśmy y z drugiego równania wyjściowego układu i podstawialiśmy do pierwszego równania

$$\begin{cases} x-2(-2x+7)=1 \\ y=-2x+7. \end{cases}$$

Rozwiązujemy pierwsze równanie, a drugie przepisujemy:

$$\begin{cases} x+4x-14=1 \\ y=-2x+7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x=15 \\ y=-2x+7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ y=-2\cdot 3+7. \end{cases}$$

Znalezione x podstawiliśmy do drugiego równania:

$$\begin{cases} x=3 \\ y=1. \end{cases}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem danego układu jest para liczb: $x=3$, $y=1$.

Powyższy zapis rozwiązywania układu **nie wymaga** sprawdzenia, że otrzymana para liczb spełnia dany układ równań. Przepisywane kolejne układy są bowiem sobie równoważne, co zapewnia następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli z jednego równania układu wyznaczymy jedną niewiadomą jako funkcję drugiej i otrzymane wyrażenie podstawimy do drugiego równania, to otrzymamy układ pierwszego równania i tak przekształconego drugiego równania równoważny danemu.

Zwykle jednak zapis rozwiązywania układu równań skracamy, nie przepisując za każdym razem równania, z którego wyznaczyliśmy jedną z niewiadomych. Rozwiązujemy równanie, w którym dokonaliśmy podstawienia, a następnie z otrzymanym rozwiązaniem wracamy do podstawienia i obliczamy wartość drugiej niewiadomej. W ten sposób otrzymujemy szukaną parę liczb. Tym razem jednak należy ją postawić do wyjściowego układu, aby stwierdzić, czy rzeczywiście go spełnia.

2. Metoda przeciwnych współczynników (zwana też dodawaniem stronami)

Obie strony drugiego równania mnożymy przez 2

$$\begin{cases} x-2y=1 & \\ 2x+y=7 & \Big|\cdot 2. \end{cases}$$

Otrzymujemy nowy układ równań, w którym współczynniki przy y są liczbami przeciwnymi:

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 4x+2y=14. \end{cases}$$

Równania te dodajemy stronami:

$x - 2y + 4x + 2y = 1 + 14.$

Otrzymujemy równanie z jedną niewiadomą x:

$5x = 15.$

$x = 3.$

$$\begin{cases} x = 3 \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Układ tego równania i jednego z równań poprzedniego układu jest równoważny danemu.

Jego rozwiązanie jest rozwiązaniem danego układu:

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 - 2 \cdot 3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3 \\ y = 1. \end{cases}$$

Metoda ta oparta jest na twierdzeniach o równaniach równoważnych i na następującym twierdzeniu:

Twierdzenie

Jeżeli obie strony każdego z równań (lub jednego z nich) danego układu pomnożymy przez dowolne liczby różne od zera, a następnie równania te dodamy stronami i tak otrzymanym równaniem zastąpimy jedno z równań układu, to otrzymamy układ równań równoważny danemu.

3. Metoda graficzna

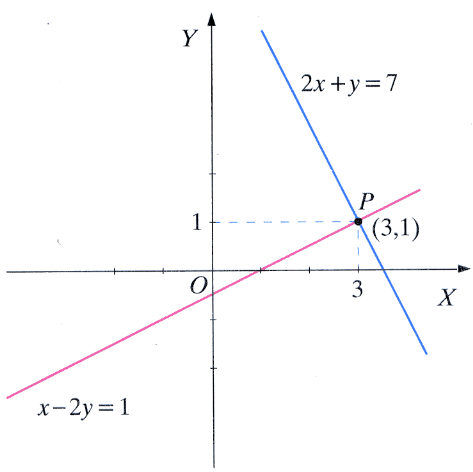
Sporządzamy wykresy (ryc. 7.27) równań układu:

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Są nimi proste, które przecinają się w punkcie $P = (3, 1)$. Para jego współrzędnych stanowi rozwiązanie układu.

Rozwiązaliśmy układ równań, który ma jedno rozwiązanie. Interpretacją geometryczną tego układu jest para przecinających się prostych.

Taki układ równań nazywamy **układem oznaczonym** albo **układem równań niezależnych**.



Ryc. 7.27.

Przykład 2. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ -4x + 8y = 4. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

1. Metoda podstawiania

Układ ten jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ -4x + 8y = 4. \end{cases}$$

Wyznaczyliśmy x z pierwszego równania,

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ -4(2y - 1) + 8y = 4. \end{cases}$$

Dokonaliśmy podstawienia w drugim równaniu.

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ -8y + 4 + 8y = 4, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ 0 \cdot y = 0. \end{cases}$$

Widzimy, że drugie równanie układu ma nieskończenie wiele rozwiązań; zachodzi dla dowolnej pary liczb, jest więc tożsamościowe. Zatem układ ten spełnia każda para liczb, dla której zachodzi jego pierwsze równanie.

2. Metoda przeciwnych współczynników

Pomnóżmy pierwsze równanie układu przez 4 i dodajmy je do drugiego równania; otrzymujemy układ

$$\begin{cases} x - 2y = -1 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}$$ równoważny danemu.

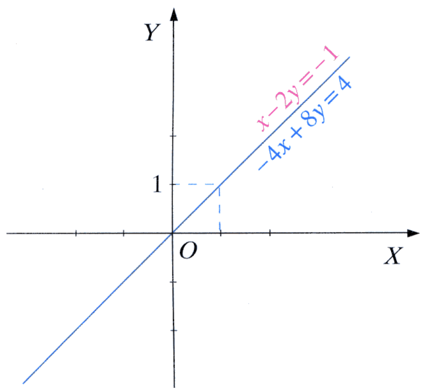
Układ ten spełnia każda para liczb stanowiąca rozwiązanie pierwszego z równań, gdyż drugie zachodzi dla dowolnej pary liczb. Tak więc ma on nieskończenie wiele rozwiązań.

3. Metoda graficzna

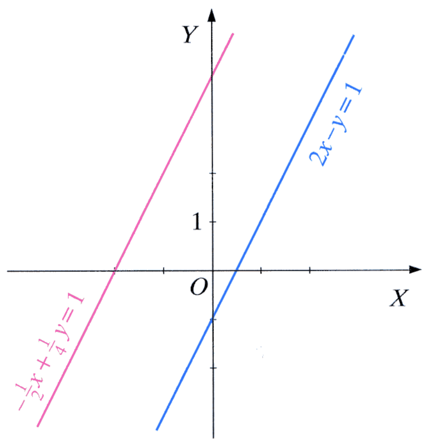
Wyznaczymy z każdego równania danego układu y i otrzymamy układ

$$\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \end{cases}$$ równoważny, oczywiście, danemu.

Wykresem obu tych równań jest ta sama prosta (ryc. 7.28). Każdy punkt wykresu jednego z równań tego układu należy do wykresu drugiego. Układ ten ma zatem nieskończenie wiele rozwiązań; spełnia go każda para liczb będąca rozwiązaniem któregokolwiek jego równania. Taki układ równań nazywamy **układem nieoznaczonym** albo **układem równań zależnych**.



Ryc. 7.28.



Ryc. 7.29.

Przykład 3. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$$

(sprawdź!).

Zauważmy teraz, że współczynniki kierunkowe tych równań są równe, a wyrazy wolne – różne (równania te są wzorami funkcji liniowych). Zatem wykresami tych równań są proste równoległe i rozłączne (ryc. 7.29). Nie mają więc punktu wspólnego, co dowodzi, że dany układ równań nie ma rozwiązania.

Wniosek, do którego doszliśmy metodą graficzną, można także otrzymać którąkolwiek z metod rachunkowych. Gdybyśmy mianowicie pomnożyli obie strony drugiego równania naszego układu przez (-4), to otrzymalibyśmy układ

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x - y = -4, \end{cases}$$

równoważny danemu.

Czyż nie widać teraz, i to gołym okiem, że układ ten nie może mieć rozwiązań? Taki układ równań nazywamy **układem sprzecznym**.

Przejdźmy teraz do ogólnego przypadku. Czy dowolny układ dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi może mieć inną interpretację geometryczną niż któraś z rozważanych przed chwilą? Oczywiście, że nie!

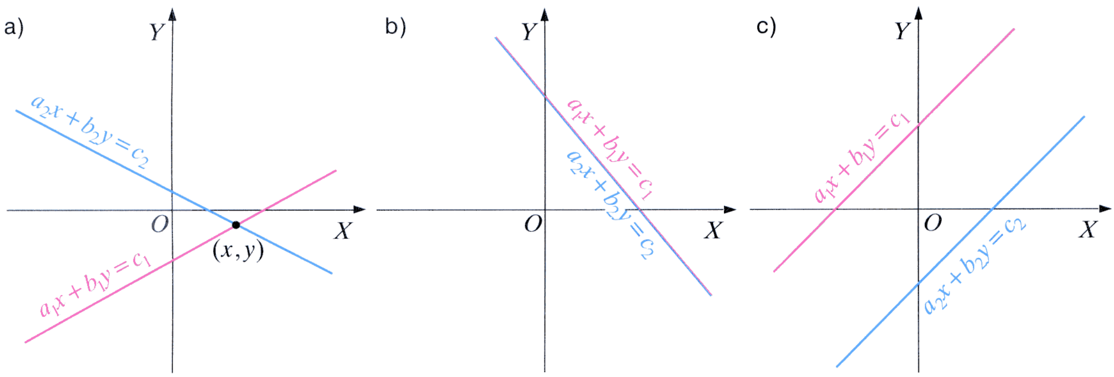
Przecież wykresem każdego takiego układu jest para prostych, a każde dwie proste na płaszczyźnie albo się przecinają, albo są do siebie równoległe (w szczególnym wypadku się pokrywają). Wobec tego możemy sformułować następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Ilustrację geometryczną dowolnego układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi mogą stanowić:

1. Para prostych przecinających się – układ taki ma tylko jedno rozwiązanie, którym jest para współrzędnych punktu przecięcia tych prostych. Jest to **układ oznaczony** albo **układ równań niezależnych**.
2. Para prostych pokrywających się – układ taki ma nieskończenie wiele rozwiązań, którymi są pary współrzędnych każdego punktu tych prostych. Jest to **układ nieoznaczony** albo **układ równań zależnych**.
3. Para prostych rozłącznych – układ taki nie ma rozwiązań i nazywa się **układem sprzecznym**.

Rycina 7.30 ilustruje te trzy układy.



Ryc. 7.30.

Dyskusja układu dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Każdy taki układ ma postać

$$(*)\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & (1)\\ a_2x+b_2y=c_2, & (2)\end{cases}$$

gdzie co najmniej jeden ze współczynników a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 jest różny od zera.

1. Jeśli któryś ze współczynników a_1 i b_1 oraz a_2 i b_2 jest zerem, to przynajmniej jedno z równań układu $(*)$ staje się równaniem z jedną niewiadomą. Wówczas bezpośrednio stosujemy metodę podstawiania. Równanie to:
   a) albo ma tylko jedno rozwiązanie, wtedy układ $(*)$ ma jedno rozwiązanie i jest układem oznaczonym;
   b) albo ma nieskończenie wiele rozwiązań, wtedy układ $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań i jest układem nieoznaczonym;
   c) albo jest sprzeczne, wtedy układ $(*)$ nie ma rozwiązań i jest układem sprzecznym.
2. Załóżmy, że wszystkie współczynniki a_1, b_1, a_2, b_2 są różne od zera.

Mnożymy obie strony równania (1) przez b_2, a równania (2) przez $-b_1$ i otrzymane równania dodajemy stronami:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \cdot b_2 \\ a_2x+b_2y=c_2 & \cdot(-b_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1b_2x+b_1b_2y=c_1b_2 \\ -a_2b_1x-b_1b_2y=c_2b_1. \end{cases}$$

Otrzymujemy równanie

(3) $(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1.$

Mnożymy obie strony równania (1) przez $-a_2$, a równania (2) przez a_1 i otrzymane równania dodajemy stronami:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 & \cdot(-a_2) \\ a_2x+b_2y=c_2 & \cdot a_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} -a_1a_2x-a_2b_1y=-a_2c_1 \\ a_1a_2x+a_1b_2y=a_1c_2 \end{cases}.$$

Otrzymujemy równanie

(4) $(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1.$

Układ równań (3) i (4), czyli układ

$$(**)\begin{cases} (a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \\ (a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \end{cases}$$

jest równoważny układowi $(*)$ (na mocy twierdzeń o równaniach równoważnych i układach równań równoważnych).

Wyrażenie $W=a_1b_2-a_2b_1$ nazywamy wyznacznikiem układu i zapisujemy w postaci

$$W=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Podobnie zapisujemy:

$$W_x=c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ oraz } W_y=a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Układowi $(**)$ możemy teraz nadać dogodniejszą postać, a mianowicie

$$(***)\begin{cases} W\cdot x=W_x \\ W\cdot y=W_y. \end{cases}$$

I widzimy teraz, że:

1. Jeśli $W\neq 0$, to układ $(*)$ ma jedno rozwiązanie określone wzorami:
   $$\begin{cases} x=\dfrac{W_x}{W} \\ y=\dfrac{W_y}{W} \end{cases}$$
   i jest układem oznaczonym.
2. Jeśli $W=0$ i ($W_x\neq 0$ lub $W_y\neq 0$), to co najmniej jedno z równań układu $(***)$ jest sprzeczne. Zatem układ $(*)$ nie ma rozwiązań i jest układem sprzecznym.
3. Jeśli $W=0$ i $W_x=0$ i $W_y=0$, to równania układu $(***)$ są tożsamościowe. Układ $(***)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Zatem również układ $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań i jest układem nieoznaczonym.

Przykład 4. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 4x - y = 5 \\ 10x - 2y = 11. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$W = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) - (-1) \cdot 10 = 2 \neq 0,$$

więc układ ten jest oznaczony.

Obliczamy:

$$W_x = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 11 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-2) - (-1) \cdot 11 = 1,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 10 & 11 \end{vmatrix} = 4 \cdot 11 - 5 \cdot 10 = -6.$$

Zatem

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{1}{2}, \quad y = \frac{W_y}{W} = \frac{-6}{2} = -3.$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem układu jest para $\left(\frac{1}{2}, -3\right)$.

Przykład 5. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ -x + y = -1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Ponieważ

$$W = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 0 \text{ oraz } W_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) = 2 \neq 0,$$

więc dany układ jest sprzeczny.

Przykład 6. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}\,x - \sqrt{3}\,y = 4\sqrt{3} \\ 0{,}5x - 0{,}25y = 1. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Obliczamy:

$$W = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 0{,}5 & -0{,}25 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3} \cdot (-0{,}25) - \left(-\sqrt{3}\right) \cdot 0{,}5 = -0{,}5 \cdot \sqrt{3} + 0{,}5 \cdot \sqrt{3} = 0,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} 4\sqrt{3} & -\sqrt{3} \\ 1 & -0{,}25 \end{vmatrix} = 4\sqrt{3} \cdot (-0{,}25) - (-\sqrt{3}) \cdot 1 = -\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 2\sqrt{3} & 4\sqrt{3} \\ 0{,}5 & 1 \end{vmatrix} = 2\sqrt{3}\cdot 1 - 4\sqrt{3}\cdot 0{,}5 = 2\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0.$$

Zatem układ ten jest nieoznaczony; ma nieskończenie wiele rozwiązań.

Przykład 7. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} x + y = m \\ mx - y = 2. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Obliczamy:

$$W = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ m & -1 \end{vmatrix} = -(m+1),$$

$$W_x = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(m+2),$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & m \\ m & 2 \end{vmatrix} = 2 - m^2.$$

I widzimy, że:

1. Gdy $m \neq -1$, to układ ten ma jedno rozwiązanie; jest nim para

$$\left(\frac{m+2}{m+1}, \frac{m^2-2}{m+1}\right).$$

2. Gdy $m = -1$, to $W = 0$, zaś $W_x = -1 \neq 0$, więc układ ten jest sprzeczny.

Przykład 8. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} (a-2)x - 2y = -a \\ 2x + (a+2)y = a. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Obliczamy:

$$W = \begin{vmatrix} a-2 & -2 \\ 2 & a+2 \end{vmatrix} = (a-2)(a+2) + 4 = a^2,$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -a & -2 \\ a & a+2 \end{vmatrix} = -a(a+2) + 2a = -a^2,$$

$$W_y = \begin{vmatrix} a-2 & -a \\ 2 & a \end{vmatrix} = (a-2)a + 2a = a^2.$$

Zatem:

1. Jeśli $a \neq 0$, to układ ten ma jedno rozwiązanie; jest nim para $(-1, 1)$.
2. Jeśli $a = 0$, to układ ten jest nieoznaczony, gdyż $W = W_x = W_y = 0$.

Przykład 9. Rozwiąż układ równań

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ |x-1|-y=-5. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1 \\ |x-1|=y-5. \end{cases}$$

Z drugiego równania tego układu wynika, że musi być $y \geqslant 5$ (dlaczego?).
Wobec tego układ ten jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} |x-1|+y-5=1 \\ |x-1|=y-5. \end{cases}$$

Podstawiamy do pierwszego równania $|x-1|$ w miejsce $y-5$, a z drugiego wyznaczamy y i otrzymujemy dalej układy:

$$\begin{cases} 2|x-1|=1 \\ y=5+|x-1|, \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x-1|=\frac{1}{2} \\ y=\frac{11}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x-1=\frac{1}{2} \\ y=\frac{11}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{11}{2} \end{cases} \quad \text{lub} \quad \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{11}{2}. \end{cases}$$

Odpowiedź: Rozwiązaniem danego układu są pary: $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$ i $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

Pytania i zadania

1. Co to jest układ dwóch równań liniowych i co jest jego rozwiązaniem?
2. Co oznacza: rozwiązać układ równań?
3. Jakie dwa układy równań nazywamy równoważnymi?
4. Sformułuj twierdzenia o układach równań równoważnych.
5. Jakie znasz metody rozwiązywania układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi?
6. Rozwiąż w pamięci układy równań:

a) $\begin{cases} x=2 \\ x+y=3; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=7 \\ y=-1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x=7 \\ x-y=-1; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x+2y=8 \\ 2y=6; \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x=4 \\ 2x+y=7; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 3x-y=12 \\ 3x=15. \end{cases}$

7. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x-y=8 \\ x+2y=23; \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+y=15 \\ 2x-y=3; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 3x-2y=13 \\ 2x-3y=8; \end{cases}$

d) $\begin{cases} x+y-7=0 \\ x-y+1=0; \end{cases}$ e) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+y-2=0 \\ x+\frac{2}{3}y+2=0; \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2y+x=y-2x+5 \\ y-2x=x-2y-9; \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2(x+y)+4=2x-y+13 \\ 2(x-1)+5=2(y+1)-9; \end{cases}$ h) $\begin{cases} 1-\frac{1}{2}(x+y)=3(x-y)+1 \\ 2(x+y+1)=5(x+y)+2. \end{cases}$

8. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}+1=\dfrac{x-y}{4} \\ x+y=2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} \dfrac{2x-y}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3y+2x}{2}+8 \\ 2x-y=11; \end{cases}$

c) $\begin{cases} 1-\dfrac{x-2y}{3}+1=x-\dfrac{y}{2}+\dfrac{1}{6} \\ 2x-3y=5; \end{cases}$ d) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{2}-\dfrac{x-y}{2}+x=\dfrac{2x-1}{4}-\dfrac{2y+1}{6}-3\dfrac{7}{12} \\ 2x+3y=-8. \end{cases}$

9. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} \dfrac{5(x+2y)}{3}-\dfrac{3(2x-y)}{2}+\dfrac{x+y+1}{6}=2\left(x-y+\dfrac{1}{12}\right) \\ 4(x-2y-1)+\dfrac{x+y+4}{2}=y-2; \end{cases}$

b) $\begin{cases} (x+y)(x-1)-2(y-2)(x+3)=x(x-y) \\ 2x-3y=2; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x^2+y^2=(x+1)^2+(y+1)^2 \\ x^2+y^2=(x-1)^2+(y-1)^2. \end{cases}$

10. Wpisz w wolne miejsce takie równanie liniowe z dwiema niewiadomymi, aby otrzymany układ był: a) oznaczony, b) nieoznaczony, c) sprzeczny:

a) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ \dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ \dots\dots\dots\dots ; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ \dots\dots\dots\dots . \end{cases}$

11. Przeprowadź dyskusję układów równań:

a) $\begin{cases} x-y=2 \\ y=x+m; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x+my=2m; \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+my=1 \\ mx+y=m^2. \end{cases}$

12. Dla jakich wartości parametru k wykresy równań $2x-y+k-5=0$ i $3x-y-2k+1=0$ przecinają się wewnątrz kwadratu $ABCD$, gdzie $A(0,0)$, $B(0,3)$, $C(3,3)$, $D(3,0)$?

13. Dla jakich a i b wykresy równań $y=ax+3b$ i $y=3ax+5b$ przecinają się w punkcie $A(-1,2)$?

14. Dla jakich m i n punkty $A(3m-2n, -4m-2n)$ i $B(m-n, 3m+2n)$ należą do wykresu funkcji $y=-2x+10$?

15. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} |x+1|+|y-1|=5 \\ |x+1|=4y-4; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-y|=|x-y+1| \\ |y|=1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ |x+y|=1. \end{cases}$

6. Zadania prowadzące do układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi

Podrozdział ten w całości poświęcimy zadaniom tekstowym prowadzącym do układów dwóch równań liniowych z dwiema niewiadomymi. Niektóre z nich rozwiązywaliśmy już wcześniej, opierając się na układanych do nich równaniach liniowych z jedną niewiadomą.

Przykład 1. Dzieląc pewną liczbę naturalną przez drugą liczbę naturalną, otrzymujemy iloraz 22 i resztę 27. Jeżeli dzielną zwiększymy o 39, to otrzymamy iloraz 24 bez reszty. Co to za liczby?
Rozwiązanie:

Oznaczmy dzielną przez x, a drugą liczbę – przez y. Z treści zadania wynika układ równań:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 22 + \frac{27}{y} \\ \frac{x+39}{y} = 24. \end{cases}$$

Otrzymany układ równań jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} x = 22y + 27 \\ x + 39 = 24y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 22y + 27 \\ 22y + 27 + 39 = 24y, \end{cases} \quad \begin{cases} x = 22y + 27 \\ 2y = 66, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 22 \cdot 33 + 27 = 6 \cdot 121 + 27 = 726 + 27 = 753 \\ y = 33. \end{cases}$$

Zatem szukane liczby to: $x = 753$ i $y = 33$.

Przykład 2. Za 2 kg jabłek i 3 kg gruszek zapłacono 69 zł. Gdyby kupiono 3 kg jabłek i 2 kg gruszek, zapłacono by 66 zł. Jaka była cena jabłek, a jaka gruszek?
Rozwiązanie:

Niech x oznacza cenę jabłek, a y – cenę gruszek. Wówczas otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} 2x + 3y = 69 \\ 3x + 2y = 66, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para

$$\begin{cases} x = 12 \\ y = 15. \end{cases}$$

Odpowiedź: Cena 1 kg jabłek to 12 zł, a gruszek – to 15 zł.

Przykład 3. Statek porusza się z prądem rzeki z prędkością 18 km/h, a pod prąd – z prędkością 14 km/h. Oblicz prędkość własną statku i prędkość prądu rzeki.
Rozwiązanie:

Jeżeli przez x oznaczymy prędkość własną statku, a przez y – prędkość prądu rzeki, to otrzymamy układ równań.

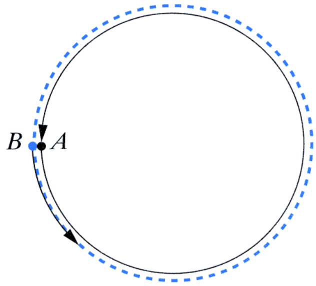
$$\begin{cases} x + y = 18 \\ x - y = 14, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para:

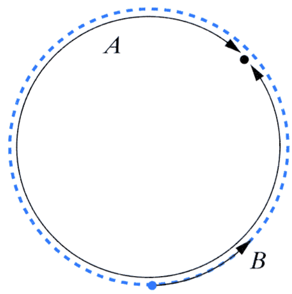
$$\begin{cases} x = 16 \\ y = 2. \end{cases}$$

Odpowiedź: Prędkość własna statku wynosi 16 km/h, a prędkość prądu rzeki 2 km/h.

Przykład 4. Po okręgu o długości 80 cm poruszają się dwa punkty A i B. Jeżeli kierunki ruchu tych punktów są zgodne, to punkt A wyprzedza punkt B co 5 sekund; jeżeli zaś kierunki ich ruchu są przeciwne, to punkty te mijają się co 2 sekundy. Oblicz prędkości tych punktów.



Ryc. 7.31.



Ryc. 7.32.

Rozwiązanie:

Oznaczmy prędkości punktów A i B odpowiednio przez x i y.

Aby punkt A mógł w ciągu 5 sekund wyprzedzić punkt B, musi pokonać w tym czasie drogę równą sumie długości całego okręgu i drogi punktu B w tym czasie (ryc. 7.31). Stąd otrzymujemy równanie

$$5x = 80 + 5y.$$

Skoro punkty A i B mijają się co 2 sekundy, to drogi, jakie te punkty pokonują w tym czasie, muszą się sumować do długości całego okręgu (ryc. 7.32). I wobec tego mamy kolejne równanie

$$2x + 2y = 80.$$

Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} 5x = 80 + 54 \\ 2x + 2y = 80, \end{cases}$$

otrzymujemy:

$$\begin{cases} x = 28 \\ y = 12. \end{cases}$$

Odpowiedź: Punkt A porusza się z prędkością 28 cm/s, a punkt B z prędkością 12 cm/s.

Przykład 5. Aleksander Wielki zmarł w kwiecie wieku. Gdyby żył o 5 lat krócej, to panowałby $\frac{1}{4}$ swego życia. Gdyby zaś żył o 9 lat dłużej, to panowałby $\frac{1}{2}$ swego życia. Ile lat żył, a ile panował Aleksander Wielki?

Rozwiązanie:

Niech x i y oznaczają odpowiednio lata życia i lata panowania Aleksandra Wielkiego. Gdyby żył on o 5 lat krócej, to także o te 5 lat krócej panowałby, a więc gdyby żył $x - 5$ lat, to panowałby $y - 5$ lat. Podobnie gdyby żył $x + 9$ lat, to panowałby $y + 9$ lat.

Z treści zadania wynika więc układ równań:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(x - 5) = y - 5 \\ \frac{1}{2}(x + 9) = y + 9, \end{cases}$$

który jest równoważny kolejno układom:

$$\begin{cases} x-5=4y-20 \\ x+9=2y+18, \end{cases} \quad \begin{cases} x-4y=-15 \\ x-2y=9. \end{cases} \quad \text{Stąd} \quad \begin{cases} x=33 \\ y=12. \end{cases}$$

Odpowiedź: Aleksander Wielki żył 33 lata, a panował 12 lat.

Przykład 6. W pewnej grupie uczniów średnia wieku wynosi 11 lat. Najstarszy z nich ma 17 lat, a średnia wieku wszystkich pozostałych wynosi 10 lat. Ilu uczniów liczy ta grupa?
Rozwiązanie:

Oznaczmy liczbę uczniów w tej grupie przez x, a przez y – sumę ich lat. Z treści zadania wynika układ równań:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{x}=11 \\ \dfrac{y-17}{x-1}=10. \end{cases}$$

Rozwiązując go, otrzymujemy kolejno:

$$\begin{cases} y=11x \\ y-17=10(x-1), \end{cases} \quad \begin{cases} 10(x-1)=11x-17 \\ y=11x, \end{cases} \quad \begin{cases} x=7 \\ y=77. \end{cases}$$

I sprawdzamy, że istotnie

$$\frac{77}{7}=11, \quad \frac{77-17}{7-1}=\frac{60}{6}=10.$$

Odpowiedź: Grupa ta liczy 7 uczniów.

Przykład 7*. Pięć lat temu Jaś był dwa razy starszy od Małgosi. Obecnie ma on trzy razy tyle lat, ile miała Małgosia wtedy, gdy on miał tyle, ile ma Małgosia teraz. Ile lat mają razem?
Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że Jaś ma obecnie x lat, a Małgosia – y. Wobec tego 5 lat temu mieli oni odpowiednio $x-5$ i $y-5$ lat. Od momentu, kiedy Jaś miał y lat (a więc tyle, ile Małgosia teraz), upłynęło $x-y$ lat. Wtedy oczywiście Małgosia miała o $x-y$ lat mniej, czyli $y-(x-y)=2y-x$. Z treści zadania wynika układ równań

$$\begin{cases} x-5=2(y-5) \\ x=3(2y-x), \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para:

$$\begin{cases} x=15 \\ y=10. \end{cases}$$

Odpowiedź: Jaś i Małgosia mają razem 25 lat.

Przykład 8*. Wędkarz złowił „taaaką" rybę: „Ogon ważył 6 razy mniej niż głowa z tułowiem. Gdyby tułów był o 6 kg cięższy, to głowa z tułowiem ważyłaby 10 razy więcej niż ogon. Różnica wag tułowia i głowy była 3,5 razy większa niż waga ogona". Ile ważyła ta ryba?

Rozwiązanie:

Przyjmijmy oznaczenia: x – waga głowy, y – waga tułowia, z – waga ogona.

Ogon ważył 6 razy mniej niż głowa z tułowiem, wiec $6z = x + y$.

Gdyby tułów był o 6 kg cięższy, to głowa z tułowiem ważyłaby 10 razy więcej niż ogon, zatem $x + (y + 6) = 10z$.

Z ostatniego zdania opisu tej ryby otrzymujemy równanie $y - x = 3{,}5z$.

Należy więc rozwiązać układ równań:

$$(*)\begin{cases} 6z = x + y \\ 10z = x + (y + 6) \\ 3{,}5z = y - x. \end{cases}$$

Odejmując od drugiego równania tego układu $(*)$ pierwsze, otrzymujemy $4z = 6$ czyli $z = \frac{2}{3}$.

Podstawiając tę wartość do pierwszego i ostatniego równania układu $(*)$, otrzymujemy równania:

$$x + y = 9,$$
$$-x + y = \frac{21}{4}.$$

Rozwiązaniem układu tych równań jest para

$$\begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = \frac{57}{8}, \end{cases}$$

Ostatecznie więc:

$$x = \frac{15}{8},\ y = \frac{57}{8},\ z = \frac{3}{2}.$$

I sprawdzamy, że rzeczywiście:

$$6z = 9 = \frac{15}{8} + \frac{57}{8},$$

$$10z = 15 = \frac{15}{8} + \frac{57}{8} + 6,$$

$$3{,}5z = \frac{21}{4} = \frac{57}{8} - \frac{15}{8}.$$

Zatem otrzymana trójka liczb

$$\begin{cases} x = \frac{15}{8} \\ y = \frac{57}{8} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

stanowi rozwiązanie układu $(*)$.

Wobec tego

$$x + y + z = \frac{15}{8} + \frac{57}{8} + \frac{12}{8} = \frac{84}{8} = \frac{21}{2} = 10{,}5.$$

Odpowiedź: Ryba ta ważyła 10,5 kg – rzeczywiście „taaaka” ryba!

Pytania i zadania

1. Przewieziono 44 t towaru 9 samochodami o ładowności po 6 t i po 4 t. Ile było samochodów większych, a ile mniejszych, jeżeli ładowność każdego była całkowicie wykorzystana?
2. Gdyby turysta powiększył swoją prędkość o pewną liczbę kilometrów na godzinę, to drogę 24 km przebyłby w ciągu 6 godzin; gdyby zaś prędkość o tę samą liczbę zmniejszył, to ową drogę przeszedłby w ciągu 8 godzin. Z jaką prędkością idzie turysta?
3. 5% jednej liczby i 4% drugiej stanowi razem 46, a 4% pierwszej i 5% drugiej daje w sumie 44. Jakie to liczby?
4. Jeżeli do stopu złota ze srebrem dodamy 10 g czystego złota, to stosunek masy złota do masy srebra będzie wynosił 7: 3; jeśli zaś dodamy do stopu 10 g czystego srebra, to stosunek ten wyniesie 3: 2. Ile gramów złota i ile gramów srebra jest w tym stopie?
5. Gdy ojciec będzie w wieku babci, będzie miał razem ze swą córką 81 lat. Gdy córka będzie w wieku ojca, będzie miała z ojcem razem 79 lat, a ojciec z babcią 126 lat. Ile lat ma obecnie córka, ojciec, a ile babcia?
6. Jeżeli do liczby dwucyfrowej dodamy potrojoną cyfrę jedności, to otrzymamy 44. Jeżeli od liczby o przestawionych cyfrach odejmiemy pięciokrotną cyfrę dziesiątek pierwszej liczby, to otrzymamy 52. Znajdź tę liczbę.
7. Dwie sztabki złota o próbach 900 i 750 stopiono z 2 g czystego złota, otrzymując 20 g złota próby 850. Ile ważyły sztabki?
8. Statek płynie Odrą z Wrocławia do Szczecina 3 dni, a ze Szczecina do Wrocławia 6 dni. Jaki jest czas przepływu wody Odry z Wrocławia do Szczecina?
9. Tyran Syrakuz zamówił dla siebie koronę ze sztaby złota ważącej 7,465 kg i kazał Archimedesowi sprawdzić, czy złotnik nie zastąpił części złota tańszym srebrem. W tym celu sławny fizyk i matematyk zanurzył koronę w wodzie, gdzie straciła ona pozornie na wadze 467 g. Wiedząc, że złoto traci w wodzie (pozornie) $\frac{13}{250}$ swego ciężaru, a srebro $\frac{19}{200}$, oblicz, ile było złota, a ile srebra w tej koronie.
10. Oślica wraz z mułem dźwigała na grzbiecie wino i, upadając pod jego ciężarem, bardzo się skarżyła. Wtedy muł rzekł:„Czemu ty się skarżysz jak dziecko? Gdybym ja wziął jedną z twych miar, to mój ładunek byłby dwa razy większy od twego, a gdybyś ty wzięła jedną z moich miar, to ja miałbym tyle co ty". Ile miar wiozła oślica i ile muł?
11. Genialny matematyk i fizyk angielski Izaak Newton urodził się w XVII stuleciu, a umarł w XVIII. Oblicz rok jego urodzin i rok śmierci, wiedząc, że dwie ostatnie cyfry z daty jego urodzin tworzą liczbę o 12 mniejszą od podwojonej liczby utworzonej z dwóch ostatnich cyfr daty jego śmierci. Oprócz tego wiadomo, że dwucyfrowa końcówka daty jego śmierci jest o 1 mniejsza od $\frac{2}{3}$ dwucyfrowej końcówki daty jego urodzin.
12. W ogrodzie mandaryna biegały bażanty i króliki. Miały one razem 35 głów, a nóg 94. Ile tam było bażantów, a ile królików?

7. Układy nierówności liniowych z dwiema niewiadomymi

Układ nierówności liniowych to oczywiście ich koniunkcja. Skoro wykresem każdej z nich jest półpłaszczyzna, więc część wspólna tych półpłaszczyzn stanowi ilustrację geometryczną układu.

Przykład 1. Rozwiąż układ nierówności

$$\begin{cases} x-y+3>0 \\ x+2y>0. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

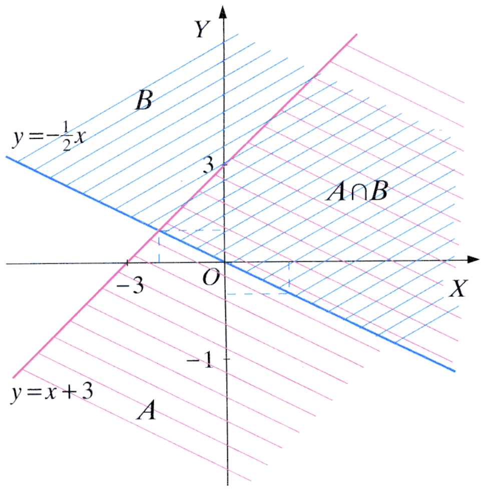
Układ ten jest równoważny układowi

$$\begin{cases} y<x+3 \\ y>-\frac{1}{2}x. \end{cases}$$

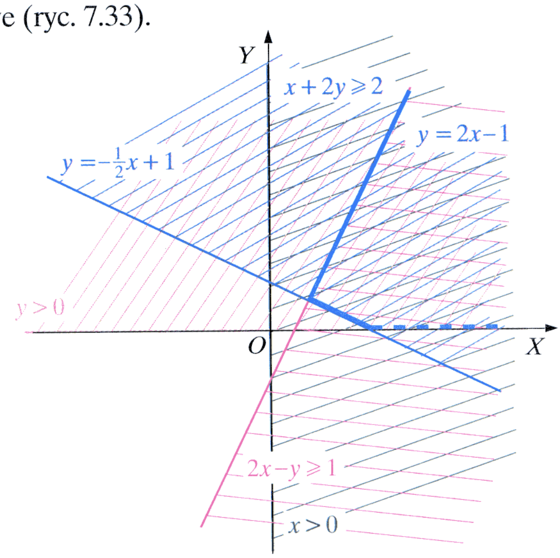
Wykreślamy najpierw równania

$$y=x+3 \text{ i } y=-\frac{1}{2}x,$$

następnie cieniujemy półpłaszczyzny odpowiadające nierównościom układu oraz zakreślamy część wspólną tych półpłaszczyzn... i gotowe (ryc. 7.33).



Ryc. 7.33.



Ryc. 7.34.

Przykład 2. Podaj ilustrację geometryczną układu nierówności

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ 2x-y\geqslant 1 \\ x+2y\geqslant 2. \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Rysujemy wykresy nierówności: $x>0$, $y>0$, $2x-y\geqslant 1$ i $x+2y\geqslant 2$, a następnie zakreślamy ich część wspólną (ryc. 7.34).

Przykład 3. Zilustruj na płaszczyźnie układ

$$\begin{cases} x < 4 \\ y < 3 \\ x + y = 4. \end{cases}$$

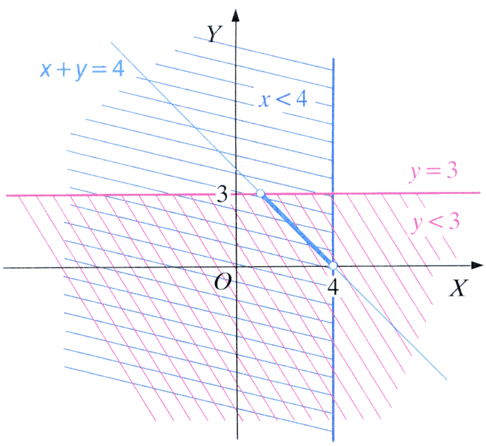
Rozwiązanie:

Częścią wspólną półpłaszczyzn $y < 4$, $y < 3$ i prostej $x + y = 4$ jest odcinek AB (ryc. 7.35)

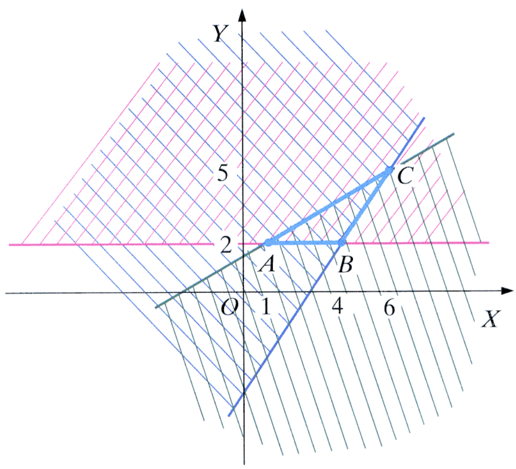
Przykład 4. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne punktu $P = (x, y)$, aby należał on do trójkąta ABC, gdzie $A = (1, 2)$, $B = (4, 2)$, $C = (6, 5)$?

Rozwiązanie:

Aby punkt ten należał do trójkąta ABC, winien leżeć na płaszczyźnie XOY (ryc. 7.36):
- poniżej prostej AC,
- powyżej prostej AB,
- powyżej prostej BC.



Ryc. 7.35.



Ryc. 7.36.

Zatem aby otrzymać dane odpowiadające współrzędnym punktu P, napiszmy najpierw równania tych prostych.

Podstawiając współrzędne wierzchołków A, B, C danego trójkąta do równania $y = ax + b$, otrzymamy współczynniki równań tych prostych. A więc: równanie $y = ax + b$ prostej AC otrzymamy, podstawiając do niego w miejsce x i y współrzędne punktów A i C. Stąd dostajemy układ:

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 6a + b = 5, \end{cases}$$

którego rozwiązaniem jest para:

$$\begin{cases} a = \frac{3}{5} \\ b = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Równanie prostej AC jest więc postaci $y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$.

Podobnie napiszemy równanie prostej BC, ma ono mianowicie postać $y = \frac{3}{2}x - 4$ (sprawdź to!).

Natomiast równanie prostej AB przyjmuje postać $y = 2$ (dlaczego?).

Zatem aby punkt $P = (x, y)$ należał do trójkąta ABC, jego współrzędne muszą spełniać układ nierówności:

$$\begin{cases} y \leqslant \frac{3}{5}x + \frac{7}{5} \\ y \geqslant \frac{3}{2}x - 4 \\ y \geqslant 2. \end{cases}$$

Przykład 5. Dane są dwa punkty $A = (0, 6)$ i $B = (3, 5)$. Dla jakich wartości parametru a współrzędne wszystkich punktów odcinka AB spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} x + y + a \geqslant 0 \\ x - y + 2a \leqslant 0? \end{cases}$$

Rozwiązanie:

Każda z tych nierówności opisuje dla dowolnej liczby rzeczywistej a pewną półpłaszczyznę. Zatem współrzędne wszystkich punktów odcinka AB spełniają podany układ nierówności, gdy punkty te należą do części wspólnej półpłaszczyzn opisanych tymi nierównościami, a więc gdy w owej części wspólnej zawarty jest odcinek AB.

Oznacza to, że jego końce A i B należą do tej części wspólnej, a więc ich współrzędne spełniają podany układ nierówności. W ten sposób otrzymujemy układ nierówności.

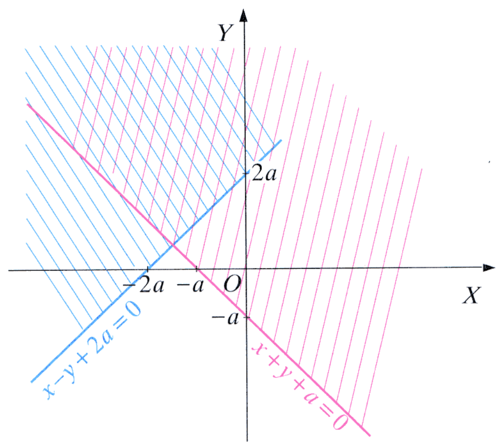
$$\begin{cases} 0 + 6 + a \geqslant 0 \\ 0 - 6 + 2a \leqslant 0 \\ 3 + 5 + a \geqslant 0 \\ 3 - 5 + 2a \leqslant 0, \end{cases}$$

który jest równoważny układowi

$$\begin{cases} a \geqslant -6 \\ a \leqslant 3 \\ a \geqslant -8 \\ a \leqslant 1, \end{cases}$$

czyli nierówności $-6 \leqslant a \leqslant 1$.

Odpowiedź: Współrzędne wszystkich punktów odcinka AB spełniają dany układ nierówności, gdy $a \in \langle -6; 1 \rangle$.



Ryc. 7.37.

Pytania i zadania

1. Przedstaw ilustracje graficzne układów:

a) $\begin{cases} x+2y \geqslant 4 \\ x-y<2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} x>0 \\ y<0 \\ x+y \leqslant 2 \\ 3x-y<1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 2x+y-2 \geqslant 0 \\ x-2y+2 \leqslant 0 \\ x>1 \\ y<3. \end{cases}$

2. Zilustruj na płaszczyźnie układy nierówności:

a) $\begin{cases} |x-y| \leqslant 1 \\ |x+3| \leqslant 1; \end{cases}$ b) $\begin{cases} |x-y| \geqslant 1 \\ |x+3| \geqslant 1; \end{cases}$ c) $\begin{cases} 1 < x+y \leqslant 2 \\ x-y \leqslant 2x+3y. \end{cases}$

3. Zilustruj na płaszczyźnie równania i nierówności:

a) $|x-y|-|x+y|=2$; b) $|x-1|+|y+2|=1$;

c) $|x| \geqslant |y|$; d) $|x-2|+|y| \leqslant 2$.

4. Sprawdź, czy punkty $A=(-1,-1)$, $B=(1,-5)$ leżą po jednej stronie prostej $2x+y+4=0$.
5. Dla jakich m współrzędne wszystkich punktów trójkąta ABC spełniają nierówność $x+y-m \leqslant 0$, gdzie $A=(0,0)$, $B=(0,4)$, $C=(1,0)$?
6. Jakie warunki muszą spełniać współrzędne punktu $P=(x,y)$, aby należał on do czworokąta $OABC$, gdzie $O=(0,0)$, $A=(2,0)$, $B=(4,3)$, $C=(0,7)$?

VIII. Elementy geometrii płaszczyzny

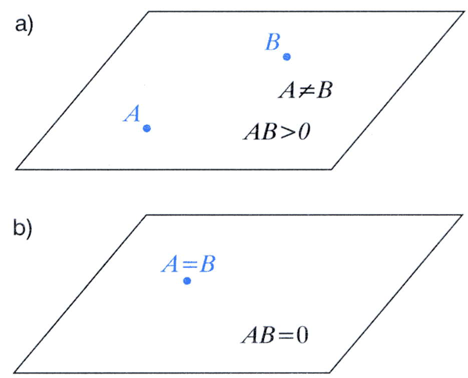
1. Odległość dwóch punktów

Z mierzeniem odległości punktów mamy do czynienia bardzo często. Mierzona jest na przykład: długość skoku oddanego przez skoczka narciarskiego w czasie konkursu (odległość punktu wyskoku do punktu, w którym skoczek wylądował), w górach odległość między szczytami w linii powietrznej albo wysokość szczytu góry nad poziomem morza.

W szkole podstawowej i w gimnazjum mierzyliście odległość pewnych dwóch punktów (np. dwóch punktów podziałki na linijce, której używaliście do pomiaru). Odległość ta zawsze wyrażana była jakąś liczbą nieujemną, zależną od obranej jednostki i od dokładności pomiaru.

Mówiąc o odległości dwóch punktów, mamy zazwyczaj na myśli długość najkrótszej drogi od jednego z tych punktów do drugiego, a tą – jak doskonale wiemy – jest na płaszczyźnie odległość jednego punktu do drugiego wzdłuż linii prostej przechodzącej przez te punkty. Przyjrzyjmy się zatem dokładnie, czym jest odległość dwóch punktów i jakie ma ona własności.

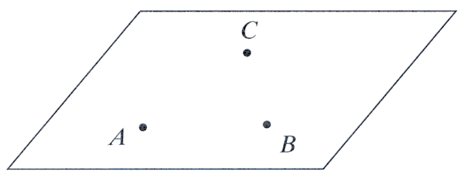
Obierzmy na płaszczyźnie dwa punkty: A i B. Mówimy wówczas, że punkt A znajduje się w pewnej odległości od punktu B. Odległość tę oznaczamy przez AB. Odległość ta jest liczbą **dodatnią**, gdy punkty A i B **są różne** (piszemy: $A \neq B$; ryc. 8.1a), zaś – **zerem**, gdy **się pokrywają** (piszemy: $A = B$; ryc. 8.1b). Zatem dla każdych punktów A i B mamy $AB \geqslant 0$. Ponadto, odległości punktu B od punktu A i punktu A od punktu B są równe. Stąd $AB = BA$.



Ryc. 8.1.

Rozważmy teraz trzy **niewspółliniowe**, to znaczy **nieleżące na jednej prostej**, punkty A, B, C oraz ich wzajemne odległości AB, AC i CB (ryc. 8.2). Widzimy, że odległość którychkolwiek dwóch z nich jest mniejsza od sumy pozostałych odległości, to znaczy

$$AB < AC + CB,$$
$$AC < AB + CB,$$
$$CB < AC + AB.$$



Ryc. 8.2.

Gdy punkty A, B, C są **współliniowe** (to znaczy **leżą na jednej prostej**), to oczywiście własności tej nie mają: nie każda z odległości AB, AC, CB jest mniejsza od sumy dwóch pozostałych. Gdy punkty A, B, C leżą na przykład w kolejności, jak na rycinie 8.3, wówczas

$$AB = AC + CB.$$

Ryc. 8.3.

Spostrzeżenia te sformułujmy w postaci następującej definicji odległości.

Na płaszczyźnie określono odległość, gdy każdej parze punktów A i B przyporządkowano liczbę AB o własnościach:

1. $AB \geqslant 0$, przy czym $AB = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.
2. $AB = BA$.
3. Jeżeli A, B, C są dowolnymi trzema punktami, to zawsze jest $AB \leqslant AC + CB$, przy czym $AB = AC + CB$ wtedy i tylko wtedy, gdy punkty A, B, C leżą na jednej prostej a C między A i B.

Odcinkiem AB nazywamy zbiór utworzony z punktów A i B oraz ze wszystkich punktów prostej AB leżących między punktami A i B.

Długością odcinka nazywamy odległość między jego końcami.

Uwaga. Prostą przechodzącą przez punkty A i B, odcinek o końcach w tych punktach oraz długość tego odcinka oznaczać będziemy jednym symbolem AB.

Wniosek. Punkt X należy do odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $AX + XB = AB$.

Punkt odcinka dzielący go na połowy nazywamy środkiem tego odcinka.

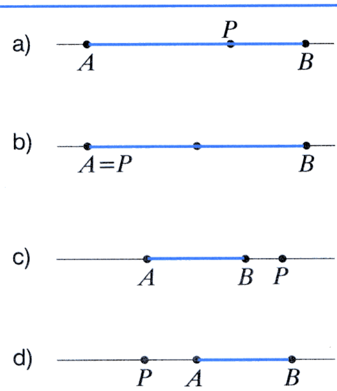
Ryc. 8.4.

Wniosek. Punkt S jest środkiem odcinka AB wtedy i tylko wtedy, gdy $AS = SB$ i $AS + SB = AB$.

Stosunkiem podziału odcinka AB punktem P prostej AB, różnym od B, nazywamy liczbę:

a) $\frac{AP}{PB}$, gdy punkt P należy do odcinka AB (ryc. 8.5 a, b).

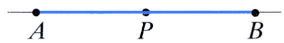
b) $-\frac{AP}{PB}$, gdy punkt P leży na prostej AB, poza odcinkiem AB (ryc.8.5 c, d).



Ryc. 8.5.

Stosunek ten oznaczać będziemy literą k. Widzimy zatem, że:
a) $k > 0$, gdy punkt P leży wewnątrz odcinka AB,
b) $k = 0$, gdy P=A.
c) $k < 0$, gdy P leży na prostej AB, poza odcinkiem AB.

Gdy punkt P jest środkiem odcinka AB, wówczas $k = 1$ (ryc. 8.6).



Ryc. 8.6.

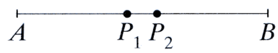
Uwaga. Stosunek podziału odcinka AB punktem B jest nieokreślony.

Prawdziwe jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Każdy odcinek dzielony jest w danym stosunku dodatnim tylko jednym swoim punktem wewnętrznym.

☐ Dowód. Gdyby bowiem odcinek AB był dzielony w danym stosunku $k > 0$ swoimi punktami wewnętrznymi P_1 i P_2 (ryc. 8.7), wtedy spełniałyby one równości $AP_1 = k \cdot P_1B$ i $AP_2 = k \cdot P_2B$. I wobec tego $P_1P_2 = |AP_1 - AP_2| = |kP_1B - kP_2B| = k|P_1B - P_2B| = k \cdot P_1P_2$, skąd $P_1P_2 = kP_1P_2$, czyli $(1-k) \cdot P_1P_2 = 0$. Zatem $k = 1$ lub $P_1P_2 = 0$. W obu przypadkach punkty P_1 i P_2 pokrywają się. ☐



Ryc. 8.7.

Podobnie można wykazać kolejne twierdzenie:

Twierdzenie

Każdy odcinek dzielony jest w danym stosunku ujemnym tylko jednym punktem prostej, na której leży ten odcinek.

Przykład 1. O punktach A, B, C wiemy, że: $AB = 1{,}5$, $BC = 6$, $CA = 4{,}5$. Czy punkty te leżą na jednej prostej?
Rozwiązanie:

Widzimy, że $CA + AB = 4{,}5 + 1{,}5 = 6 = CB = BC$. Zatem punkty A, B, C leżą na jednej prostej, przy czym punkt A – między punktami B i C (ryc. 8.8).

Ryc. 8.8.

Przykład 2. O punktach A, B, C wiemy, że $AB = 2a$, $BC = 3a$, $CA = 4a$, gdzie $a > 0$. Czy punkty te leżą na jednej prostej?
Rozwiązanie:

Ponieważ $CA = 4a < 5a = 2a + 3a = AB + BC$ oraz $BC < CA + AB$ i $AB < BC + CA$, więc punkty te nie leżą na jednej prostej.

Przykład 3. Czy istnieją punkty A, B, C takie, że $AB = 3$, $BC = 2$, $CA = 6$?
Rozwiązanie:

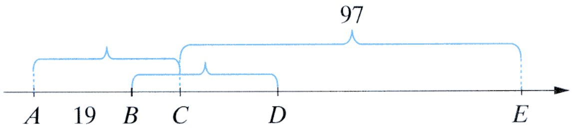
Zauważ, że punkty te nie są ani współliniowe, ani niewspółliniowe (sprawdź to!). Zatem punkty takie nie istnieją.

Przykład 4*. Punkty A, B, C, D i E leżą na jednej prostej, w podanej kolejności. Wiadomo, że $AB = 19$, $CE = 97$ oraz $AC = BD$. Znajdź długość odcinka DE.
Rozwiązanie:

Z treści zadania wynika równość $AB + BC = BC + CD$, skąd $AB = CD$. Wobec tego

$DE = CE - CD = 97 - 19 = 78.$

Odpowiedź: $DE = 78$.



Ryc. 8.9.

Przykład 5*. W trójkącie ABC połączono wierzchołek B z punktem D położonym na boku AC. Wykaż, że $AB + BC - AC < 2BD$.
Rozwiązanie:

Punkty A, B i D są niewspółliniowe (ryc. 8.10) oraz punkty B, D i C są niewspółliniowe. Zachodzą więc nierówności:

$AB < AD + BD$,

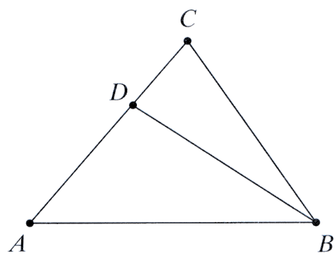
$BC < DC + BD$.

Po dodaniu ich stronami otrzymujemy nierówność

$AB + BC < AD + DC + 2BD = AC + 2BD$,

i ostatecznie nierówność

$AB + BC - AC < 2BD$.



Ryc. 8.10.

Wiemy już, jak obliczyć odległość dwóch punktów na osi liczbowej (roz. IV: Wartość bezwzględna liczby rzeczywistej). Przypomnijmy zatem, że jeśli $A = (x_1)$, $B = (x_2)$, to $AB = |x_1 - x_2|$. Pokazują to ryciny 8.11 na następnej stronie.

Rozważmy teraz dowolne dwa punkty A i B na płaszczyźnie z prostokątnym układem współrzędnych, czyli $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$.

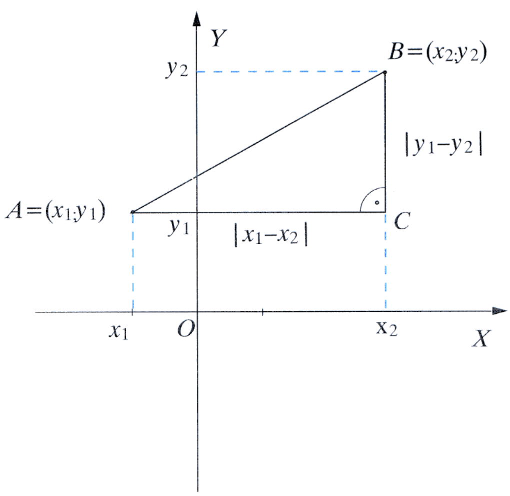
Wówczas na mocy twierdzenia Pitagorasa zastosowanego do trójkąta ABC (ryc. 8.12.) otrzymujemy:

$$AB^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2, \text{ czyli}$$

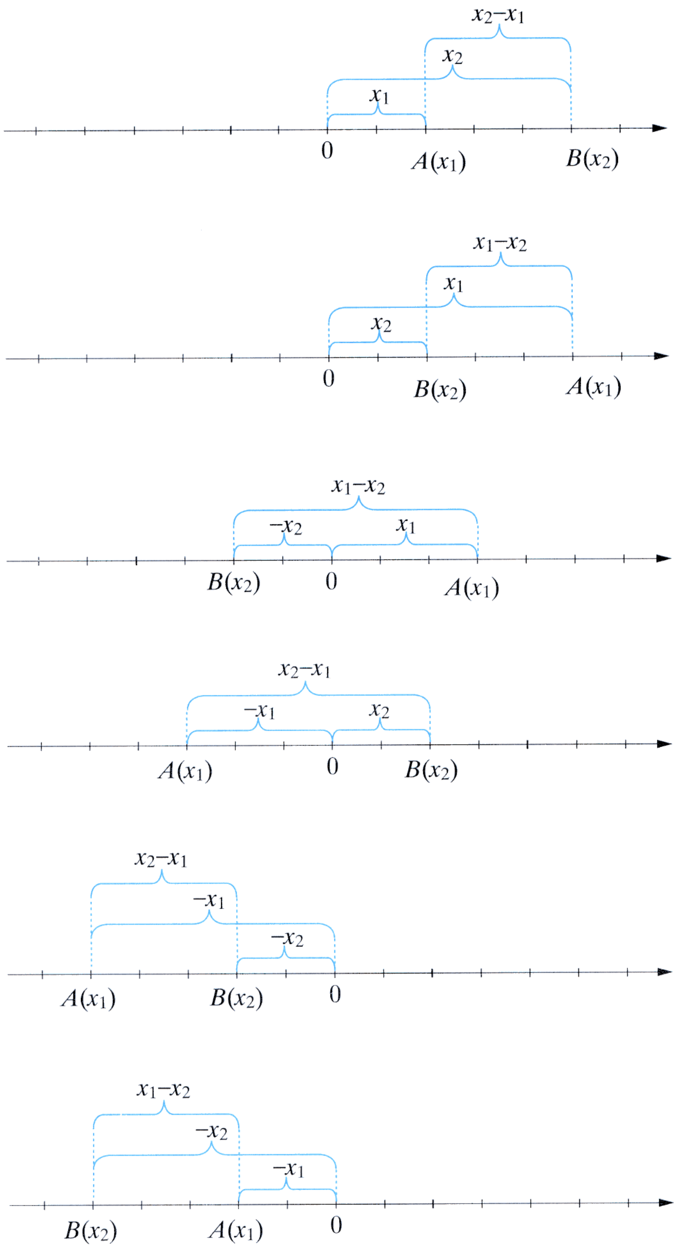
$$AB^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \text{ bo } |a|^2 = a^2,$$

i ostatecznie

$$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Ryc. 8.12.



Ryc. 8.11.

Wniosek. Jeśli $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, to $AB=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$.

Przykład 6. Oblicz długość odcinka AB, gdy $A=(-2,1)$, $B=(2,-3)$.
Rozwiązanie:

Ze wzoru na odległość dwóch punktów otrzymujemy:

$$AB=\sqrt{(-2-2)^2+(1-(-1))^2}=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{2^2\left(2^2+1\right)}=2\sqrt{5}.$$

Przykład 7. Punkty $A=(1,2)$, $B=(4,-3)$, $C=(0,1)$ są wierzchołkami trójkąta. Oblicz jego obwód.

Rozwiązanie:

Wyznaczamy najpierw długości boków tego trójkąta. Mamy:

$$AB=\sqrt{(1-4)^2+(2-(-3))^2}=\sqrt{(-3)^2+5^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34},$$

$$BC=\sqrt{(4-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{4^2\cdot 2}=4\sqrt{2},$$

$$CA=\sqrt{(0-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}.$$

Zatem obwód tego trójkąta wynosi

$$AB+BC+CA=\sqrt{34}+4\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}+\sqrt{34}.$$

Przykład 8. Wykaż, że środkiem odcinka AB, gdzie $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$, jest punkt

$$S=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right).$$

Rozwiązanie:

Należy wykazać, że $AS=SB$ i $AS+SB=AB$.

Obliczamy:

$$AS=\sqrt{\left(x_1-\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2+\left(y_1-\frac{y_1+y_2}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2},$$

$$SB=\sqrt{\left(\frac{x_1+x_2}{2}-x_2\right)^2+\left(\frac{y_1+y_2}{2}-y_2\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2}.$$

Wówczas widzimy, że $AS=SB$ oraz

$$AS+SB=2\sqrt{\left(\frac{x_1-x_2}{2}\right)^2+\left(\frac{y_1-y_2}{2}\right)^2}=\sqrt{4\cdot\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{4}}=$$

$$=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=AB.$$

Przykład 9. Punkty $P=(-1,3)$ i $Q=(4,-2)$ są wierzchołkami kwadratu. Oblicz obwód tego kwadratu.

Rozwiązanie:

Mogą zajść tutaj dwa przypadki:

1. Odcinek PQ jest bokiem tego kwadratu. Wtedy obwód danego kwadratu obliczymy następująco

$$4\cdot PQ=4\cdot\sqrt{(-1-4)^2+(3-(-2))^2}=4\cdot\sqrt{(-5)^2+5^2}=4\cdot\sqrt{5^2\cdot 2}=20\sqrt{2}.$$

2. Odcinek PQ jest przekątną tego kwadratu. Wówczas jeśli a oznacza długość boku danego kwadratu, to oczywiście zachodzi równość $a\sqrt{2}=PQ$, skąd $a=\frac{PQ}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$, szukany zaś obwód wynosi $4\cdot 5=20$.

Uwaga. Odległość w dowolnym zbiorze określamy, podobnie jak na płaszczyźnie.

Mówimy, że **w zbiorze X określiliśmy odległość**, jeżeli każdej parze elementów A i B tego zbioru przyporządkowaliśmy jedną liczbę nieujemną AB, zwaną odległością pierwszego elementu od drugiego, przy czym:

1. Jeżeli $A \in X$ i $B \in X$, to $AB = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $A = B$.
2. Jeśli $A \in X$ i $B \in X$, to $AB = BA$.
3. Jeśli $A \in X$, $B \in X$ i $C \in X$, to $AC \leqslant AB + BC$.

Przykład 10. Każdemu obszarowi leśnemu odpowiada ściśle określony zbiór gatunków drzew występujących na tym obszarze. Umówmy się nazywać obszarem leśnym każdy zbiór gatunków drzew.

Rozważmy dwa obszary leśne A i B. Przyjmijmy oznaczenia:

a – liczba gatunków na obszarze A,

b – liczba gatunków na obszarze B,

w – liczba gatunków występujących na obu tych obszarach.

Przyporządkujmy parze A, B liczbę AB określoną wzorem

$$(*)\ AB = \frac{a+b-2w}{a+b-w}.$$

Można dowieść, że odwzorowanie to spełnia wszystkie własności odległości w zbiorze. Liczba AB określona wzorem $(*)$ jest więc odległością w zbiorze obszarów leśnych. Odległość tę nazywa się odległością gatunkową obszarów leśnych. Podany wzór na tę odległość służy biologom do oceny różnic i podobieństw gatunkowych dwóch konkretnych obszarów leśnych.

Pytania i zadania

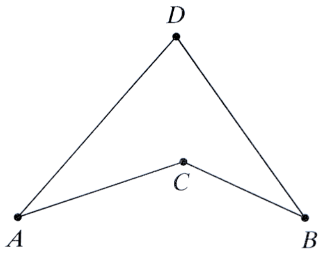
1. Czym jest odległość na płaszczyźnie i jakie ma ona własności?
2. Kiedy trzy różne punkty A, B, C są:
   a) współliniowe, b) niewspółliniowe?
3. Co to jest: a) odcinek, b) długość odcinka?
4. Kiedy punkt X należy do odcinka AB?
5. Co to jest stosunek podziału odcinka punktem?
6. Wiadomo, że $AB = 2$, $BC = 1$. Czy odległość AC może być równa:
   a) 2, b) 4?
7. Czy istnieje taka liczba a, dla której punkt B leży między punktami A i C, gdy:
   a) $AB = 2a + 1$, $BC = -3a + 7$, $AC = 1$;
   b) $AB = 5a + 1$, $BC = -2a + 3$, $AC = 3a + 4$;
   c) $AB = 3a - 4$, $BC = 7$, $AC = 3a + 1$;
   d) $AB = \sqrt{2}$, $BC = 5\sqrt{2}\,a - 1$, $AC = \sqrt{2}\,a + 3$?
8. Wiadomo, że $AB = 10$. Czy punkt C należy do odcinka AB, gdy:
   a) $AC = 3$, $BC = 7$;
   b) $AC = \sqrt{5}$, $BC = \sqrt{6}$;

c) $AC = 0$;

d) $AC = 10$;

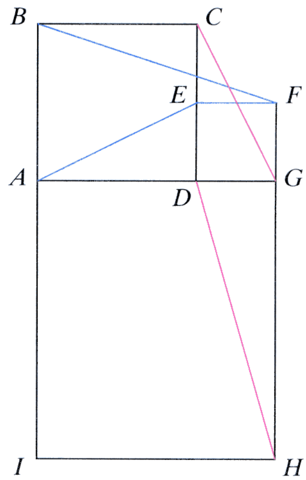
e) $AC = \sqrt{2}$, $BC = \sqrt{8}$.

9. Punkty A, B, C, D są wierzchołkami czworokąta (ryc. 8.13.). Wykaż, że $AD + DB > AC + CB$.



Ryc. 8.13.

10. Udowodnij, że jeżeli punkt P leży wewnątrz trójkąta ABC, to $PA + PB + PC < AB + BC + CA$.
11. Kwadrat $ABCD$ o boku 2 i kwadrat $DEFG$ o boku 1 stoją jeden za drugim na boku AG kwadratu $AGHI$ o boku 3 (ryc. 8.14.). Porównaj długości łamanych: $AEFB$ i $CGDH$.



Ryc. 8.14.

12. Udowodnij, że długość każdej przekątnej czworokąta jest mniejsza od połowy jego obwodu.
13. Wykaż, że suma przekątnych czworokąta jest mniejsza od jego obwodu, zaś większa od połowy tego obwodu.
14. Podaj wzór na odległość dwóch punktów:
    a) na osi liczbowej;
    b) na płaszczyźnie współrzędnych.
15. Współrzędne wierzchołków kwadratu są równe albo 0, albo 1. Niech A będzie środkiem jednego z jego boków. Oblicz odległość punktu A od środków każdego z pozostałych boków.
16. Znajdź obwód trójkąta o wierzchołkach: $A = (4, 0)$, $B = (2, 4)$, $C = (-2, -2)$.
17. Niech A, B, C, D będą wierzchołkami kwadratu, O jego środkiem, a P dowolnym punktem. Wykaż, że wyrażenie $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 - 4PO^2$ przyjmuje stałą wartość.
18. Udowodnij, że suma kwadratów odległości dowolnego punktu od wierzchołków przeciwległych A i C prostokąta $ABCD$ równa jest sumie kwadratów odległości tego punktu od wierzchołków B i D.
19. Dane są punkty $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$. Wykaż, że punkt $P = \left(\frac{x_1 + 2x_2}{3}, \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right)$ należy do odcinka AB i dzieli go w stosunku $2:1$.
20. Rozważmy zbiór trzech obszarów leśnych:
    A = {świerk, limba, kosodrzewina},
    B = {buk, sosna, świerk, jawor, modrzew},
    C = {buk, jawor, lipa, klon}.
    Sprawdź, że wzór $AB = \frac{a + b - 2w}{a + b - w}$ (oznaczenia jak w przykładzie 10 na str. 311) określa w tym zbiorze odległość.

21*. Wykaż, czy powyższy wzór określa odległość w każdym zbiorze obszarów leśnych.

2. Okrąg i koło

Obierzmy na płaszczyźnie pewien punkt O i liczbę dodatnią r.

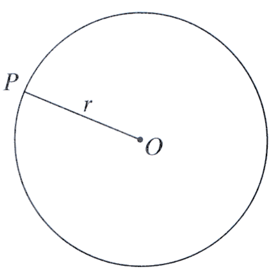
Okręgiem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P na płaszczyźnie, których odległość od punktu O jest równa r (czyli $OP = r$; ryc. 8.15).

Okrąg o środku O i promieniu r oznaczać będziemy przez $C(O, r)$

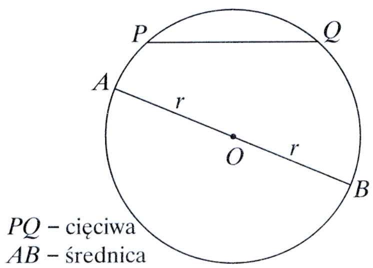
Cięciwą okręgu nazywamy odcinek, którego końce leżą na okręgu. Cięciwa okręgu przechodząca przez jego środek nazywa się **średnicą okręgu** (ryc. 8.16).

Wniosek. Średnica okręgu jest dwa razy dłuższa niż promień.

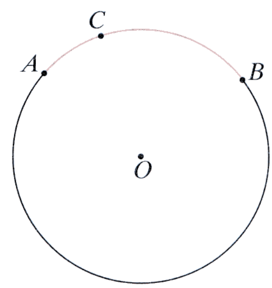
Łukiem okręgu nazywamy zbiór wszystkich punktów tego okręgu leżących między dwoma danymi punktami tego okręgu wraz z tymi punktami. Punkty te nazywać będziemy **końcami** łuku. Łuki oznaczać będziemy znakiem $\frown$. Gdy końcami łuku są punkty A i B i należy do niego pewien punkt C, wówczas łuk ten oznaczymy przez $\overset{\frown}{ACB}$ (ryc. 8.17).



Ryc. 8.15.



Ryc. 8.16.



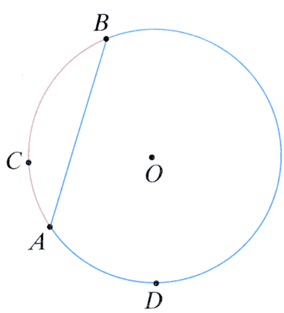
Ryc. 8.17.

Dwa różne punkty na okręgu wyznaczają dwa łuki uzupełniające się do całego okręgu. Są nimi na przykład łuki $\overset{\frown}{ACB}$ i $\overset{\frown}{ADB}$ (ryc. 8.18).

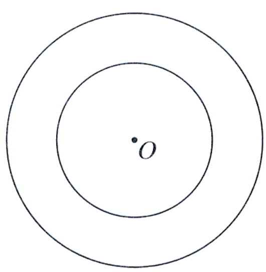
Łuki te nazywamy **łukami opartymi na cięciwie** AB. Łuk wyznaczony przez końce średnicy okręgu nazywamy **półokręgiem**.

Dwa okręgi o wspólnym środku nazywamy okręgami **współśrodkowymi** albo **koncentrycznymi** (ryc. 8.19).

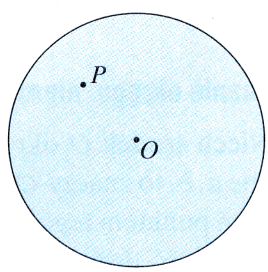
Gdy dołączymy okrąg do figury utworzonej z wszystkich punktów płaszczyzny, których odległości od jego środka są mniejsze od długości promienia tego okręgu, to otrzymamy figurę zwaną kołem (ryc. 8.20).



Ryc. 8.18.



Ryc. 8.19.



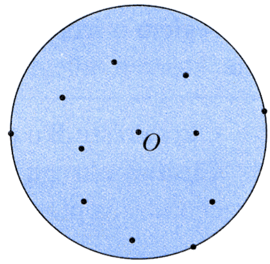
Ryc. 8.20.

Kołem o środku O i promieniu r nazywamy zbiór wszystkich punktów P na płaszczyźnie, których odległości od punktu O są nie większe od liczby r (czyli $OP \leqslant r$).

Zbiór wszystkich punktów, których odległości od środka koła są mniejsze od długości promienia, nazywamy **wnętrzem koła** (ryc. 8.21).

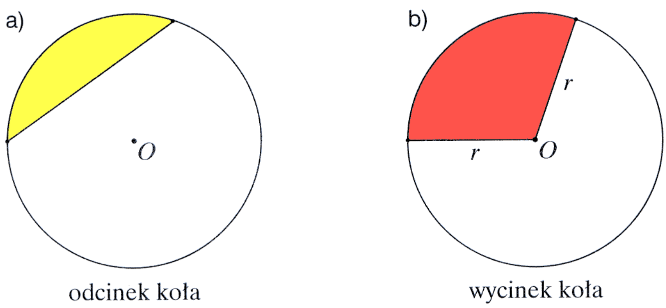
Cięciwą koła nazywamy cięciwę okręgu tego koła, a **średnicą koła** jest średnica okręgu tego koła (czyli okręgu o tym samym środku i promieniu).

Koło o środku O i promieniu r będziemy oznaczali przez $K(O,r)$.



Ryc. 8.21.

Część koła zawartą między cięciwą a łukiem okręgu tego koła nazywamy **odcinkiem** koła, a część koła zawartą między dwoma promieniami a łukiem okręgu tego koła nazywamy **wycinkiem** koła.



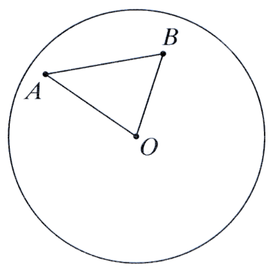
Ryc. 8.22.

Twierdzenie

Odległość dowolnych dwóch punktów koła jest nie większa od średnicy tego koła.

□ Dowód. Jeśli A i B będą dowolnymi punktami koła $K(O,r)$, to $OA \leqslant r$ i $OB \leqslant r$. W trójkącie AOB zachodzi więc nierówność $AB \leqslant AO + BO$ (ryc. 8.23). Stąd

$$AB \leqslant AO + OB = OA + OB \leqslant r + r = 2r. \quad \square$$



Ryc. 8.23.

Równanie okręgu, nierówność koła

Niech środek O okręgu $C(O,r)$ o promieniu r ma współrzędne a, b, to znaczy $O=(a,b)$, zaś $P=(x,y)$ niech będzie dowolnym punktem tego okręgu. Zatem $OP=r$, co według wzoru na odległość dwóch punktów na płaszczyźnie współrzędnych prowadzi do równania $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}=r$, czyli do równania

$$(*) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=r^2.$$

Mówimy, że równanie $(*)$ jest równaniem okręgu o środku (a, b) i promieniu r lub że równanie to przedstawia okrąg.

Na przykład:

- równanie $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ przedstawia okrąg o środku $(1, 2)$ i promieniu 2;
- równanie $x^2+y^2=r^2$ jest równaniem okręgu o środku $(0, 0)$ i promieniu r.

Równanie $(*)$ jest równoważne kolejno równaniom:

$$x^2-2ax+a^2+y^2-2by+b^2=r^2,$$

$$x^2+y^2-2ax-2by+\left(a^2+b^2-r^2\right)=0.$$

Podstawiając w tym ostatnim równaniu $a^2+b^2-r^2=c$, otrzymujemy równanie

$$(**) \qquad x^2+y^2-2ax-2by+c=0.$$

Na przykład:

- równanie $(x-1)^2+(y-2)^2=4$ możemy napisać w postaci: $x^2+y^2-2x-4y+1=0$,
- równanie $(x+1)^2+(y-3)^2=1$ jest równoważne równaniu $x^2+y^2+2x-6y+9=0$.

Powstaje pytanie, czy dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, c równanie

$$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$$

przedstawia okrąg? Ponieważ jest ono równoważne równaniu

$$(***) \qquad (x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2-c, \text{ więc:}$$

- jeśli $a^2+b^2-c>0$, to istnieje liczba dodatnia r taka, że $r=\sqrt{a^2+b^2-c}$; równanie $(***)$ jest wtedy równoważne równaniu $(*)$ i rzeczywiście przedstawia okrąg $C((a,b),r)$;
- jeśli $a^2+b^2-c=0$, to równanie $(***)$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $x=a$ i $y=b$; przedstawia więc ono jeden punkt (a, b);
- jeśli wreszcie $a^2+b^2-c<0$, to równanie $(***)$ nie spełnia żadna para (x,y) liczb rzeczywistych.

Zachodzi więc następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Równanie $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ przedstawia okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy $a^2+b^2-c>0$; promieniem tego okręgu jest liczba $\sqrt{a^2+b^2-c}$, a środkiem – punkt (a, b).

Przykład 1. Równanie $x^2+y^2-2x+4y-4=0$ przedstawia okrąg o środku $(1, -2)$ i promieniu $r=\sqrt{1^2+(-2)^2+4}=3$.

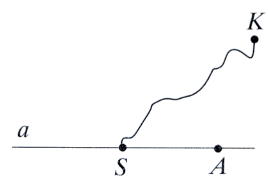
Przykład 2. Równanie $x^2+y^2+x-y=0$ przedstawia okrąg o środku $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ i promieniu $r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-0}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Podobnie punkt $P=(x,y)$ jest dowolnym punktem koła o środku $O=(a,b)$ i promieniu r wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia nierówność $OP \leqslant r$. Oznacza to, że jego współrzędne x, y spełniają nierówność $\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leqslant r$, czyli nierówność $(x-a)^2+(y-b)^2 \leqslant r^2$.

Mówimy więc, że nierówność ta przedstawia koło o środku (a,b) i promieniu r. Na przykład:
- nierówność $(x+1)^2+(y-1)^2 \leqslant 1$ jest nierównością koła o środku $(-1,1)$ i promieniu 1;
- nierówność $x^2+y^2 \leqslant 4$ opisuje koło o środku $(0,0)$ i promieniu 2.

Pytania i zadania

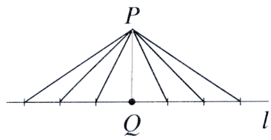
1. Podaj definicje:
   a) okręgu i koła o środku O i promieniu r;
   b) cięciwy i średnicy okręgu i koła;
   c) odcinka i wycinka koła.
2. Jakie równanie opisuje okrąg o środku (a,b) i promieniu r, a jaka nierówność opisuje koło o środku w tym punkcie i o tym promieniu?
3. Mając dane dwa punkty A i B nakreśl okrąg o środku A, przechodzący przez punkt B.
4. Dany jest punkt A i liczba dodatnia r. Gdzie leżą środki wszystkich okręgów o promieniu r, przechodzących przez punkt A?
5. Znajdź środki i promienie okręgów i kół:
   a) $x^2+(y+1)^2=4$; b) $(x-1)^2+y^2 \leqslant 3$; c) $(x-2)^2+(y+2)^2=9$;
   d) $x^2+y^2-2x+2y+2=0$; e) $x^2+(y-1)^2 \leqslant 5$; f) $(x-1)^2+(y+1)^2 \leqslant 16$;
   g) $x^2+y^2-x-y+\frac{1}{2} \leqslant 0$; h) $x^2+y^2+4x \leqslant 0$; i) $x^2+y^2-4x-4y-8 \leqslant 0$.
6. Zbadaj, czy punkt P leży wewnątrz koła, czy na zewnątrz koła, czy też na okręgu tego koła:
   a) $P=(-3,5)$, $(x-4)^2+y^2 \leqslant 16$; b) $P=(0,-1)$, $x^2+y^2 \leqslant 2$;
   c) $P=(2,1)$, $(x-1)^2+(y+1)^2 \leqslant 5$; d) $P=(-1,0)$, $x^2+y^2-x-y \leqslant 0$.
7. Z punktu A okręgu $C(O,r)$ poprowadzono dwie prostopadłe cięciwy AB i AC. Udowodnij, że BC jest średnicą tego okręgu.
8. Na okręgu o promieniu r obrano trzy różne punkty i połączono je cięciwami. Udowodnij, że suma długości tych cięciw jest mniejsza od $6r$.
9. Na łańcuchu przymocowanym w punkcie S przy parkanie a uwiązana jest koza K (ryc. 8.24). Zaznacz obszar, z którego koza może wyskubać trawę.



Ryc. 8.24.

3. Odległość punktu od prostej

Odległością punktu od prostej nieprzechodzącej przez ten punkt nazywamy długość **najkrótszego** odcinka, którego jednym końcem jest dany punkt, zaś drugim – punkt należący do tej prostej (ryc. 8.25).



Ryc. 8.25.

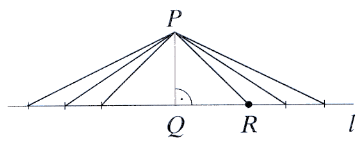
Odległością punktu od prostej przechodzącej przez ten punkt jest liczba 0 (ryc. 8.26).

Ryc. 8.26.

Twierdzenie

Odległość punktu P od prostej l (gdy $P \notin l$) równa jest długości odcinka **prostopadłego** do danej prostej, którego jednym końcem jest punkt P, a drugim – punkt należący do prostej l. Gdy $P \in l$, to odległość ta jest równa 0.

☐ Dowód. Niech PQ, gdzie $P \notin l$, $Q \in l$, będzie odcinkiem prostopadłym do prostej l. Dla każdego punktu R prostej l różnego od Q trójkąt PQR jest prostokątny. W trójkącie tym PQ jest przyprostokątną PR zaś – przeciwprostokątną. Stąd $PQ < PR$, bo $PQ^2 + QR^2 = PR^2$ (na mocy twierdzenia Pitagorasa).



Ryc. 8.27.

Gdy $P \in l$, to oczywiście odległość punktu P od prostej l jest równa 0.☐

Wiemy już, że każde równanie liniowe z dwiema niewiadomymi x i y, to jest równanie postaci $(*)$ $Ax + By + C = 0$, gdzie liczby A i B nie są jednocześnie równe zeru (co można zapisać $A^2 + B^2 \neq 0$), przedstawia linię prostą. Można również wykazać, że, na odwrót, każdą prostą płaszczyzny można przedstawić za pomocą równania $(*)$. Obecnie udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Odległość d punktu $P = (x_0, y_0)$ od prostej l o równaniu $Ax + By + C = 0$, gdzie $A^2 + B^2 \neq 0$ wyraża się wzorem

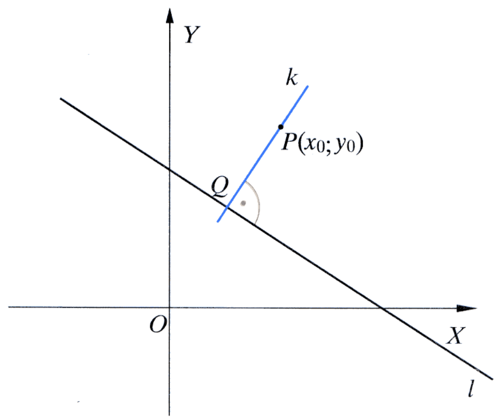
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

☐ Dowód. Załóżmy, że $B \neq 0$ i $A \neq 0$. Wtedy równanie $Ax + By + C = 0$ jest równoważne równaniu

(1) $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$.

– Piszemy równanie prostej k prostopadłej do prostej l i przechodzącej przez punkt P. Jest ono postaci:

(2) $y=\frac{B}{A}(x-x_0)+y_0$, bo $-\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=-1$.



Ryc. 8.28.

– Znajdujemy współrzędne punktu Q przecięcia się prostych k i l. W tym celu rozwiązujemy układ równań (1) i (2), a więc układ:

$$\begin{cases} y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \\ y=\frac{B}{A}(x-x_0)+y_0. \end{cases}$$

Otrzymujemy kolejno równoważne jemu układy równań:

$$\begin{cases} \frac{B}{A}(x-x_0)+y_0=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \\ y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{B}{A}x+\frac{A}{B}x=\frac{B}{A}x_0-y_0-\frac{C}{B} \\ y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{A^2+B^2}{AB}x=\frac{B}{A}x_0-y_0-\frac{C}{B} \\ y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{AB}{A^2+B^2}\left(\frac{B}{A}x_0-y_0-\frac{C}{B}\right) \\ y=-\frac{A}{B}\cdot\frac{AB}{A^2+B^2}\left(\frac{B}{A}x_0-y_0-\frac{C}{B}\right)-\frac{C}{B}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=\frac{B^2}{A^2+B^2}x_0-\frac{AB}{A^2+B^2}y_0-\frac{AC}{A^2+B^2} \\ y=-\frac{AB}{A^2+B^2}x_0+\frac{A^2}{A^2+B^2}y_0-\frac{BC}{A^2+B^2}. \end{cases}$$

Stąd

$$\begin{cases} x-x_0=-\frac{A^2}{A^2+B^2}x_0-\frac{AB}{A^2+B^2}y_0-\frac{AC}{A^2+B^2} \\ y-y_0=-\frac{AB}{A^2+B^2}x_0-\frac{B^2}{A^2+B^2}y_0-\frac{BC}{A^2+B^2} \end{cases}$$ i ostatecznie

$$\begin{cases} x-x_0=-\frac{A}{A^2+B^2}(Ax_0+By_0+C) \\ y-y_0=-\frac{B}{A^2+B^2}(Ax_0+By_0+C). \end{cases}$$

Wyznaczamy długość odcinka PQ (jest to szukana odległość punktu P od prostej l). Otrzymujemy:

$$PQ=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=$$

$$=\sqrt{\left(-\frac{A}{A^2+B^2}(Ax_0+By_0+C)\right)^2+\left(-\frac{B}{A^2+B^2}(Ax_0+By_0+C)\right)^2}=$$

$$=\sqrt{(Ax_0+By_0+C)^2\left(\frac{A^2}{(A^2+B^2)^2}+\frac{B^2}{(A^2+B^2)^2}\right)}=\sqrt{\frac{(Ax_0+By_0+C)^2}{A^2+B^2}}=$$

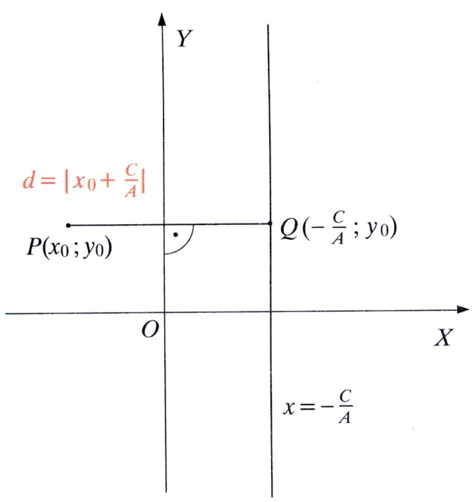
$$=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Załóżmy teraz, że $B=0$. Wtedy oczywiście $A\neq 0$. Równanie $Ax+By+C=0$ prostej l ma wówczas prostszą postać: $Ax+C=0$, czyli $x=-\frac{C}{A}$, a odległość d punktu $P(x_0,y_0)$ od prostej l wynosi

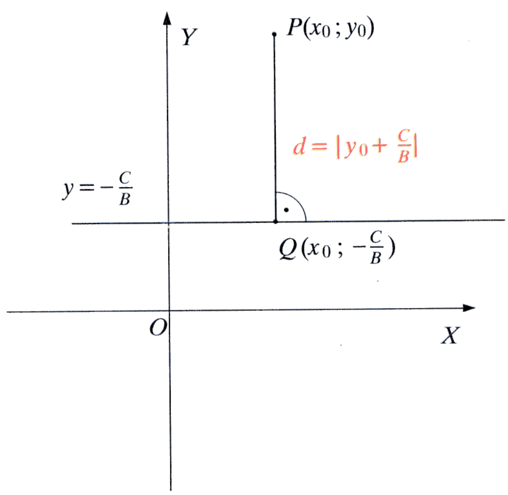
$$d=\left|x_0+\frac{C}{A}\right|=\frac{|Ax_0+C|}{|A|}=\frac{|Ax_0+0y_0+C|}{\sqrt{A^2+0^2}}\quad \text{(ryc. 8.29).}$$

Gdy wreszcie $A=0$, wtedy $B\neq 0$. Równanie $Ax+By+C=0$ prostej l ma postać $By+C=0$, to jest $y=-\frac{C}{B}$, natomiast odległość d punktu $P(x_0,y_0)$ od prostej l otrzymamy w następujący sposób:

$$d=\left|y_0+\frac{C}{B}\right|=\frac{|By_0+C|}{|B|}=\frac{|0x_0+By_0+C|}{\sqrt{0^2+B^2}}\quad \text{(ryc. 8.30).}\ \square$$



Ryc. 8.29.



Ryc. 8.30.

Przykład. Oblicz odległości punktu $P=(1,2)$ od prostej $3x-4y+1=0$.
Rozwiązanie:

Do wzoru

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

podstawiamy $x_0=1,\ y_0=2,\ A=3,\ B=-4,\ C=1$ i otrzymujemy

$$d=\frac{|3\cdot 1+(-4)\cdot 2+1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|3-8+1|}{\sqrt{25}}=\frac{4}{5}.$$

Odległość punktu od figury

Wiesz już, jak określić odległość punktu od prostej. A jak rozumieć odległość punktu od innego zbioru punktów?

Na przykład:

- odległość środka okręgu o promieniu r od tego okręgu jest równa r;
- odległość środka koła od tego koła jest równa zeru; podobnie odległość dowolnego punktu P okręgu $C(O,r)$ od koła $K(O,r)$ jest równa zeru.

Odległością punktu P od danego zbioru punktów (figury) jest liczba najmniejsza wśród odległości punktu P od każdego punktu tego zbioru. Gdy takiej liczby nie ma, problem ten jest bardziej skomplikowany i wykracza poza ramy naszego podręcznika, więc nim się zajmować nie będziemy.

Pytania i zadania

1. Jak określa się odległość punktu od prostej? Czym jest ta odległość?
2. Podaj wzór na odległość punktu $P=(x_0,y_0)$ od prostej o równaniu $Ax+By+C=0$, gdzie $A^2+B^2\neq 0$.
3. Wiemy, że punkt A leży wewnątrz prostokąta.
   a) Udowodnij, że suma odległości punktu A od boków prostokąta jest mniejsza od sumy odległości punktu A od wierzchołków tego prostokąta.
   b) Wykaż, że suma odległości punktu A od boków prostokąta jest równa połowie obwodu tego prostokąta.
4. Wiemy, że punkt A leży wewnątrz trójkąta. Udowodnij, że suma odległości punktu A od boków jest mniejsza od sumy odległości punktu A od wierzchołków tego trójkąta.
5. Wewnątrz trójkąta równobocznego obrano dowolnie punkt P. Wykaż, że suma odległości punktu P od boków tego trójkąta jest stała.

6*. Na prostokącie o bokach a i b opisano okrąg. Udowodnij, że suma kwadratów odległości każdego punktu tego okręgu od prostych zawierających boki tego prostokąta wynosi a^2+b^2.

7. Oblicz odległość punktu P od prostej, gdy:
   a) $P=(1,2)$, prosta ma równanie $3x-4y+1=0$,
   b) $P=(-2,3)$, prosta ma równanie $x-y+5=0$.

4. Wzajemne położenie okręgu i prostej

Posługując się pojęciem odległości punktu od prostej, zbadamy wzajemne położenie okręgu i prostej. Odległość środka okręgu od prostej może być:
a) większa od długości promienia okręgu,
b) równa długości promienia okręgu,
c) mniejsza od długości promienia okręgu.

Weźmy więc okrąg $C(O,r)$ i prosą l. Odległość punktu O od prostej l oznaczmy przez d.

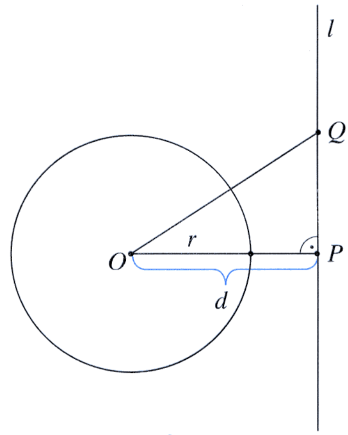
Twierdzenie 1.

Okrąg $C(O,r)$ i prosta l nie mają punktu wspólnego wtedy i tylko wtedy, gdy $d > r$.

□ Dowód.

a) Załóżmy, że prosta l i okrąg $C(O,r)$ nie mają punktu wspólnego. Oznacza to, że wszystkie punkty prostej l leżą poza okręgiem, a zatem ich odległości od jego środka są większe niż r. Wobec tego również odległość środka O tego okręgu od prostej l jest większa od r. Stąd $d > r$.

b) Na odwrót, niech $d > r$. Oznacza to, że najkrótszy z odcinków, których jednym końcem jest środek O okręgu C, a drugim – punkt prostej l, jest dłuższy od r. Dowodzi to, że wszystkie punkty prostej l są odległe od O o więcej niż r. Żaden z nich nie należy więc do okręgu C. Wobec tego prosta l i okrąg C nie mają punktu wspólnego. □



Ryc. 8.31.

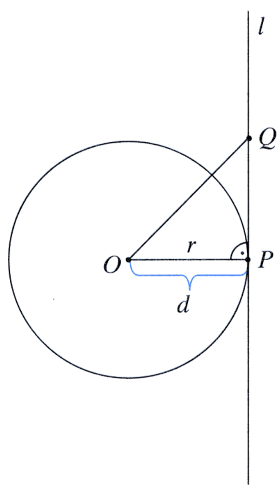
Twierdzenie 2.

Okrąg $C(O,r)$ i prosta l mają jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $d = r$.

□ Dowód.

a) Załóżmy, że prosta l i okrąg $C(O,r)$ mają jeden punkt wspólny P. Jego odległość od punktu O jest zatem równa długości promienia r. Każdy inny punkt $Q \neq P$ prostej l leży poza okręgiem C, więc jest odległy od O o więcej niż r. Oznacza to, że spośród wszystkich odcinków łączących środek O okręgu C z punktami prostej l odcinek OP jest najkrótszy. Stąd wynika, że $d = OP = r$.

b) Załóżmy, że $d = r$. Prowadząc ze środka O okręgu C prostą prostopadłą do l, otrzymamy punkt P wspólny prostej l i okręgu C. Wobec tego $OP = r$, czyli $OP = d$. Odległość każdego innego punktu Q prostej l od O jest większa od r (czyli $OQ > OP$), zatem punkt Q leży poza okręgiem C. Punkt P jest więc jedynym punktem wspólnym prostej l i okręgu C. □

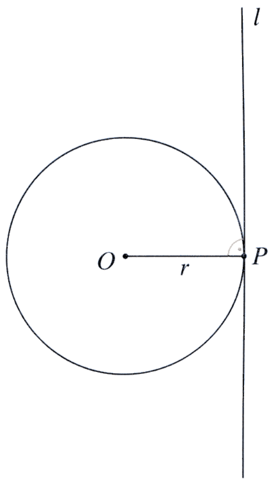


Ryc. 8.32.

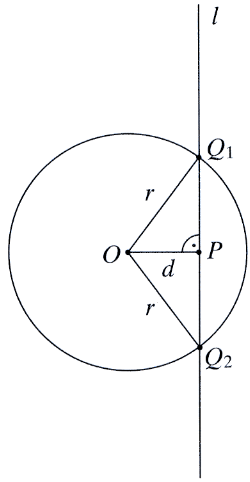
Prostą, która ma tylko jeden punkt wspólny z okręgiem, **nazywamy styczną do okręgu**, zaś punkt ten – ich **punktem styczności** (ryc. 8.33).

Wniosek 1. Promień okręgu poprowadzony do punktu styczności tego okręgu z prostą jest prostopadły do tej prostej.

Wniosek 2. Przez dany punkt okręgu można poprowadzić tylko jedną styczną.



Ryc. 8.33.



Ryc. 8.34.

Twierdzenie 3.

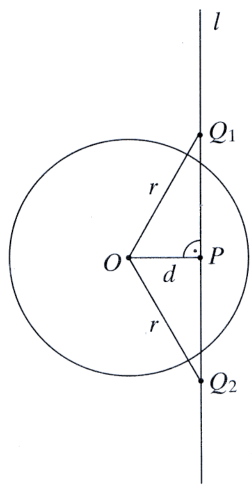
Okrąg $C(O,r)$ i prosta l mają dwa punkty wspólne wtedy i tylko wtedy, gdy $d<r$.

▢ Dowód.

a) Załóżmy, że okrąg C ma z prostą l dwa punkty wspólne: Q_1 i Q_2 (ryc. 8.34).
Wtedy $OQ_1 = OQ_2 = r$, natomiast $d = OP < OQ_1 = r$.
Wówczas rzeczywiście $d<r$.

b) Załóżmy teraz na odwrót, że $d<r$.

Odłóżmy na prostej l z obydwu stron punktu P odcinki PQ_1 i PQ_2 o długości r i połączmy ich końce Q_1 i Q_2 ze środkiem O okręgu C. Ponieważ $PQ_1 = PQ_2 = r$, więc $OQ_1 = OQ_2 > r$ (dlaczego?). Oznacza to, że punkty Q_1 i Q_2 leżą poza okręgiem C, ale jednocześnie punkt P leży wewnątrz koła o okręgu C (ryc. 8.35). Wobec tego oczywiste jest, że odcinki PQ_1 i PQ_2 mają z okręgiem po jednym punkcie wspólnym. Kończy to dowód twierdzenia, że prosta l ma z okręgiem C dwa punkty wspólne. ▢



Ryc. 8.35.

Prostą, która ma z okręgiem dwa punkty wspólne, nazywamy **sieczną** tego okręgu.

Przykład 1. Określ wzajemne położenie prostej o równaniu $2x-y+1=0$ i okręgu o równaniu $(x-1)^2+(y-2)^2=1$.

Rozwiązanie:

Okrąg ten ma promień 1, a środek w punkcie $(1,2)$. Odległość tego punktu od danej prostej wynosi

$$d=\frac{|2\cdot 1+(-1)\cdot 2+1|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}},$$

jest więc ona mniejsza od promienia naszego okręgu.

Wobec tego dana prosta przecina ten okrąg w dwóch punktach.

Przykład 2. Wykaż, że prosta o równaniu $x-y=0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2+y^2+2x-2y=0$.

Rozwiązanie:

Równanie

$x^2+y^2+2x-2y=0$ jest równoważne równaniu

$(x^2+2x+1)+(y^2-2y+1)=2$, czyli równaniu

$(x+1)^2+(y-1)^2=2$.

Przedstawia więc okrąg o środku $(-1,1)$ i promieniu $\sqrt{2}$. Odległość punktu $(-1,1)$ od prostej $x-y=0$ wynosi

$$d=\frac{|1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+0|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2},$$

czyli tyle, ile promień danego okręgu. Zatem prosta o równaniu $x-y=0$ jest styczna do okręgu o równaniu $x^2+y^2+2x-2y=0$.

Pytania i zadania

1. Omów wzajemne położenie okręgu i prostej.
2. Co to jest: a) styczna do okręgu, b) sieczna okręgu?
3. Jaki znasz związek między styczną do okręgu a promieniem poprowadzonym do punktu styczności?
4. Określ wzajemne położenie prostej i okręgu, mając ich równania:
   a) $x-y-1=0$ i $(x+1)^2+y^2=2$;
   b) $-2x+y-1=0$ i $(x-1)^2+(y+1)^2=4$;
   c) $x+y-1=0$ i $x^2+(y-3)^2=1$.
5. Wykaż, że wśród odcinków łączących dany punkt płaszczyzny z punktami okręgu najdłuższy jest ten odcinek, który przechodzi przez środek okręgu, a najkrótszy ten, którego przedłużenie przechodzi przez ten środek.
6. Udowodnij, że jeżeli dwie proste przechodzące przez punkt P poza danym okręgiem są styczne do tego okręgu w punktach A i B, to odcinki PA i PB są równej długości.

5. Wzajemne położenie dwóch okręgów

Dwa okręgi mające wspólny środek nazywają się, jak już wiemy, okręgami **współśrodkowymi** albo **koncentrycznymi**. Gdy dwa okręgi mają różne środki, to nazywamy je okręgami **niewspółśrodkowymi** albo **ekscentrycznymi**. Prostą, którą wyznaczają środki dwóch okręgów niewspółśrodkowych, nazywamy **linią środków** tych okręgów.

Zbadamy wzajemne położenie dwóch okręgów niewspółśrodkowych.

Rozważmy zatem dwa okręgi: $C_1(O_1, r_1)$ i $C_2(O_2, r_2)$ o różnych środkach O_1 i O_2, oraz liczby $r_1 - r_2$, $r_1 + r_2$ i O_1O_2 (odległość środków tych okręgów). Przyjmijmy też, dla ustalenia uwagi, że $r_1 > r_2$. Wzajemne położenie okręgów C_1 i C_2 określimy w zależności od tego, w jakiej odległości od siebie leżą ich środki, a dokładniej, w jakiej relacji pozostaje odległość O_1O_2 ich środków względem liczb $r_1 - r_2$ i $r_1 + r_2$.

Ponieważ zawsze $r_1 - r_2 < r_1 + r_2$, więc rozważać będziemy następujące związki: $O_1O_2 < r_1 - r_2$; $O_1O_2 = r_1 - r_2$; $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$; $O_1O_2 = r_1 + r_2$; $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

Oczywiście, gdy $r_1 = r_2$, to pierwszych dwóch z wymienionych związków nie rozpatrujemy, gdyż $O_1 \neq O_2$, zaś w trzecim związku lewa nierówność jest oczywista.

Wzajemne położenie dwóch okręgów sformułujemy w postaci kilku twierdzeń.

Twierdzenie 1.

Okręgi C_1 i C_2 nie mają punktu wspólnego wtedy i tylko wtedy, gdy $O_1O_2 < |r_1 - r_2|$ lub $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

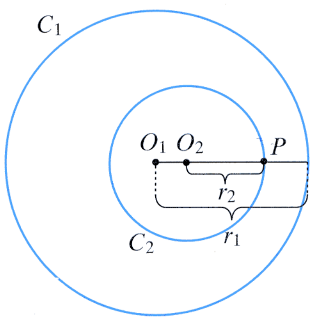
☐ Dowód. Załóżmy najpierw, że okręgi C_1 i C_2 nie mają punktu wspólnego. Wtedy:
a) albo okrąg C_2 leży wewnątrz koła o okręgu C_1 (ryc. 8.36),
b) albo okręgi te leżą jeden na zewnątrz drugiego (ryc. 8.37.).

W przypadku pierwszym wszystkie punkty okręgu C_2 są odległe od O_1 o mniej niż r_1, a więc także punkt P okręgu C_2 i linii środków O_1 i O_2.

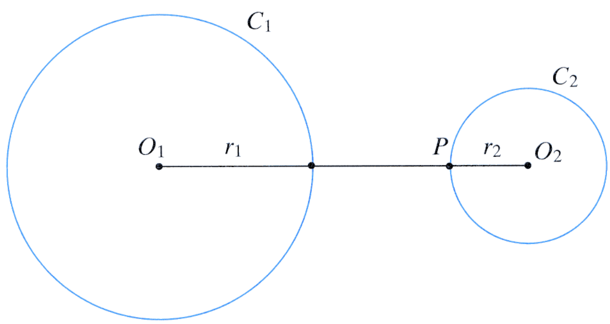
Stąd $O_1O_2 = O_1P - O_2P < r_1 - O_2P = r_1 - r_2$.

W przypadku drugim wszystkie punkty okręgu C_2 są odległe od O_1 o więcej niż r_1, a więc także punkt P okręgu O_2 i linii środków O_1 i O_2.

Wobec tego $O_1O_2 = O_1P + PO_2 > r_1 + PO_2 = r_1 + r_2$.



Ryc. 8.36.



Ryc. 8.37.

Załóżmy teraz, na odwrót, że $O_1O_2 < r_1 - r_2$ lub $O_1O_2 > r_1 + r_2$.

Niech P będzie nadal punktem okręgu C_2 i linii środków O_1 i O_2 okręgów C_1 i C_2.

W przypadku pierwszym $O_1P = O_1O_2 + O_2P < r_1 - r_2 + r_2 = r_1$, więc punkt P leży wewnątrz koła o okręgu C_1. Ale odcinek O_1P jest najdłuższy spośród wszystkich odcinków łączących środek O_1 z punktami okręgu O_2 (zad. 5, str. 323), wobec tego dla każdego punktu Q różnego od P okręgu C_2 zachodzi nierówność $O_1Q < O_1P < r_1$. Zatem okrąg C_2 leży wewnątrz koła o okręgu C_1.

W przypadku drugim $O_1P = O_1O_2 - PO_2 > r_1 + r_2 - r_2 = r_1$, przy czym odcinek O_1P jest najkrótszy spośród wszystkich odcinków łączących środek O_1 z punktami okręgu C_2. Zatem dla każdego innego punktu Q okręgu C_2 zachodzi nierówność $O_1Q > O_1P > r$. Oznacza to, że okręgi C_1 i C_2 leżą jeden na zewnątrz drugiego. ▢

Twierdzenie 2.

Okręgi C_1 i C_2 mają jeden punkt wspólny wtedy i tylko wtedy, gdy $O_1O_2 = r_1 - r_2$ lub $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

▢ Dowód. Załóżmy najpierw, że okręgi C_1 i C_2 mają jeden punkt wspólny. Niech będzie nim punkt P.

Wtedy:

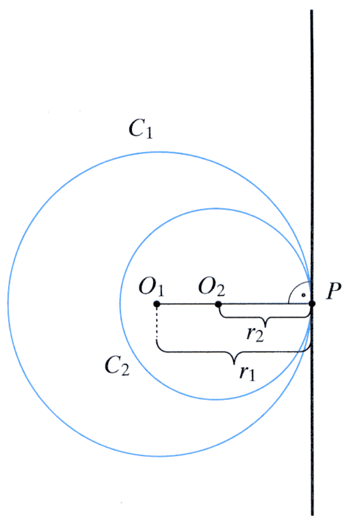
a) albo okrąg C_2 leży wewnątrz koła o okręgu C_1 (ryc. 8.38),

b) albo okręgi te leżą jeden na zewnątrz drugiego (ryc. 8.39).

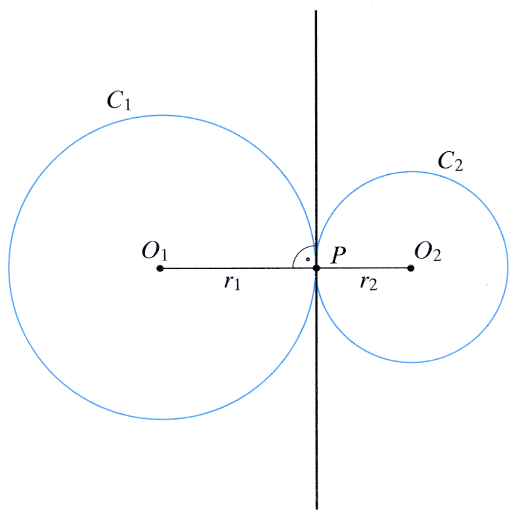
Poprowadźmy wspólną styczną do tych okręgów w punkcie P. Ponieważ odcinki O_1P i O_2P są do niej prostopadłe (dlaczego?), więc punkty O_1, O_2 i P leżą na jednej prostej. Ponadto mamy: w przypadku pierwszym $O_1O_2 = O_1P - O_2P = r_1 - r_2$, zaś w przypadku drugim $O_1O_2 = O_1P + PO_2 = r_1 + r_2$.

Załóżmy teraz, na odwrót, że $O_1O_2 = r_1 - r_2$ lub $O_1O_2 = r_1 + r_2$.

Niech P będzie punktem wspólnym okręgu C_2 i linii środków O_1 i O_2 okręgów C_1 i C_2.



Ryc. 8.38.



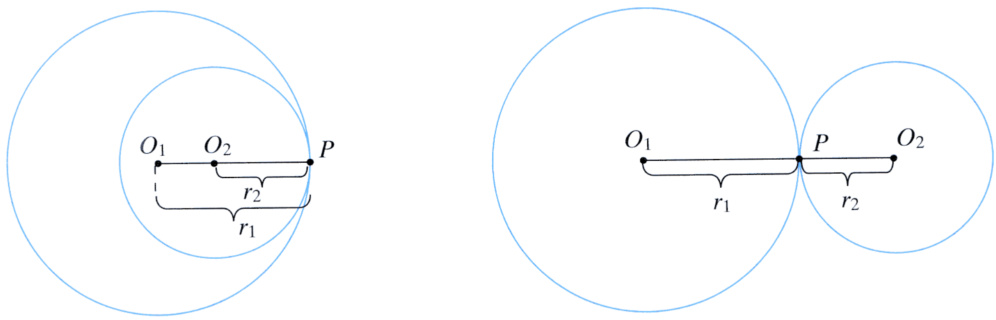
Ryc. 8.39.

Wówczas:

- w przypadku pierwszym otrzymamy $O_1P = O_1O_2 + O_2P = r_1 - r_2 + r_2 = r_1$, czyli $O_1P r_1$. Dowodzi to, że punkt P leży na okręgu C_1, jest więc punktem wspólnym okręgów C_1 i C_2. Wiemy jednak, że O_1P jest najdłuższy z odcinków łączących O_1 z punktami okręgu C_2. Zatem dla każdego innego punktu Q okręgu C_2 zachodzi $O_1Q < O_1P = r_1$, co oznacza, że punkt Q leży wewnątrz koła o okręgu C_1. Okręgi C_1 i C_2 mają więc tylko jeden punkt wspólny P.
- w przypadku drugim otrzymujemy $O_1P = O_1O_2 - PO_2 = r_1 + r_2 - r_2 = r_1$. Ponieważ odcinek O_1P jest najkrótszy spośród wszystkich odcinków łączących środek O_1 z punktami okręgu C_2, więc dla każdego innego punktu Q okręgu C_2 zachodzi $O_1Q > O_1P = r_1$. Zatem punkt P jest jedynym punktem wspólnym okręgów C_1 i C_2. ▢

!

Dwa okręgi mające jeden punkt wspólny nazywamy okręgami **stycznymi wewnętrznie**, gdy jeden z nich leży **wewnątrz** koła o drugim okręgu, a **stycznymi zewnętrznie**, gdy jeden z nich leży **na zewnątrz** drugiego.



okręgi styczne wewnętrznie

okręgi styczne zewnętrznie

Ryc. 8.40.

Wniosek. Punkt styczności pary okręgów stycznych leży na linii środków tych okręgów.

Twierdzenie 3.

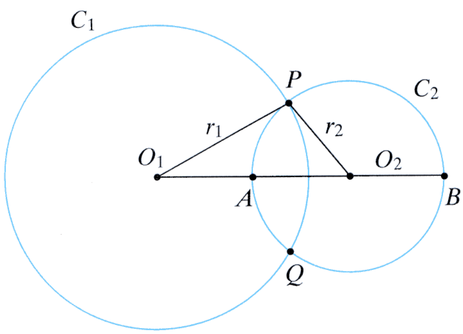
Okręgi C_1 i C_2 przecinają się w dwóch punktach wtedy i tylko wtedy, gdy $|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$.

▢ Dowód. Załóżmy, że okręgi C_1 i C_2 przecinają się w dwóch punktach. Niech punktami tymi będą P i Q (ryc. 8.41).

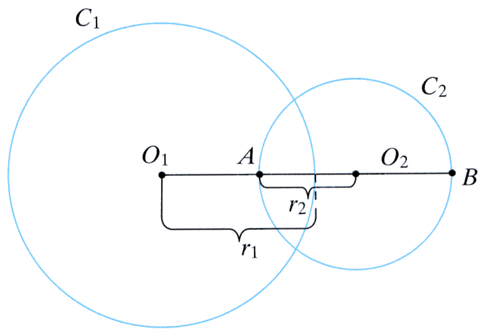
Połączmy środki O_1 i O_2 tych okręgów z punktem P. Otrzymujemy trzy niewspółliniowe punkty: O_1, O_2 i P. Stąd wynika, że $O_1O_2 < O_1P + O_2P = r_1 + r_2$ oraz $O_1O_2 > O_1P - O_2P = r_1 - r_2$.

Dlatego $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$.

Załóżmy teraz, że $r_1 - r_2 < O_1O_2 < r_1 + r_2$ (ryc. 8.42).



Ryc. 8.41.



Ryc. 8.42.

Jeżeli $O_1O_2 > r_1 - r_2$, to oznaczywszy punkty przecięcia linii środków tych okręgów z okręgiem C_2 przez A i B, otrzymamy $O_2B = r_2$, więc $O_1O_2 > r_1 - O_2B$, skąd $O_1O_2 + O_2B > r_1$ i ostatecznie $O_1B > r_1$, co dowodzi, że punkt B leży poza okręgiem C_1. Jednocześnie mamy $O_1O_2 < r_1 + r_2$, skąd (po założeniu, że $O_1O_2 > r_2$) otrzymujemy $O_1O_2 - r_2 < r_1$, czyli $O_1A < r_1$. Oznacza to, że punkt A leży wewnątrz koła o okręgu C_1. Widzimy zatem, że łuki $\overset{\frown}{AB}$ okręgu C_2 przecinają okrąg C_1 w dwóch punktach po obu stronach linii środków tych okręgów. Gdyby się okazało, że $O_1O_2 = r_2$, to punkt A musiałby być środkiem okręgu C_1. Gdyby wreszcie okazało się, że $O_1O_2 < r_2$, wtedy $O_1A = O_2A - O_1O_2 < O_2A$, skąd $O_1A < r_2$, a więc również $O_1A < r_1$, bo $r_2 < r_1$. Zatem w obu przypadkach punkt A leży wewnątrz koła o okręgu C_1, czyli znowu łuki $\overset{\frown}{AB}$ okręgu C_2 przecinają okrąg C_1 w dwóch punktach po różnych stronach linii środków O_1 i O_2 okręgów C_1 i C_2.

Okręgi C_1 i C_2 przecinają się więc w dwóch punktach. □

Wniosek. Wspólne punkty pary przecinających się okręgów leżą symetrycznie względem linii środków tych okręgów.

Uwaga. W powyższych twierdzeniach zakładaliśmy, że $r_1 \neq r_2$ (a dokładniej, że $r_1 > r_2$). Jakie zatem otrzymalibyśmy warunki wzajemnego położenia dwóch okręgów o **różnych** środkach i równych promieniach?

Przykład 1. Określ wzajemne położenie okręgów o równaniach

$(x-1)^2 + y^2 = 4$ i $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Rozwiązanie:

Środkami tych okręgów są odpowiednio punkty $O_1 = (1, 0)$ i $O_2 = (0, 1)$, zaś promienie tych okręgów wynoszą odpowiednio $r_1 = 2$ i $r_2 = 1$.

Obliczamy: $O_1O_2 = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$, $r_1 - r_2 = 1$, $r_1 + r_2 = 3$.

Widzimy zatem, że $r_1 - r_2 < O_1O_2 < 3$, więc okręgi te się przecinają.

Przykład 2. Wykaż, że okręgi o równaniach $x^2 + y^2 - 2x = 0$ i $x^2 + y^2 - 12x + 24y + 36 = 0$ są styczne.

Rozwiązanie:

Równanie $x^2 + y^2 - 2x = 0$ jest równoważne równaniu $(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$, a więc równaniu $(x-1)^2 + y^2 = 1$. Zatem opisuje okrąg o środku $O_1 = (1, 0)$ i promieniu 1.

Równanie $x^2+y^2-12x+24y+36=0$ jest równoważne równaniu $\left(x^2-12x+36\right)+\left(y^2+24y+144\right)^2=144$, czyli równaniu $(x-6)^2+(y+12)^2=144$; opisuje więc okrąg o środku $O_2=(6,-12)$ i promieniu $r_2=12$.

Obliczamy: $O_1O_2=\sqrt{(1-6)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$, $r_1+r_2=1+12=13$.

Zatem $O_1O_2=r_1+r_2$, co oznacza, że okręgi te są styczne zewnętrznie.

Pytania i zadania

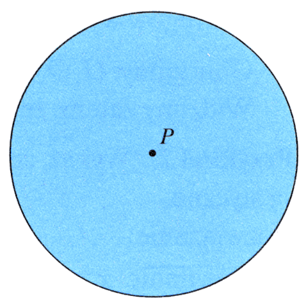
1. Podaj wzajemne położenie dwóch niewspółśrodkowych okręgów o różnych promieniach.
2. Sformułuj i udowodnij warunki wzajemnego położenia dwóch niewspółśrodkowych okręgów o równych promieniach.
3. Określ wzajemne położenie okręgów $C_1(O_1,r_1)$ i $C_2(O_2,r_2)$, gdy
   a) $O_1O_2=4$, $r_1=3$, $r_2=1$;
   b) $O_1O_2=8$, $r_1=3$, $r_2=1$;
   c) $O_1O_2=5$, $r_1=7$, $r_2=2$;
   d) $O_1O_2=8$, $r_1=3$, $r_2=5$;
   e) $O_1O_2=4$, $r_1=2$, $r_2=3$.
4. Określ wzajemne położenie okręgów:
   a) $(x-1)^2+(y+2)^2=25$, $(x+2)^2+(y-2)^2=4$;
   b) $x^2+y^2-4x+2y-4=0$, $x^2+y^2+4x-4y-56=0$.
5. Środki trzech okręgów parami zewnętrznie stycznych są wierzchołkami trójkąta o bokach 3, 5 i 6. Oblicz promienie tych okręgów.
6. Okręgi $C_1(O_1,r_1)$ i $C_2(O_2,r_2)$ są styczne zewnętrznie, a jednocześnie każdy z nich jest styczny wewnętrznie do okręgu $C_3(O_3,r_3)$. Wiedząc, że $O_1O_2=2{,}5$; $O_1O_3=2$ i $O_2O_3=1{,}5$; oblicz r_1, r_2 i r_3.

6. Brzeg, wnętrze i zewnętrze figury. Figury ograniczone

Niech P będzie dowolnym punktem płaszczyzny.

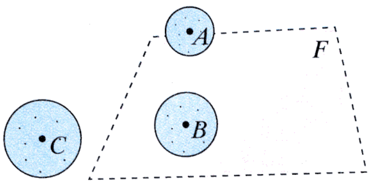
Otoczeniem punktu P na płaszczyźnie nazywamy wnętrze koła o środku P i dowolnym promieniu r.

Każdy punkt ma więc dowolnie wiele otoczeń. Rysując jakikolwiek okrąg o środku P, wyznaczamy pewne otoczenie punktu P (ryc. 8.43).

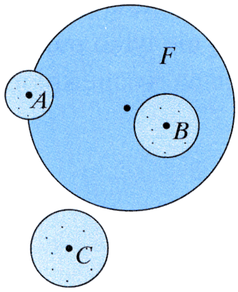


Ryc. 8.43.

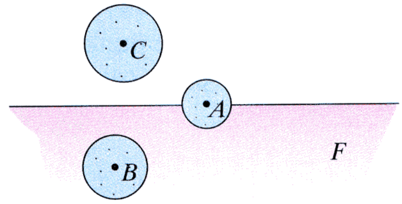
Rozważmy teraz dowolną figurę F na płaszczyźnie.



Ryc. 8.44.



Ryc. 8.45.



Ryc. 8.46.

Punktem brzegowym figury nazywamy taki punkt, w którego każdym otoczeniu znajdują się zarówno punkty tej figury, jak i punkty spoza niej.

!

Zbiór punktów brzegowych figury nazywamy jej **brzegiem**.

Na rycinach 8.44, 8.45, 8.46 punktem brzegowym figury F jest punkt A.

Wniosek. Punkt brzegowy figury może do niej należeć lub nie należeć.

Punktem wewnętrznym figury nazywamy punkt, którego pewne otoczenie zawiera się w tej figurze.

!

Zbiór punktów wewnętrznych figury nazywamy jej **wnętrzem**.

Na rycinach 8.44, 8.45, 8.46, punktem wewnętrznym figury F jest punkt B.

Wniosek. Punkt wewnętrzny figury zawsze do niej należy.

Punktem zewnętrznym figury nazywamy punkt, w którego pewnym otoczeniu nie ma punktów tej figury.

!

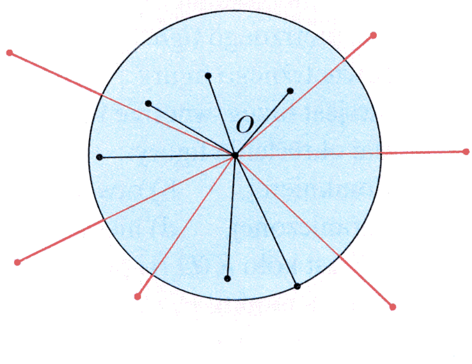
Zbiór punktów zewnętrznych figury nazywamy jej **zewnętrzem**.

Na rycinach 8.44, 8.45, 8.46 punktem zewnętrznym figury F jest punkt C.

Wniosek. Punkt zewnętrzny figury nie należy do niej.

Przykład 1. Rozważmy koło o środku O i promieniu r.

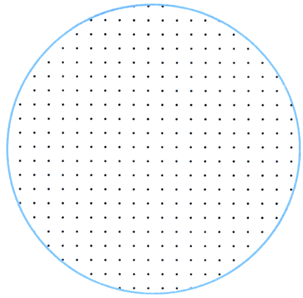
Brzegiem koła jest okrąg, wnętrzem – zbiór punktów, których odległości od środka są mniejsze od długości promienia, zaś zewnętrzem – zbiór punktów, których odległości od środka są więsze od długości promienia (ryc. 8.47).



Ryc. 8.47.

Przykład 2. Rozważmy tak zwane koło-sito (modelem takiego koła jest np. sitko maszynki do mielenia mięsa) (ryc. 8.48).

Punktami brzegowymi koła-sita są nie tylko punkty okręgu tego koła, ale także punkty oznaczone na rycinie kolorem czarnym („otwory sita") (dlaczego?).



Ryc. 8.48.

Figurę nazywamy **domkniętą**, gdy należą do niej wszystkie jej punkty brzegowe. Figurę nazywamy **otwartą**, gdy nie należy do niej żaden jej punkt brzegowy.

Przykłady:

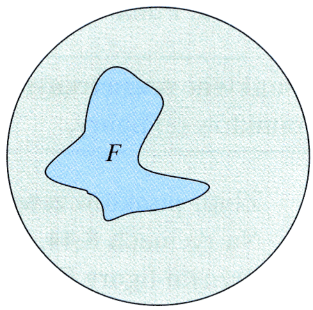
1. Koło jest figurą domkniętą.
2. Wnętrze koła jest figurą otwartą.
3. Koło-sito nie jest figurą ani otwartą, ani domkniętą.

Figury ograniczone

Figurę płaską nazywamy **ograniczoną**, gdy zawiera się ona w pewnym kole (ryc. 8.49). Figurę, która nie zawiera się w żadnym kole, nazywamy **nieograniczoną**.

Przykłady:

1. Odcinek, okrąg, koło są figurami ograniczonymi.
2. Półprosta, prosta, półpłaszczyzna, płaszczyzna są figurami nieograniczonymi.



Ryc. 8.49.

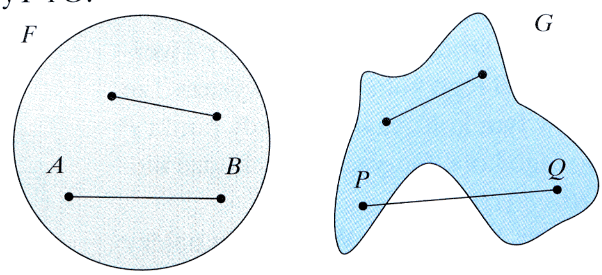
Pytania i zadania

1. Co to jest otoczenie punktu?
2. Podaj określenie punktu:
   a) brzegowego figury,
   b) wewnętrznego figury,
   c) zewnętrznego figury.
3. Co to jest brzeg, wnętrze i zewnętrze figury?
4. Podaj określenie figury:
   a) domkniętej, b) otwartej,
   c) ograniczonej, d) nieograniczonej.
5. Dane jest koło $K(O, r)$ i punkt wewnętrzny tego koła P różny od O. Wyznacz wszystkie otoczenia punktu P, zawarte w danym kole.
6. Wskaż brzeg, wnętrze i zewnętrze:
   a) wycinka koła, b) odcinka koła.

7. Różnicę koła o promieniu R i wnętrza koła współśrodkowego o promieniu r mniejszym niż R nazywamy **pierścieniem kołowym**. Narysuj dowolny pierścień kołowy i wskaż jego brzeg, wnętrze oraz zewnętrze.
8. Wykaż, że jeżeli figura F zawiera półprostą, to jest figurą nieograniczoną.
9. Wykaż, że jeżeli figura F zawiera się w figurze ograniczonej, to jest figurą ograniczoną.
10. Na kwadracie o boku a opisano koło oraz w kwadrat ten wpisano koło. Oblicz pole otrzymanego pierścienia kołowego.
11. Na trójkącie równobocznym o boku a opisano koło oraz w trójkąt ten wpisano koło. Oblicz pole otrzymanego pierścienia kołowego.
12. Średnica zewnętrznego toru kołowej bieżni wynosi 128 m, zaś średnica wewnętrznego toru 120 m. Wyznacz miejsca startu zawodników biegnących po torze zewnętrznym, środkowym i wewnętrznym w wyścigu na jedno okrążenie tak, aby zawodnicy mieli wspólną metę.

7. Wypukłość i wklęsłość figury

Rozważmy figury F i G.



Ryc. 8.50.

Połączmy odcinkiem dowolne dwa punkty figury F oraz dowolne dwa punkty figury G (ryc. 8.50). Widzimy, że odcinki o końcach w punktach figury F zawierają się w tej figurze, znajdziemy natomiast takie punkty figury G, że odcinek o końcach w tych punktach nie będzie się całkowicie zawierał w tej figurze. O figurze F powiemy, że jest figurą wypukłą, zaś o figurze G, że nie jest figurą wypukłą (albo że jest figurą wklęsłą).

Figurę nazywamy **wypukłą**, gdy każdy odcinek o końcach w tej figurze zawiera się w tej figurze.

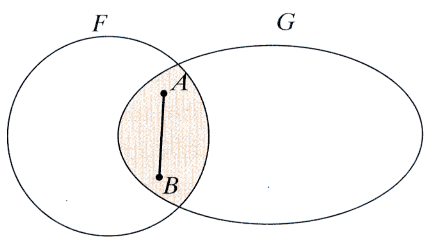
!

Wniosek 1. Prosta, odcinek, półprosta, płaszczyzna, półpłaszczyzna są figurami wypukłymi.

Wniosek 2. Część wspólna dwóch figur wypukłych jest figurą wypukłą.

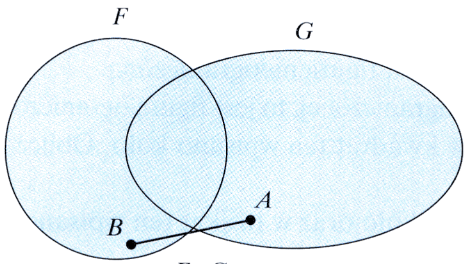
▢ Dowód. Istotnie, odcinek łączący dowolne dwa punkty wspólnej części figur wypukłych, zawierając się w każdej z tych figur, zawiera się w ich części wspólnej (ryc. 8.51). ▢

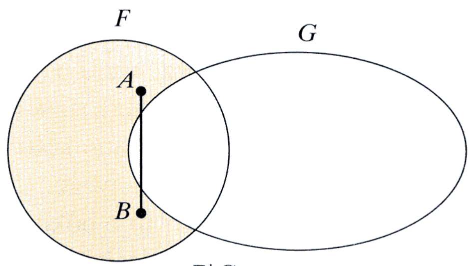
Uwaga. Suma i różnica dwóch figur wypukłych może nie być figurą wypukłą (ryc. 8.52).



Ryc. 8.51.

Ryc. 8.52.



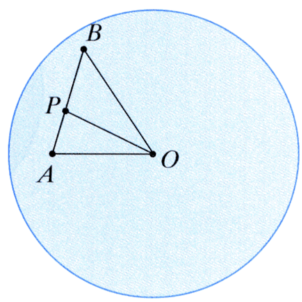


Figurę, która nie jest wypukła, nazywamy **figurą wklęsłą**.

Twierdzenie

Koło jest figurą wypukłą.

Dowód. Rozważmy koło o środku O i promieniu r i weźmy dowolne dwa punkty A i B tego koła. Należy wykazać, że odcinek AB zawiera się w tym kole, czyli że każdy punkt P tego odcinka należy do tego koła. Oczywiście zachodzą nierówności $AO \leqslant r$ i $OB \leqslant r$ (ryc. 8.53).

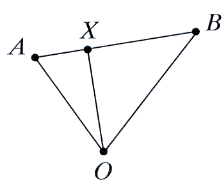


Ryc. 8.53.

Musimy zatem wykazać, że $PO \leqslant r$. W tym celu należy udowodnić następujący lemat (twierdzenie pomocnicze).

Lemat. Jeżeli X jest dowolnym punktem odcinka AB, zaś O jest dowolnym punktem, to
$(*)$ $OA \geqslant OX$ lub $OB \geqslant OX$.

Dowód lematu. Jeśli $X = A$ lub $X = B$, to oczywiście jedna z nierówności $(*)$ zachodzi. Niech zatem X będzie punktem wewnętrznym odcinka AB (ryc. 8.54). Gdybyśmy założyli, że $OX > OA$ i $OX > OB$, wtedy oba punkty A i B musiałyby leżeć wewnątrz koła o środku O i promieniu OX. Przedłużenie odcinka AB poza punkt B musiałoby więc wówczas przecinać okrąg o środku O i promieniu OX w pewnym punkcie Y. I wobec tego półprosta o początku w punkcie A leżącym wewnątrz koła o tym okręgu przecinałaby ten okrąg w dwóch punktach (X i Y), a to jest niemożliwe. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że nie mogą zachodzić jednocześnie nierówności $OX > OA$ i $OX > OB$. Zatem jest $OX \leqslant OA$ lub $OX \leqslant OB$.



Ryc. 8.54.

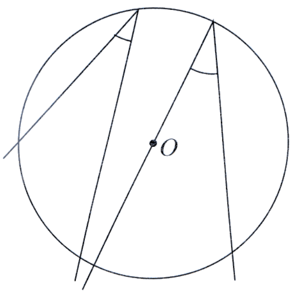
Wracamy o dowodu twierdzenia. Ponieważ $OP \leqslant OA$ lub $OP \leqslant OB$, więc rzeczywiście $OP \leqslant r$, gdyż $OA \leqslant r$ i $OB \leqslant r$.

Pytania i zadania

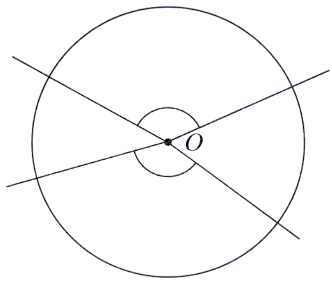
1. Jaką figurę nazywamy wypukłą, a jaką wklęsłą?
2. Podaj przykłady figur wypukłych i figur wklęsłych.
3. Czy okrąg jest figurą wypukłą?
4. Czy koło-sito jest figurą wypukłą?
5. Wykaż, że wnętrze koła jest figurą wypukłą.
6. Czy część wspólna dwóch figur wklęsłych może być figurą wypukłą? Czy suma bądź różnica takich figur mogą być figurą wypukłą?

8. Kąty w kole

W kole wyróżniamy dwa rodzaje kątów:
- kąty, których wierzchołki leżą na okręgu tego koła, a ramionami są półproste zawierające jego cięciwy (ryc. 8.55),
- kąty, których wierzchołkiem jest środek koła, a ramionami są półproste zawierające jego promienie (ryc. 8.56).



Ryc. 8.55.

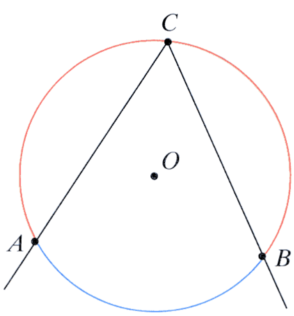


Ryc. 8.56.

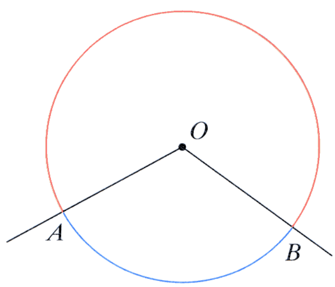
Kąt, którego wierzchołek leży na okręgu koła, a ramionami są półproste zawierające dwie cięciwy, nazywamy **kątem wpisanym**, kąt zaś, którego wierzchołkiem jest środek koła, a ramionami są półproste zawierające promienie tego koła, nazywamy **kątem środkowym**.

Na rycinie 8.57 widzimy kąt wpisany ACB. O łuku $\overset{\frown}{AB}$ mówimy, że jest łukiem, na którym **oparty** jest kąt ACB, zaś o łuku $\overset{\frown}{ACB}$ mówimy, że **obejmuje** kąt ACB.

Podobnie mówimy o łuku $\overset{\frown}{AB}$ w przypadku kąta środkowego AOB (ryc. 8.58).

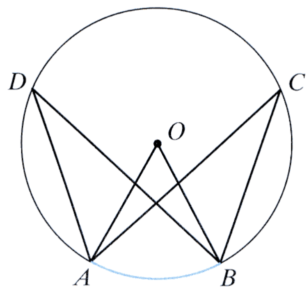


Ryc. 8.57.

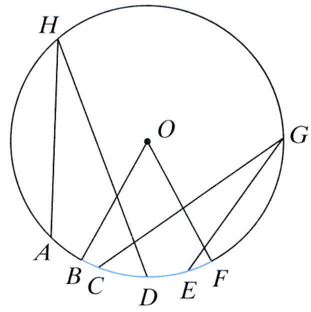


Ryc. 8.58.

Kąty wpisane w koło i kąty środkowe tego koła mogą być oparte na tym samym łuku okręgu tego koła, jak na przykład kąty ACB, ADB i AOB (ryc. 8.59); mogą też być oparte na różnych łukach okręgu tego koła, jak na przykład kąty AHD, BOF i CGE (ryc. 8.60).



Ryc. 8.59.



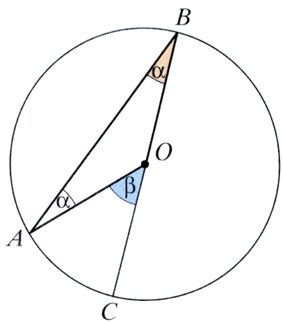
Ryc. 8.60.

Sformułujemy i udowodnimy teraz szereg twierdzeń o kątach w kole.

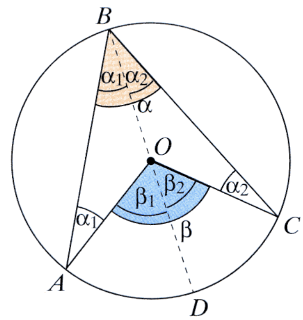
Twierdzenie

Kąt wpisany równy jest połowie kąta środkowego opartego na tym samym łuku.

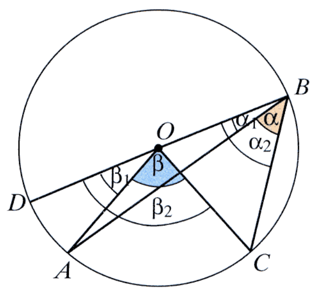
□ Dowód. Możliwe są tutaj trzy przypadki:



Ryc. 8.61.



Ryc. 8.62.



Ryc. 8.63.

a) Jedno z ramion kąta wpisanego przechodzi przez środek koła (ryc. 8.61). Połączmy punkt A ze środkiem O koła. Otrzymamy trójkąt równoramienny AOB, w którym kąty OAB i OBA są równe (jako kąty przy podstawie tego trójkąta), a kąt AOC jest kątem zewnętrznym tego trójkąta. Wobec tego $\beta = \alpha + \alpha = 2\alpha$, skąd $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

b) Środek koła leży wewnątrz kąta wpisanego. Poprowadźmy przez punkt B średnicę BD i połączmy punkty A i C ze środkiem koła (ryc. 8.62). Wówczas na podstawie rozważonego już poprzednio przypadku otrzymujemy:
$\beta = \beta_1 + \beta_2 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 2\alpha$, skąd $\alpha = \frac{1}{2}\beta$.

c) Środek koła leży poza kątem wpisanym. Podobnie jak poprzednio, prowadzimy średnicę BD oraz łączymy punkty A i C ze środkiem koła (ryc. 8.63). Wówczas na mocy pierwszego przypadku mamy:
$\beta = \beta_2 - \beta_1 = 2\alpha_2 - 2\alpha_1 = 2(\alpha_2 - \alpha_1) = 2\alpha$, skąd $\alpha = \frac{1}{2}\beta$. □

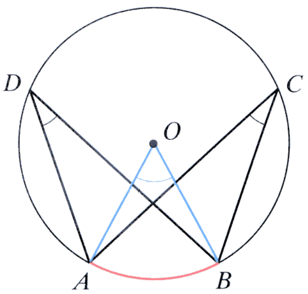
Z twierdzenia tego wynikają następujące wnioski.

Wniosek 1. Kąty wpisane oparte na tym samym łuku są równe.
▢ Dowód. Wystarczy dorysować kąt środkowy oparty na łuku, na którym oparte są kąty wpisane (ryc. 8.64). ▢

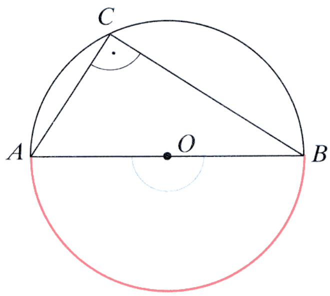
Wniosek 2. Kąt wpisany oparty na półokręgu jest prosty.
▢ Dowód. Rzeczywiście, kąt wpisany oparty na półokręgu jest połową kąta środkowego, opartego na tym półokręgu, a ten kąt środkowy jest przecież kątem półpełnym (ryc. 8.65). ▢

Uwaga. O kącie wpisanym opartym na półokręgu mówimy też, że oparty jest na średnicy.

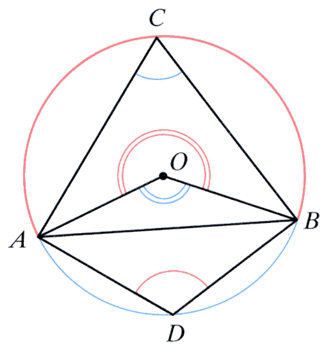
Wniosek 3. Kąty wpisane w koło, oparte na łukach okręgu tego kąta dopełniających się do całego okręgu, dopełniają się do kąta półpełnego.
▢ Dowód. Rozważmy dwa takie kąty, na przykład kąty ACB i ADB oparte na łukach, odpowiednio $\overset{\frown}{ACB}$ i $\overset{\frown}{ADB}$. Kąty te są połówkami kątów środkowych – wypukłego AOB i wklęsłego AOB, których suma jest kątem pełnym, stąd teza (ryc. 8.66). ▢



Ryc. 8.64.



Ryc. 8.65.



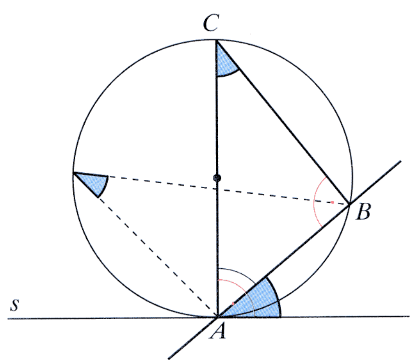
Ryc. 8.66.

Twierdzenie (o kącie między styczną i cięciwą)

Kąt między styczną do okręgu i cięciwą przechodzącą przez punkt styczności jest równy kątowi wpisanemu opartemu na tym samym łuku co cięciwa i znajdującemu się po drugiej niż ten łuk stronie cięciwy.

▢ Dowód. Przez punkt A okręgu poprowadźmy styczną s do tego okręgu i cięciwę AB.

Rozważmy kąt wpisany oparty na łuku $\overset{\frown}{AB}$, którego jedno z ramion zawiera średnicę okręgu. (Czy domyślasz się, dlaczego wystarczy rozważyć taki kąt?). Oznaczmy przez C koniec średnicy poprowadzonej z punktu A (ryc. 8.67). Oczywiście kąty ABC i kąt między styczną s i średnicą AC są proste. A równość kątów ACB i kąta między styczną s i cięciwą AB wynika stąd, że kąty te dopełnia do kąta prostego ten sam kąt, a mianowicie BAC. ▢



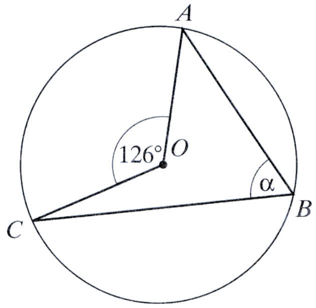
Ryc. 8.67.

Kąt między styczną i cięciwą często nazywany bywa też kątem **dopisanym.**

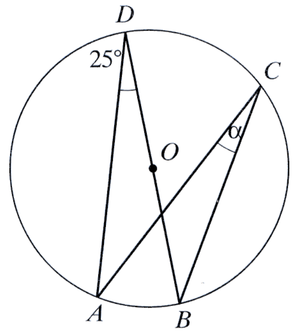
Przykład 1. Ile stopni ma kąt ABC?

Rozwiązanie:

Kąt ABC jest wpisany i oparty na tym samym łuku $\overset{\frown}{AC}$, co kąt środkowy AOC. Stąd $\alpha = \frac{1}{2} \cdot 126^\circ = 63^\circ$ (ryc. 8.68).



Ryc. 8.68.



Ryc. 8.69.

Przykład 2. Ile stopni ma kąt ACB?

Rozwiązanie:

Kąt wpisany ACB oparty jest na tym samym łuku, co kąt wpisany ADB, mający 25°. Wobec tego $\alpha = 25^\circ$ (ryc. 8.69).

Przykład 3. Wyznacz $\alpha + \beta$.

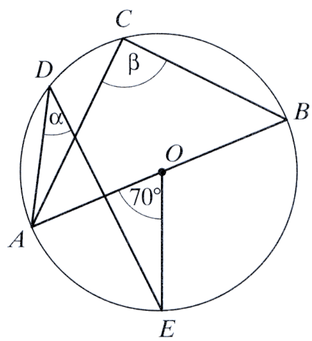
Rozwiązanie:

Kąt ADE jest wpisany i oparty na tym samym łuku, co kąt środkowy AOE, mający 70°, więc $\alpha = 35^\circ$. Ponadto kąt ACB jest kątem wpisanym opartym na średnicy, stąd $\beta = 90^\circ$. Zatem $\alpha + \beta = 125^\circ$ (ryc. 8.70).

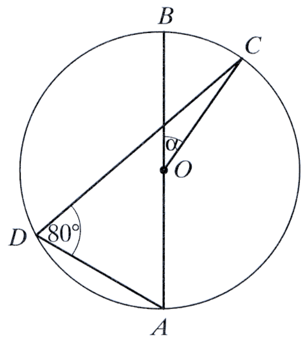
Przykład 4. Ile stopni ma kąt BOC?

Rozwiązanie:

Kąt BOC jest przyległy do kąta środkowego AOC opartego na tym samym łuku, co kąt wpisany ADC, mający 80°. Zatem $\alpha = 180^\circ - 2 \cdot 80^\circ = 20^\circ$ (ryc. 8.71).



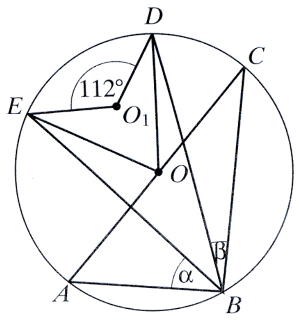
Ryc. 8.70.



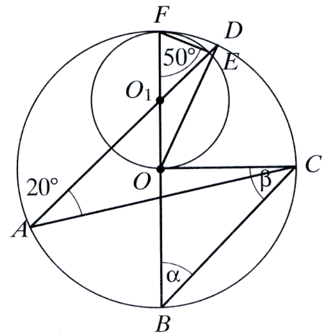
Ryc. 8.71.

Przykład 5. Wyznacz $\alpha+\beta$.
Rozwiązanie:

Kąt EOD jest połową kąta EO_1D i jest dwa razy większy od kąta EBD (dlaczego?), więc $\sphericalangle EOD=\frac{1}{2}\cdot 112^\circ=56^\circ$, $\sphericalangle EBD=\frac{1}{2}\cdot 56^\circ=28^\circ$. Ponadto kąt ABC jest prosty (dlaczego?). Zatem $\alpha+\beta=90^\circ-28^\circ=62^\circ$ (ryc. 8.72).



Ryc. 8.72.



Ryc. 8.73.

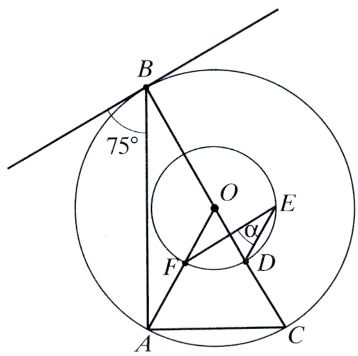
Przykład 6. Wyznacz $\alpha+\beta$.
Rozwiązanie:

Kąt OEF jest prosty, a kąt OFE ma 50°, więc $\sphericalangle FOD=40^\circ$.

Kąt DOC jest dwa razy większy od kąta DAC, który ma 20°. Stąd $\sphericalangle DOC=40^\circ$. Kąt BOC jest przyległy do kąta COF będącego sumą kątów FOD i DOC, więc $\sphericalangle BOC=180^\circ-(40^\circ+40^\circ)=100^\circ$. Wobec tego $\alpha+\beta=80^\circ$ (ryc. 8.73).

Przykład 7. Ile stopni ma kąt FED?
Rozwiązanie:

Kąt ACB ma 75° (twierdzenie o kącie między styczną i sieczną), więc kąt OAC ma także 75° (trójkąt AOC jest równoramienny). Wobec tego kąt AOC ma 30°, a kąt FED jest jego połową, zatem $\alpha=15^\circ$ (ryc. 8.74).



Ryc. 8.74.

Przykład 8[*]. Na okręgu obrano kolejno cztery różne punkty A, B, C, D. Udowodnij, że:

a) kąt między cięciwami AB i CD równy jest $\frac{1}{2}\left|\overset{\frown}{AD}-\overset{\frown}{BC}\right|$.

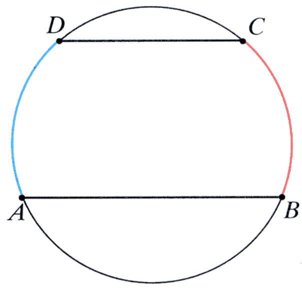
b) kąt między cięciwami AC i BD równy jest $\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{BC}\right)$.

Rozwiązanie:

Zauważmy najpierw, że kąt środkowy w okręgu możemy mierzyć długością łuku, na którym oparty jest ten kąt. Wystarczy skorzystać z definicji miary łukowej kąta środkowego w okręgu, przyjmując, że promień tego okręgu jest równy 1.

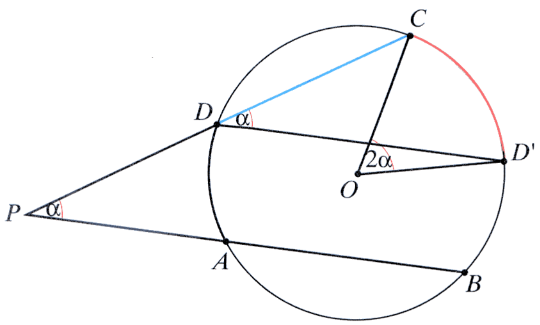
Przystępujemy do rozwiązania zadania.

a) Jeśli cięciwy AB i CD są do siebie równoległe, to teza zadania jest oczywista; wtedy bowiem łuki $\overset{\frown}{AD}$ i $\overset{\frown}{BC}$ są równej długości (dlaczego?), zaś kąt między cięciwami jest równy 0 (ryc. 8. 75).

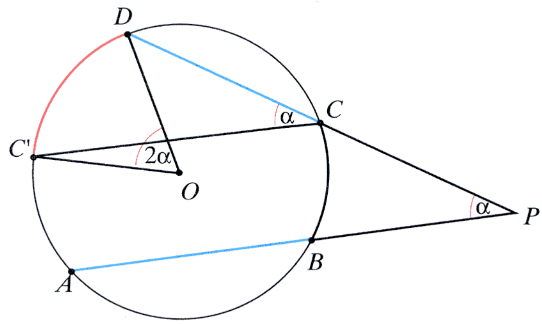


Ryc. 8.75.

Załóżmy więc, że cięciwy AB i CD nie są równoległe. Wtedy ich przedłużenia przecinają się w pewnym punkcie P (ryc. 8.76, 77).



Ryc. 8.76.



Ryc. 8.77.

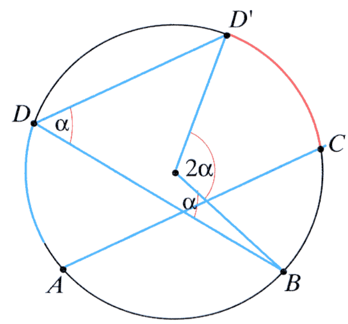
Kątem tych cięciw jest, oczywiście, kąt półprostych $\overrightarrow{PA}$ i $\overrightarrow{PD}$. Oznaczmy go przez α. Przez koniec jednej z tych cięciw poprowadźmy prostą równoległą do drugiej z nich, przecinającą dany okrąg jeszcze w punkcie D' (ryc. 8.76) lub C' (ryc. 8.77). Wówczas miara kąta środkowego 2α równa jest $\overset{\frown}{CD'} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{BD'} = \overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AD}$, gdyż $\overset{\frown}{BD'} = \overset{\frown}{AD}$ (ryc. 8. 76) lub $\overset{\frown}{C'D} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}$, gdyż $\overset{\frown}{AC'} = \overset{\frown}{BC}$ (ryc. 8. 77).

Zatem $2\alpha = \left|\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}\right|$, czyli $\alpha = \frac{1}{2}\left|\overset{\frown}{AD} - \overset{\frown}{BC}\right|$.

b) Oznaczmy kąt między cięciwami AC i BD przez α. Poprowadźmy przez koniec jednej z nich równoległą do drugiej.

Wówczas, przy oznaczeniach jak na rycinie 8.78, otrzymamy kąt środkowy 2α o mierze równej $\overset{\frown}{BD'} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD'} = \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{AD}$, gdyż $\overset{\frown}{CD'} = \overset{\frown}{AD}$.

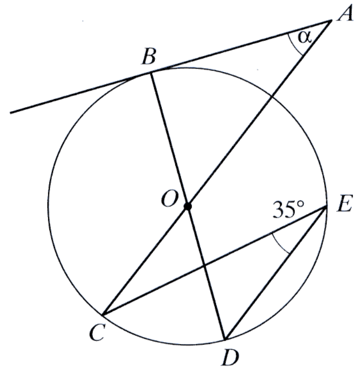
Zatem $2\alpha = \overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}$, czyli $\alpha = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{BC}\right)$.



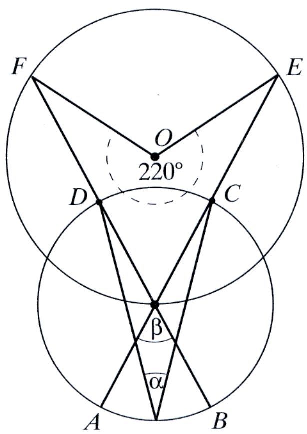
Ryc. 8. 78.

Pytania i zadania

1. Co to jest kąt wpisany i kąt środkowy?
2. Jaka jest zależność między kątem wpisanym i kątem środkowym opartym na tym samym łuku?
3. Co powiesz o:
   a) kątach wpisanych opartych na tym samym łuku,
   b) kącie wpisanym opartym na półokręgu,
   c) kątach wpisanych opartych na łukach dopełniających się do całego okręgu?
4. Sformułuj twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą.
5. Wyznacz kąt OAB (ryc. 8.79).
6. Wyznacz $\alpha+\beta$ (ryc. 8.80).
7. Wykaż, że kąt o wierzchołku w punkcie wewnętrznym koła równy jest sumie dwóch kątów wpisanych w to koło, z których jeden oparty jest na łuku okręgu koła zawartym między ramionami danego kąta, a drugi na łuku okręgu koła zawartym między przedłużeniami ramion.
8. Udowodnij, że kąt, którego wierzchołek leży na zewnątrz koła, a ramionami są sieczne okręgu tego koła, równy jest różnicy dwóch kątów wpisanych w to koło, opartych na łukach zawartych między ramionami tego kąta.
9. Udowodnij, że kąt, pod którym cięciwa koła jest widziana z punktu położonego wewnątrz (na zewnątrz) koła, jest większy (mniejszy) od kąta wpisanego, opartego na tej cięciwie.



Ryc. 8.79.



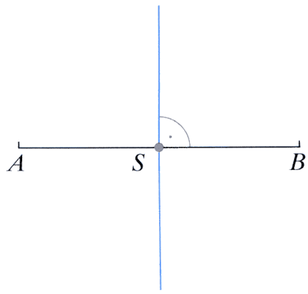
Ryc. 8.80.

10. Poprowadź styczną do danego koła z punktu leżącego na zewnątrz tego koła.
11. Udowodnij, że jeśli dwa kąty wpisane w dane koło są równe, to są oparte na równych cięciwach.
12*. Średnica AB przecina cięciwę CD okręgu w punkcie M. Kąt CMB ma miarę 75°, a kąt środkowy oparty na łuku $\overset{\frown}{BC}$, do którego nie należy punkt D, ma miarę 110°. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na łuku $\overset{\frown}{AD}$, nieprzechodzącym przez B.
13*. Do dwóch okręgów przecinających się w punktach M i K poprowadzono wspólną styczną. Niech A i B będą punktami styczności. Oblicz sumę miar kątów AMB i AKB.
14*. Na okręgu obrano kolejno cztery różne punkty A, B, C, D. Niech A_1, B_1, C_1, D_1 będą środkami odpowiednio łuków $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DA}$. Udowodnij, że cięciwy A_1C_1 i B_1D_1 są do siebie prostopadłe.

9. Trójkąt i jego punkty szczególne

Środek okręgu opisanego

Narysujmy dowolny odcinek i przez jego środek poprowadźmy prostą prostopadłą do tego odcinka (ryc. 8.81).



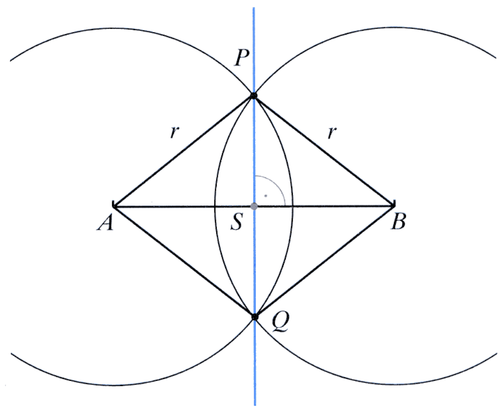
Ryc. 8.81.

Prostą prostopadłą do odcinka i przechodzącą przez jego środek nazywamy **symetralną** tego **odcinka**.

Przypomnijmy sobie teraz znaną z gimnazjum konstrukcję symetralnej odcinka. Jest to jedna z tak zwanych **konstrukcji podstawowych**.

Mając dany odcinek AB, wykreślamy okręgi o środkach A, B i równych promieniach r takich, że $r > \frac{AB}{2}$. Okręgi te przecinają się w dwóch punktach (dlaczego?). Oznaczmy je przez P i Q (ryc. 8.82).

Prosta PQ jest symetralną odcinka AB. Rzeczywiście, trójkąty APQ i BPQ można nałożyć na siebie (są przystające), bo ich odpowiednie boki są równe. Stąd wynika równość kątów PAS i PBS oraz APS i BPS, a wobec tego i przystawanie trójkątów APS i BPS. W trójkątach tych boki AS i SB są równe oraz kąty ASP i PSP są równe. Ponieważ kąty te są przyległe, więc są proste. Prosta PQ przechodzi więc przez środek S odcinka AB i jest doń prostopadła. Zatem jest ona symetralną tego odcinka. Z konstrukcji tej wynika istnienie tylko jednej symetralnej każdego odcinka.



Ryc. 8.82.

Wykażemy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie

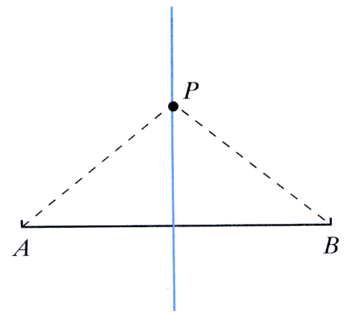
Symetralna odcinka jest zbiorem wszystkich punktów płaszczyzny **równo odległych** od **końców** tego odcinka.

Dowód. Każdy punkt P symetralnej odcinka AB jest równo odległy od jego końców A i B, gdyż jest on punktem wspólnym pewnych dwóch okręgów o środkach A i B i równych promieniach (ryc. 8.83).

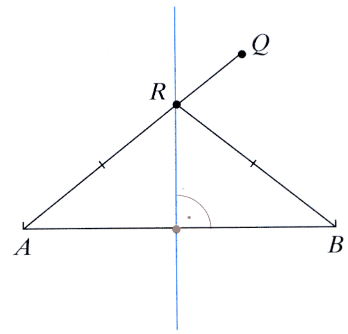
Rozważmy teraz dowolny punkt Q spoza tej symetralnej. Odcinek QA lub odcinek QB przecina się z nią.

Oznaczmy punkt przecięcia się na przykład odcinka QA z symetralną przez R. Ponieważ należy on do symetralnej, więc $RA = RB$ (ryc. 8.84).

Wówczas $QA = QR + RA = QR + RB > QB$, gdyż punkty Q, R, B są niewspółliniowe. Jeżeli zatem punkt P należy do symetralnej odcinka AB, to $PA = PB$, jeśli zaś nie należy do niej, to $PA \neq PB$. □



Ryc. 8.83.



Ryc. 8.84.

Rozważmy teraz dowolny trójkąt ABC (ryc. 8.85). Poprowadźmy symetralne którychkolwiek dwóch jego boków, na przykład AB i BC. Ponieważ odcinki AB i BC, jako boki trójkąta, nie są do siebie równoległe, więc ich symetralne przecinają się. Oznaczmy ten punkt przez O.

Zachodzą oczywiście równości $OA = OB$ i $OB = OC$. Stąd wynika, że również $OA = OC$. Równość ta oznacza, że punkt O należy do symetralnej boku CA.

Udowodniliśmy w ten sposób następujące twierdzenie:

Twierdzenie

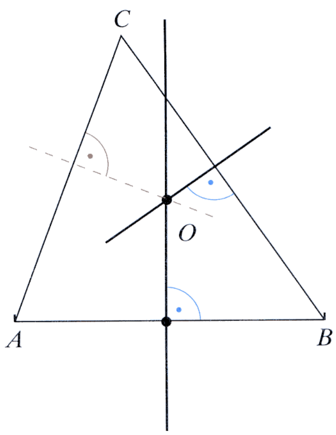
W każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie.

Punkt przecięcia się symetralnych boków trójkąta jest równo odległy od jego wierzchołków. Zatem okrąg o środku w tym punkcie i promieniu równym odległości tego punktu od wierzchołków trójkąta przechodzi przez wszystkie wierzchołki trójkąta (ryc. 8.86).

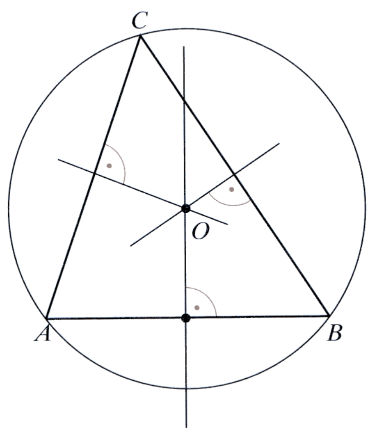
Okrąg taki nazywamy **okręgiem opisanym na trójkącie**.

Wniosek. Na każdym trójkącie można opisać jeden i tylko jeden okrąg.

Inaczej mówiąc: trzy niewspółliniowe punkty na płaszczyźnie wyznaczają okrąg.



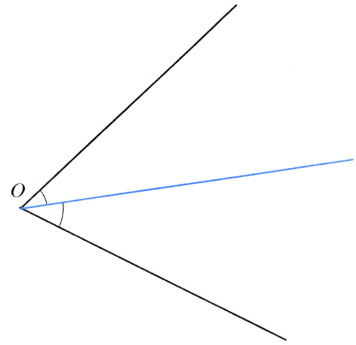
Ryc. 8.85.



Ryc. 8.86.

Środek okręgu wpisanego

Narysujmy dowolny kąt i wyprowadźmy z jego wierzchołka półprostą, która dzieli ten kąt na połowy (ryc. 8.87).

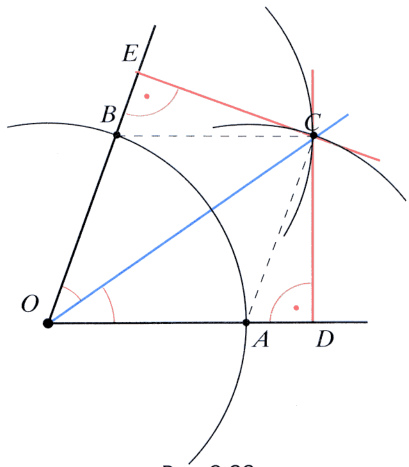


Ryc. 8.87.

Półprostą o początku w wierzchołku kąta i dzielącą ten kąt na połowy nazywamy **dwusieczną** tego **kąta**.

Czy pamiętasz konstrukcję dwusiecznej kąta? Jest to kolejna z **konstrukcji podstawowych**.

Z wierzchołka O danego kąta kreślimy okrąg o dowolnym promieniu r. Przecina on ramiona tego kąta w punktach A i B. Z punktów A i B kreślimy łuki okręgów o tym samym promieniu r. Ich punkt przecięcia się C łączymy z wierzchołkiem O danego kąta. Półprosta $\overrightarrow{OC}$ jest dwusieczną danego kąta. Rzeczywiście, ponieważ $OA = OB = AC = BC = r$, więc trójkąty równoramienne OAC i OBC można na siebie nałożyć (są przystające). Zatem kąty AOC i BOC są równe. Z konstrukcji tej wynika istnienie tylko jednej dwusiecznej danego kąta. Ponadto widać, że odległości punktu C od ramion tego kąta są równe, gdyż odcinki CD i CE, poprowadzone z punktu C prostopadle do ramion tego kąta (ryc. 8.88), są równe (dlaczego?).



Ryc. 8.88.

Wykażemy teraz następujące twierdzenie.

Twierdzenie

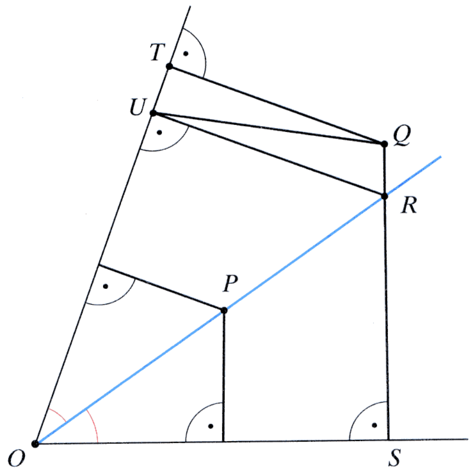
Dwusieczna kąta jest zbiorem wszystkich punktów wewnętrznych tego kąta **równo odległych** od jego **ramion**.

☐ Dowód. Oczywiście, każdy punkt dwusiecznej kąta jest równo odległy od ramion tego kąta (co wynika z przeprowadzonej konstrukcji dwusiecznej kąta).

Weźmy zatem dowolny punkt Q wewnątrz kąta, nieleżący na dwusiecznej (ryc. 8.89). Poprowadźmy z tego punktu odcinki QS i QT prostopadłe do ramion kąta. Któryś z nich przecina dwusieczną tego kąta. Niech tym odcinkiem będzie QS, a punkt przecięcia się go z dwusieczną oznaczmy przez R. Poprowadźmy jeszcze odcinek RU, prostopadły do ramienia OT. Zachodzą wówczas związki:

$QT < QU < QR + RU = QR + RS = QS$ (dlaczego?).

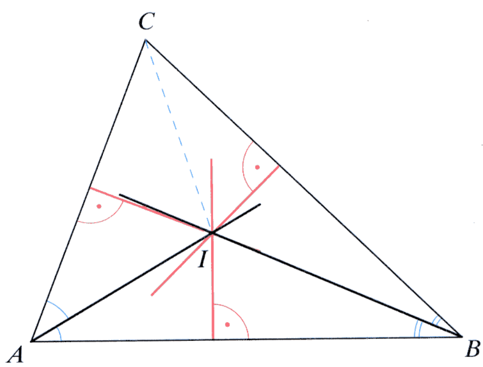
Wykazaliśmy więc, że odległości każdego punktu dwusiecznej kąta od jego ramion są równe, zaś odległości każdego punktu wewnątrz kąta, ale spoza jego dwusiecznej, są różne. Zatem jedynymi punktami wewnątrz kąta równo odległymi od jego ramion są punkty dwusiecznej tego kąta. ▢



Ryc. 8.89.

Rozważmy teraz dowolny trójkąt ABC. Poprowadźmy dwusieczne którychkolwiek dwóch jego kątów wewnętrznych, na przykład BAC i ABC (ryc. 8.90). Ponieważ suma ich miar jest mniejsza od 180°, więc ich dwusieczne się przecinają.

Oznaczmy ten punkt przez I. Oczywiście punkt I jest równo odległy od boków CA i AB oraz od boków AB i BC. Stąd wynika, że jest on równo odległy także od boków CA i AB, będących ramionami kąta ACB. Należy więc do dwusiecznej tego kąta.



Ryc. 8.90.

Udowodniliśmy tym samym następujące twierdzenie:

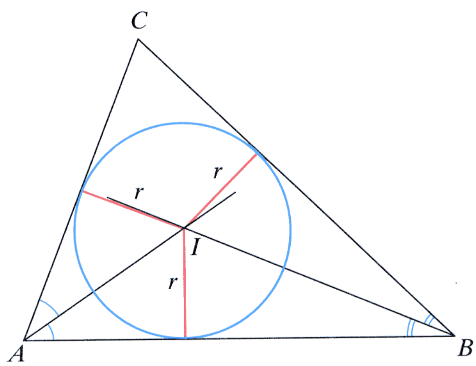
Twierdzenie

W każdym trójkącie dwusieczne kątów przecinają się w jedynym punkcie.

Punkt przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta jest równo odległy od wszystkich jego boków.

Okrąg o środku w punkcie przecięcia się dwusiecznych kątów trójkąta i o promieniu równym odległości tego punktu od boków trójkąta jest styczny do tych boków. Okrąg taki nazywamy **okręgiem wpisanym w trójkąt** (ryc. 8.91).

Wniosek. W każdy trójkąt można wpisać jeden i tylko jeden okrąg.

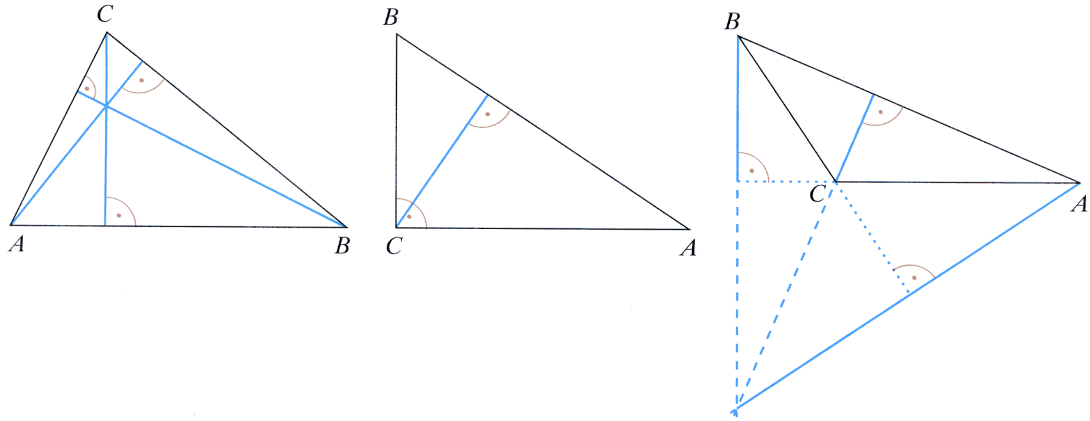


Ryc. 8.91.

Ortocentrum

Narysujmy dowolny trójkąt, a następnie przez jeden z jego wierzchołków poprowadźmy prostą prostopadłą do przeciwległego boku (lub jego przedłużenia). Odcinek tej prostej, o końcach w wierzchołku trójkąta i punkcie leżącym na boku, nazywamy **wysokością trójkąta**. Koniec wysokości należący do boku nazywamy jej **spodkiem**.

Wniosek. Każdy trójkąt ma trzy wysokości (ryc. 8.92).



Ryc. 8.92.

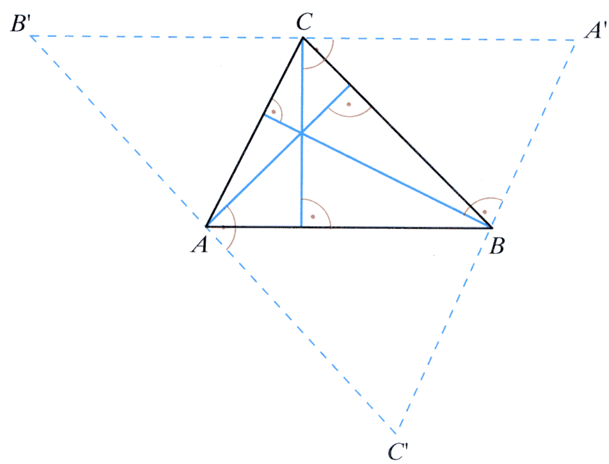
Twierdzenie

W każdym trójkącie wysokości (lub ich przedłużenia) przecinają się w jednym punkcie.

☐ Dowód. Gdy trójkąt jest prostokątny, to teza jest oczywista. Rozważmy zatem trójkąt ABC, który jest ostrokątny lub rozwartokątny (ryc. 8.93 i 8.94).

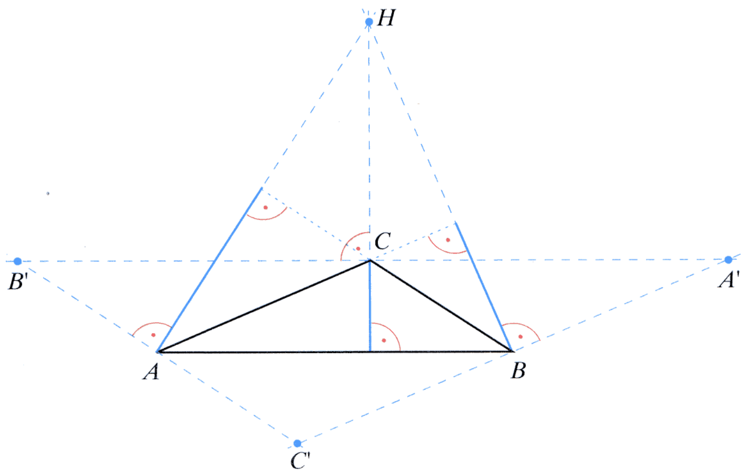
Poprowadźmy przez wierzchołki tego trójkąta proste, równoległe do przeciwległych boków. Punkty przecięcia się tych prostych oznaczmy przez A', B' i C', przy czym niech A' będzie punktem leżącym naprzeciw wierzchołka A, B' – naprzeciw wierzchołka B, zaś C' – naprzeciw wierzchołka C.

Z konstrukcji tej wynika, że boki $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ trójkąta $A'B'C'$ są równoległe odpowiednio do boków AB, BC i CA trójkąta ABC, gdyż czworokąty $ABA'C$, $BCB'A$, $CAC'B$ są równoległobokami; co więcej, równoległoboki te mają parami wspólny bok (zobacz, które pary – który bok), więc wierzchołki



Ryc. 8.93.

trójkąta ABC są środkami boków trójkąta $A'B'C'$. Wobec tego wysokości trójkąta ABC są symetralnymi boków trójkąta $A'B'C'$ – a te, jak wiemy, w każdym trójkącie przecinają się w jednym punkcie. ▢



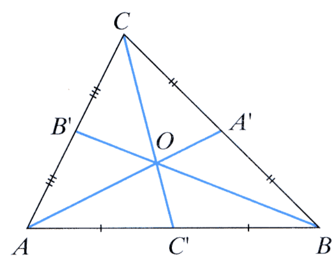
Ryc. 8.94.

Punkt przecięcia się wysokości trójkąta nazywamy jego **ortocentrum**.

Środek ciężkości

Odcinek łączący wierzchołek trójkąta ze środkiem przeciwległego boku nazywamy **środkową trójkąta**.

Wniosek. Każdy trójkąt ma trzy środkowe (ryc. 8.95).



Ryc. 8.95.

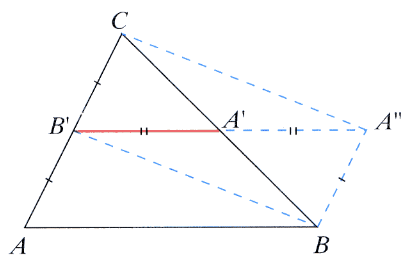
Zanim przejdziemy do twierdzenia o środkowych w trójkącie, udowodnimy następujący lemat.

Lemat. W każdym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

▢ Dowód. Rozważmy trójkąt ABC (ryc. 8.96) i oznaczmy środki jego boków AC i BC odpowiednio przez B' i A'.

Wykażemy, że odcinek $B'A'$ jest równoległy do boku AB i równy jego połowie.

W tym celu przedłużmy odcinek $B'A'$ poza punkt A' do takiego punktu A'', aby $B'A' = A'A''$. Otrzymamy czworokąt $B'BA''C$, który jest równoległobokiem, gdyż jego przekątne przecinają się w połowie. Stąd wynika, że również czworokąt $ABA''B'$ jest równoległobokiem (jego przeciwległe boki AB' i BA'' są równe i równoległe).



Ryc. 8.96.

Wobec tego odcinek $B'A'$ jest równoległy do AB oraz $B'A' = \frac{1}{2} B'A'' = \frac{1}{2} AB$. ▢

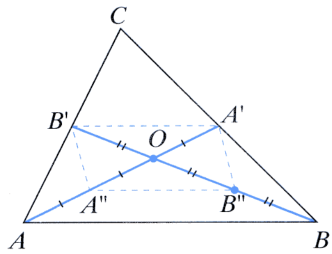
Uwaga. W dowodzie tym skorzystaliśmy ze znanych ci z gimnazjum własności równoległoboków, do których powrócimy zresztą w ostatnim podrozdziale tego rozdziału.

A teraz zapowiedziane wcześniej twierdzene:

Twierdzenie (o środkowych w trójkącie)

W każdym trójkącie środkowe przecinają się w jednym punkcie, który dzieli każdą z nich w stosunku 2 : 1 (licząc od wierzchołków).

Dowód. Rozważmy dowolny trójkąt ABC i poprowadźmy jego dwie środkowe AA' i BB' (ryc. 8.97). Przecinają się one w pewnym punkcie O.



Ryc. 8.97.

Połączmy odcinkiem środki A' i B' boków BC i AC oraz środki A'' i B'' odcinków AO i BO. Z udowodnionego lematu wynika, że odcinki $A''B''$ i $B'A'$ są równoległe do boku AB i równe jego połowie. Zatem są one do siebie równoległe i równe. Wobec tego czworokąt $A''B''A'B'$ jest równoległobokiem, więc jego przekątne połowią się. Stąd $A''O = OA'$ i $B''O = OB'$ i ostatecznie

$$AO = AA'' + A''O = 2A''O = 2OA'$$

oraz

$$BO = BB'' + B''O = 2B''O = 2OB'.$$

Punkt O dzieli więc każdą ze środkowych AA' i BB' w stosunku 2 : 1. Podobnie wykazujemy, że środkowe AA' i CC' przecinają się w punkcie O', który dzieli je w stosunku 2 : 1. W ten sposób dochodzimy do tego, że punkty O i O' dzielą środkową AA' w stosunku 2 : 1. Punkty te muszą więc się pokrywać, gdyż każdy odcinek dzielony jest w danym stosunku dodatnim tylko jednym swoim punktem wewnętrznym.

Punkt przecięcia się środkowych trójkąta nazywamy **środkiem ciężkości** tego trójkąta.

Pytania i zadania

1. Co to jest:
   a) symetralna odcinka,
   b) dwusieczna kąta,
   c) wysokość trójkąta,
   d) środkowa trójkąta?
2. Jakim punktem trójkąta jest:
   a) środek okręgu opisanego,
   b) środek trójkąta wpisanego,
   c) ortocentrum,
   d) środek ciężkości?

3. Wewnątrz trójkąta ABC obrano takie dwa różne punkty D i E, że E leży bliżej boku BC niż punkt D oraz proste BD i BE dzielą kąt ABC na trzy równe części. Ponadto proste CD i CE dzielą kąt ACB na trzy równe części. Wykaż, że kąty BDE i EDC są równe.
4. Wpisz w dany trójkąt okrąg i opisz na danym trójkącie okrąg.
5. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokość CD. Punkt E należy do boku AC, a odcinki BE i CD przecinają się w punkcie H. Wiadomo przy tym, że $CD = DB$ i $HD = DA$. Udowodnij, że odcinek BE jest wysokością trójkąta ABC.
6. Punkt S jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC. D i E są takimi punktami boku AB, że odcinek DS jest równoległy do boku AC, ES zaś do boku BC. Udowodnij, że obwód trójkąta DES równy jest długości odcinka AB.
7. Przez środek okręgu wpisanego w trójkąt ABC poprowadzono prostą równoległą do boku AB. Prosta ta przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach P i Q. Udowodnij, że $PQ = AP + BQ$.
8. Wewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC obrano punkt P i zrzutowano go prostopadle na boki BC, CA i AB, otrzymując punkty A', B' i C'. Udowodnij, że:
   a) jeżeli P jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$, to jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC;
   b) jeśli P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$;
   c) jeśli P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$, to jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
9. Udowodnij, że punkt $S = \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$ jest środkiem ciężkości trójkąta ABC, gdzie $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $C = (x_3, y_3)$.
10*. W trójkącie ABC punkty M i N są rzutami prostopadłymi wierzchołka C na dwusieczne kątów zewnętrznych przy wierzchołkach A i B. Wykaż, że długość odcinka MN równa jest połowie obwodu trójkąta ABC.

10. Twierdzenie Talesa i doń odwrotne

Twierdzenie Talesa* to bodaj najlepiej znane ci z gimnazjum twierdzenie (obok, oczywiście, twierdzenia Pitagorasa. Stosowane bywa w życiu codziennym oraz do dowodzenia w geometrii. Dlatego warto do niego wrócić.

Oto jego treść.

Twierdzenie (Talesa)

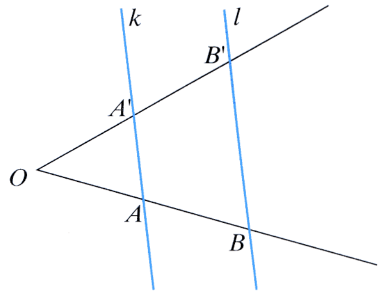
Jeżeli ramiona kąta przecięte są dwiema prostymi równoległymi, to stosunek odcinków jednego ramienia, których jednym końcem jest wierzchołek kąta, równy jest stosunkowi odpowiednich odcinków drugiego ramienia.

* Tales z Miletu (ok. 620 – ok. 540 r. p.n.e.), filozof i matematyk grecki.

Przy oznaczeniach jak na rycinie 8.98 twierdzenie to możemy zapisać zwięźlej, mianowicie:

Jeżeli proste k i l, przecinające ramiona kąta o wierzchołku O w punktach odpowiednio A, B i A', B', są do siebie równoległe, to

(1) $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OA'}{OB'}$.



Ryc. 8.98.

▢ Dowód. Zauważmy najpierw, że równość (1) jest równoważna kolejno równościom:

$$\frac{OB}{OA} = \frac{OB'}{OA'},$$

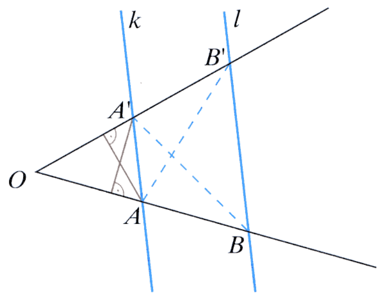
$$\frac{OA+AB}{OA} = \frac{OA'+A'B'}{OA'},$$

$$1 + \frac{AB}{OA} = 1 + \frac{A'B'}{OA'},$$

$$\frac{AB}{OA} = \frac{A'B'}{OA'},$$

(2) $\dfrac{OA}{AB} = \dfrac{OA'}{A'B'}$.

Wystarczy zatem dowieść ostatniej równości. W tym celu połączmy najpierw odcinkiem punkty A i B' oraz A' i B (ryc. 8.99). Następnie zauważmy, że stosunek występujący po lewej stronie równości (2) wyraża stosunek pól trójkątów OAA' i ABA', zaś stosunek po jej prawej stronie wyraża stosunek pól trójkątów $OA'A$ i $A'B'A$ (wymienione pary trójkątów mają wspólne wysokości). Ponadto trójkąty ABA' i $AB'A'$ mają równe pola (czy widzisz, dlaczego?). Zatem rzeczywiście



Ryc. 8.99.

$$\frac{OA}{AB} = \frac{S(OAA')}{S(ABA')} = \frac{S(OA'A)}{S(A'B'A)} = \frac{OA'}{A'B'}.$$

($S\,(XYZ)$ oznacza tutaj pole trójkąta XYZ). ▢

Z udowodnionego przed chwilą twierdzenia można wysnuć takie oto dwa wnioski.

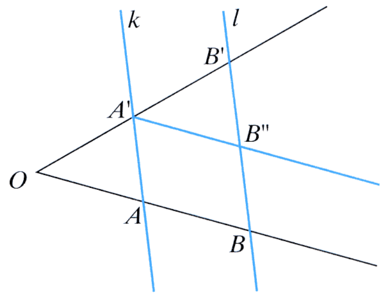
Wniosek 1. Jeżeli proste k i l przecinające ramiona kąta odpowiednio w punktach A, B i A', B' są do siebie równoległe, to

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}.$$

▢ Dowód. Poprowadźmy przez A' półprostą, równoległą do ramienia OA danego kąta (rys. 8.100). Przetnie ona odcinek BB' w takim punkcie B'', że $BB'' = AA'$ (dlaczego?).

Stosując twierdzenie Talesa do kąta o wierzchołku B' i prostych równoległych $A'B''$ i OB, otrzymujemy równość

$\frac{B'A'}{A'O} = \frac{B'B''}{B''B}$, która jest równoważna kolejno równościom:



Ryc. 8.100.

$$1 + \frac{B'A'}{A'O} = 1 + \frac{B'B''}{B''B},$$

$$\frac{A'O + B'A'}{A'O} = \frac{B''B + B'B''}{B''B},$$

$$\frac{OB'}{OA'} = \frac{BB'}{AA'},$$

(bo $A'O + B'A' = OA' + A'B' = OB'$ oraz $B''B + B'B'' = BB'' + B''B' = BB'$),

$$\frac{OA'}{OB'} = \frac{AA'}{BB'},$$

$$\frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}, \text{ gdyż } \frac{OA'}{OB'} = \frac{OA}{OB}. \quad \square$$

Wniosek 2. Jeżeli dwie proste przecięte są równoległymi, to stosunek odcinków na jednej prostej jest równy stosunkowi odpowiednich odcinków na drugiej z nich.

$\square$ Dowód. Jeżeli te dwie proste przecięte prostymi równoległymi też są równoległe (ryc. 8.101), to teza jest oczywista (dlaczego?).

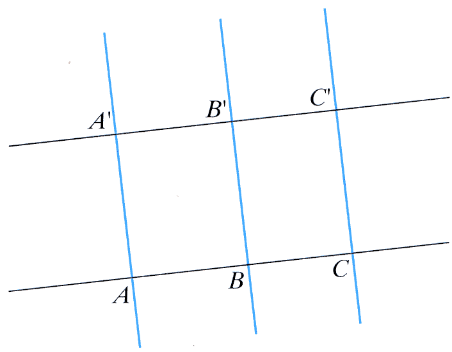
Załóżmy więc, że te dwie proste przecinają się. Wtedy równoległe przecinają je:

a) albo po jednej stronie ich punktu przecięcia (ryc. 8.102),
b) albo po jego obu stronach (ryc. 8.103).

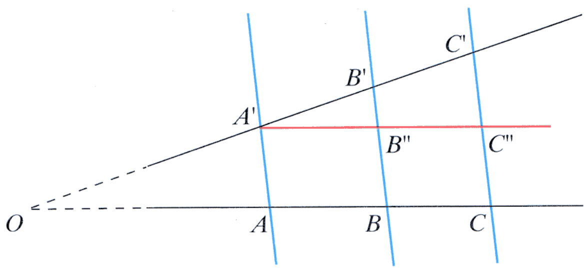
W przypadku pierwszym wystarczy poprowadzić przez A' równoległą do prostej OA, przecinającą odcinki BB' i CC' w punktach odpowiednio B'' i C'' (ryc. 8.102).

Wówczas

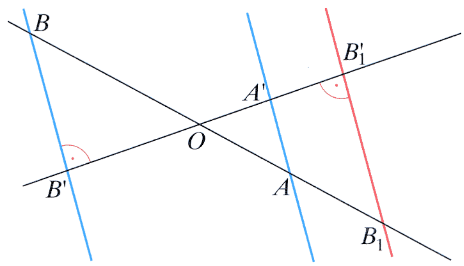
$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B''}{B''C''} = \frac{A'B'}{B'C'},$$



Ryc. 8.101.



Ryc. 8.102.



Ryc. 8.103.

gdyż

$AB = A'B''$ i $BC = B''C''$.

W przypadku drugim dorysowujemy prostą przecinającą ramiona kąta AOA' w takich punktach B_1 i B_1' (rys. 8.103), że $OB_1 = OB$ i $OB_1' = OB'$. Prosta B_1B_1' jest oczywiście równoległa do prostej $B'B$ (co wynika z równości odpowiednich kątów w przystających do siebie trójkątach B_1OB_1' i BOB'), a zatem również do prostej AA'. I wobec tego

$$\frac{OA}{AB_1} = \frac{OA'}{A'B_1'}, \text{ czyli } \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}. \ \square$$

Zachodzi również twierdzenie odwrotne do twierdzenia Talesa.

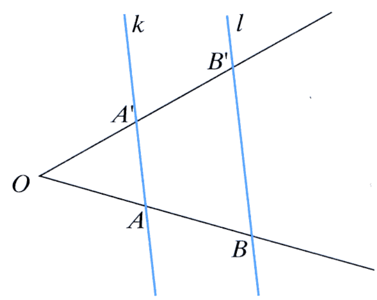
Twierdzenie (odwrotne do twierdzenia Talesa)

Jeżeli ramiona kąta przecięte są dwiema prostymi i stosunek odcinków jednego ramienia, których jednym końcem jest wierzchołek kąta, jest równy stosunkowi odpowiednich odcinków drugiego ramienia, to te dwie proste są do siebie równoległe.

Przyjmując oznaczenia jak na rycinie 8.104, twierdzenie to możemy sformułować krócej, a mianowicie:

Jeżeli proste k i l przecinają ramiona kąta o wierzchołku O odpowiednio w takich punktach A, B i A', B', że

$(*)\ \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$, to proste k i l są do siebie równoległe.



Ryc. 8.104.

$\square$ Dowód. Będziemy rozumować przez sprzeczność. Załóżmy więc, że zachodzi równość $(*)$ i proste k i l nie są do siebie równoległe.

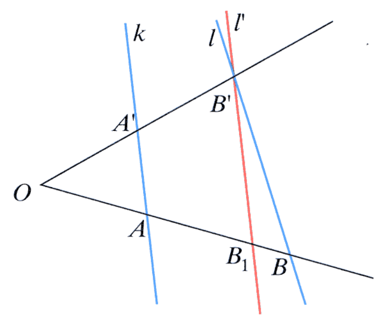
Poprowadźmy zatem przez punkt B' prostą l', równoległą do prostej k (ryc. 8.105). Przetnie ona ramię OA w pewnym punkcie B_1. Zgodnie z twierdzeniem Talesa możemy napisać proporcję:

$$(**)\ \frac{OA}{OB_1} = \frac{OA'}{OB'}.$$

Z równości $(*)$ i $(**)$ wynika równość

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA}{OB_1}, \text{ a z niej – równość } OB = OB_1,$$

która dowodzi, że punkty B_1 i B się pokrywają (dlaczego?). To zaś oznacza, że proste l' i l się pokrywają, co z kolei jest niemożliwe, bowiem prosta l' jest równoległa do k, a prosta l – nie. Otrzymana sprzeczność kończy dowód twierdzenia. $\square$



Ryc. 8.105.

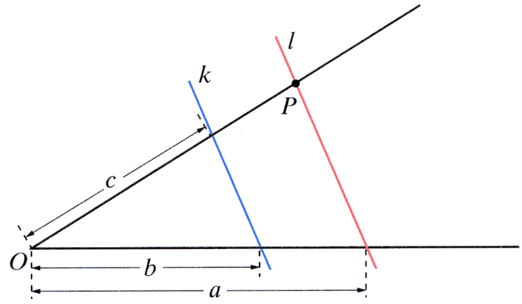
Przykłady konstrukcji z zastosowaniem twierdzenia Talesa

Przykład 1. Mając dane trzy odcinki: a, b i c, zbuduj taki odcinek d, aby

$$\frac{a}{b}=\frac{d}{c}.$$

Rozwiązanie:

Obieramy na płaszczyźnie dowolny punkt O i dwie dowolne, różne (nieprzedłużające się do prostej) półproste o początku w tym punkcie. Na jednym ramieniu otrzymanego kąta odkładamy od jego wierzchołka O kolejno odcinki a i b, a na drugim – odcinek c. Przez końce odcinków b i c prowadzimy prostą k, a przez koniec odcinka a – prostą l, równoległą do k. Prosta l przetnie ramię danego kąta, na którym leży odcinek c, w takim punkcie P, że $OP=d$ (ryc. 8.106).



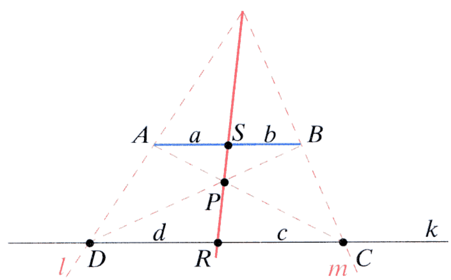
Ryc. 8.106.

Uzasadnienie tej konstrukcji wynika wprost z twierdzenia Talesa.

Przykład 2. Dany jest odcinek AB oraz rozłączna z nim i doń równoległa prosta k. Używając tylko linijki, podziel ten odcinek na dwie równe części.

Rozwiązanie:

Przez końce A i B danego odcinka prowadzimy dwie proste l i m, przecinające się w pewnym punkcie O, który leży poza prostą k (na rycinie 8.107 punkt O znajduje się po drugiej stronie prostej AB niż prosta k; przypadki, gdy znajduje się on między tymi prostymi lub po drugiej stronie prostej k niż prosta AB, rozpatrz samodzielnie).



Ryc. 8.107.

Punkty przecięcia się prostych k i l oraz k i m oznaczmy odpowiednio przez D i C. Połączmy odcinkiem punkty A i C oraz B i D. Przez punkt P, w którym przecinają się odcinki AC i BD oraz przez punkt O prowadzimy prostą n, która dzieli odcinek AB na połowy.

▢ Przy oznaczeniach jak na rycinie otrzymujemy na mocy twierdzenia Talesa równości:

(1) $\frac{a}{d}=\frac{b}{c}$, gdyż $\frac{a}{d}=\frac{OS}{OR}=\frac{b}{c}$

oraz

(2) $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$, gdyż $\frac{a}{c}=\frac{SP}{PR}=\frac{BP}{PD}=\frac{b}{d}$.

Równości (1) i (2) są równoważne odpowiednio równościom:

(3) $\frac{a}{b}=\frac{d}{c}$ i (4) $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$,

z których otrzymujemy równość $\frac{a}{b}=\frac{b}{a}$, czyli równość $a^2=b^2$ i ostatecznie równość $a=b$, a także, na mocy równości na przykład (1) – równość $c=d$. ▢

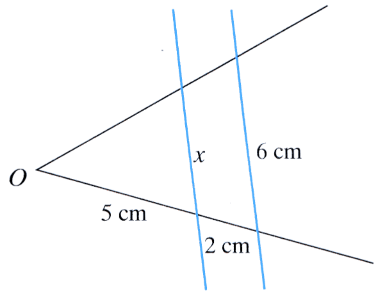
Pytania i zadania

1. Sformułuj twierdzenie Talesa i twierdzenie doń odwrotne.
2. Wyprowadź wnioski (inne proporcje) wynikające z twierdzenia Talesa.
3. Podziel dany odcinek na trzy równe części.
4. Na podstawie danych, które widzisz na rycinie 8.108, wyznacz x.

5*. Narysuj dowolny czworokąt o różnych bokach i podziel go na pięć wielokątów o równych polach.

6*. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AB = CD$, $AD = BC$ i $CD > BC$. Skonstruuj na boku CD takie punkty X i Y, aby $AX = XY = YB$.

7. Dany jest prostokąt $ABCD$. Środek boku AB połączono odcinkiem z wierzchołkiem C, a środek boku CD połączono odcinkiem z wierzchołkiem A. Udowodnij, że otrzymane odcinki dzielą przekątną BD tego prostokąta na trzy równe odcinki.



Ryc. 8.108.

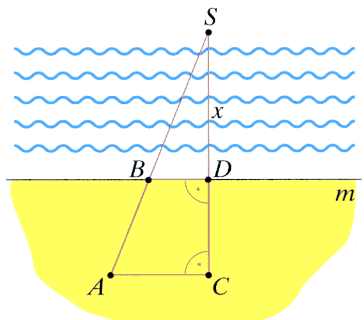
11. Zastosowania twierdzenia Talesa

Obecnie skupimy naszą uwagę na zastosowaniach twierdzenia Talesa i twierdzenia doń odwrotnego w praktyce i w geometrii.

Przykłady zastosowań w praktyce

Przykład 1. Na morzu w punkcie S stoi statek. Obserwujemy go z punktu A na plaży. Jak obliczyć, w jakiej odległości od brzegu znajduje się ten statek?
Rozwiązanie:

Przyjmijmy, że brzeg morza jest prostą m (ryc. 8.109). Załóżmy, że prosta AS przecina prostą m w punkcie B. Niech C jest takim punktem na plaży, że prosta AC jest równoległa do m, a prosta CS jest prostopadła do m i przecina ją w punkcie D. Mierzymy odcinki AC, BD i CD. Mając na przykład dane: $AC = 32$ m, $BD = 30$ m, $CD = 40$ m, otrzymujemy na mocy twierdzenia Talesa:



Ryc. 8.109.

$$\frac{AC}{BD} = \frac{CS}{DS}, \text{ czyli } \frac{32}{30} = \frac{40+x}{x}, \text{ skąd } 32x = 30(40+x) \text{ i ostatecznie } x = 600.$$

Przykład 2. Nie wchodząc na drzewo, chcemy się dowiedzieć, jakie jest wysokie. Dysponujemy tyczką o długości 1 m. Co musimy jeszcze zmierzyć, aby móc obliczyć wysokość tego drzewa?
Rozwiązanie:

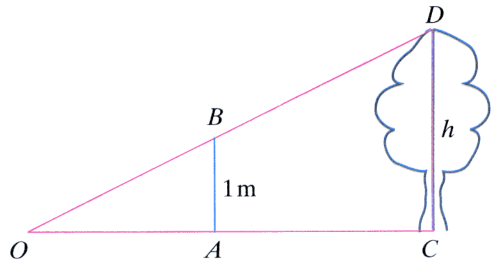
Nietrudno będzie nam to uczynić w słoneczny dzień. Wtedy drzewo rzuca na płaskim terenie cień CO (ryc. 8.110). Wbijamy naszą tyczkę pionowo na linii cienia (na rycinie jest to odcinek AB). Mierzymy odcinki OA i OC. Niech na przykład $OA = 1{,}5$ m, $OC = 6$ m.

Wówczas na mocy twierdzenia Talesa otrzymujemy proporcję

$$\frac{h}{1}=\frac{OC}{OA},\ \text{skąd}\ h=\frac{OC}{OA}.$$

Po podstawieniu uzyskanych wyników pomiaru $h=\frac{6}{1{,}5}=4$.

Nasze drzewo ma zatem 4 m wysokości.



Ryc. 8.110.

Przykład 3. Bezpośredni pomiar szerokości rzeki jest często niemożliwy. Jak wyznaczyć tę szerokość, znając (np. z planu terenu) długość odcinka $AB=a$ po drugiej stronie rzeki (ryc. 8.111)?

Rozwiązanie:

Zakładamy oczywiście, że odcinek rzeki, której szerokość chcemy obliczyć, ma brzegi do siebie równoległe. Wystarczy jeszcze zmierzyć długości odcinków CD i OE i możemy obliczać. Z twierdzenia Talesa bowiem:

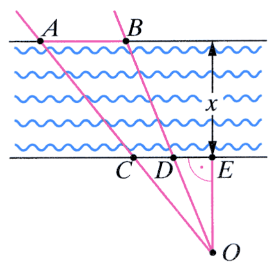
$$\frac{x+OE}{OE}=\frac{BO}{BD}=\frac{AB}{CD},\ \text{skąd}\ \frac{x+OE}{OE}=\frac{AB}{CD},$$

$$CD\cdot(x+OE)=AB\cdot OE,$$

$$x=\frac{(AB-CD)\cdot OE}{CD}.$$

Podstawiając tutaj $AB=a$, $CD=b$ i $OE=c$, otrzymujemy

$$x=\frac{(a-b)\cdot c}{b}.$$



Ryc. 8.111.

Przykłady zastosowań w geometrii

Twierdzenie Talesa i twierdzenie doń odwrotne pozwalają udowodnić wiele ciekawych i ważnych twierdzeń geometrycznych.

Zacznijmy od znanego nam już twierdzenia:

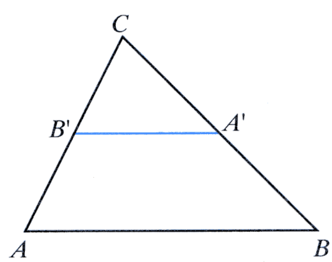
Twierdzenie (o odcinku łączącym środki boków trójkąta)

W każdym trójkącie odcinek łączący środki dwóch boków jest równoległy do trzeciego boku i równy jego połowie.

□ Dowód. Weźmy dowolny trójkąt ABC i oznaczmy środki jego boków BC i CA odpowiednio przez A' i B' (ryc. 8.112).

Ponieważ $\frac{CB'}{B'A}=1=\frac{CA'}{A'B}$, więc z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika równoległość odcinków AB i $B'A'$.

Wobec tego na mocy twierdzenia Talesa $\frac{B'A'}{AB}=\frac{CA'}{CB}=\frac{1}{2}$, skąd $B'A'=\frac{1}{2}AB$. □



Ryc. 8.112.

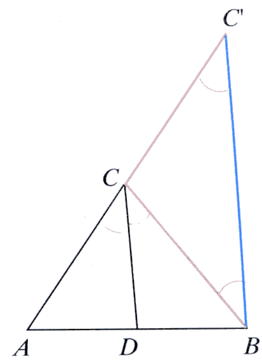
Twierdzenie (o dwusiecznej kąta w trójkącie)

W każdym trójkącie dwusieczna kąta wewnętrznego dzieli bok przeciwległy na odcinki proporcjonalne do boków przyległych.

☐ Dowód. Mamy udowodnić, przyjmując oznaczenia jak na rycinie 8.106, że jeżeli kąty ACD i DCB są równe, to

$$(*)\ \frac{AC}{CB}=\frac{AD}{DB}.$$

W tym celu, na półprostej $\overrightarrow{AC}$ odłóżmy poza punktem C taki punkt C', aby $CC'=CB$, a następnie połączmy odcinkiem punkt C' z wierzchołkiem B (ryc. 8.113). Otrzymamy wówczas trójkąt równoramienny BCC', w którym kąty CBC' i $CC'B'$ są równe kątom ACD i DCB (dlaczego?). Wobec tego odcinki CD i $C'B$ są do siebie równoległe. Stosując zatem twierdzenie Talesa do kąta BAC' i prostych CD i $C'B$, otrzymujemy proporcję $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CC'}$, a więc proporcję (∗), gdyż $CC'=CB$. ☐



Ryc. 113.

Uwagi.

1. Zamiast na przedłużeniu boku AC poza punktem C obierać taki punkt C', by $CC'=CB$ i wykazywać dalej równoległość prostych CD i CC', moglibyśmy poprowadzić przez punkt B równoległą do CD przecinającą się z półprostą $\overrightarrow{AC}$ w punkcie C' i wykazać równoramienność trójkąta BCC' (ryc. 8.106). Dalej dowód przebiegałby jak wyżej.
2. Zachodzi również twierdzenie odwrotne do udowodnionego przed chwilą, mianowicie: Jeżeli w trójkącie ABC półprosta o początku w wierzchołku C przecina bok AB w takim punkcie D, że $\frac{AD}{DB}=\frac{AC}{CB}$, to jest ona dwusieczną kąta ACB (udowodnij to twierdzenie).

Twierdzenie (van Aubela)

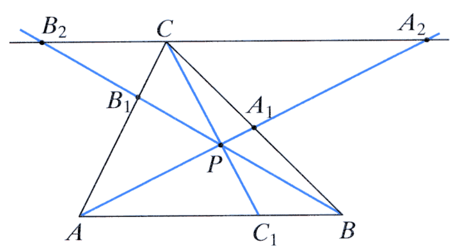
Jeżeli w trójkącie ABC proste AA_1, BB_1, CC_1 przecinają się w punkcie P, to

$$(*)\qquad \frac{CP}{PC_1}=\frac{CB_1}{B_1A}+\frac{CA_1}{A_1B}.$$

☐ Dowód. Przez wierzchołek C poprowadźmy prostą równoległą do AB, przecinającą proste AA_1 i BB_1 odpowiednio w punktach A_2 i B_2 (ryc. 8.114).

Stosując trzykrotnie twierdzenie Talesa do:

a) przecinających się prostych AA_2 i BB_2 i przecinających je równoległych AB i B_2A_2,
b) przecinających się prostych AC i BB_2 i przecinających je równoległych AB i B_2C,



Ryc. 8.114.

c) przecinających się prostych AA_2 i BC i przecinających je równoległych AB i CA_2, otrzymujemy równości:

(1) $\dfrac{CP}{PC_1}=\dfrac{B_2A_2}{AB}=\dfrac{B_2C+CA_2}{AB}=\dfrac{B_2C}{AB}+\dfrac{CA_2}{AB}$,

(2) $\dfrac{B_2C}{AB}=\dfrac{CB_1}{B_1A}$,

(3) $\dfrac{CA_2}{AB}=\dfrac{CA_1}{A_1B}$.

Z równości (1), na mocy równości (2) i (3), otrzymujemy tezę. ▢

Uwaga. Z udowodnionego twierdzenia wynika twierdzenie o środkowych w trójkącie.

Twierdzenie (Menelausa)

Jeżeli prosta p przecina boki BC, CA i AB trójkąta ABC lub ich przedłużenia (nie przechodząc przez żaden z wierzchołków ani nie będąc równoległą do żadnego z boków) odpowiednio w punktach A', B' i C', to

(∗) $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1.$$

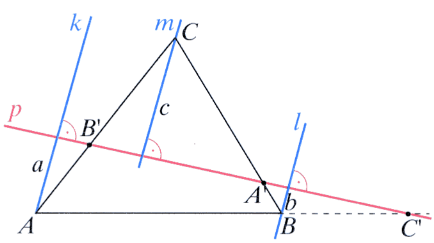
Liczba -1 w powyższej równości bierze się stąd, że każdy z występujących po lewej stronie tej równości ułamków to stosunek podziału odpowiedniego boku trójkąta ABC odpowiadającym mu punktem prostej p. A jak pamiętamy (zob. twierdzenie na str. 307), ów stosunek jest dodatni, gdy punkt podziału leży wewnątrz boku, a ujemny, gdy leży na zewnątrz.

Oznaczając stosunek podziału:
- boku AB punktem C',
- boku BC punktem A',
- boku CA punktem B'

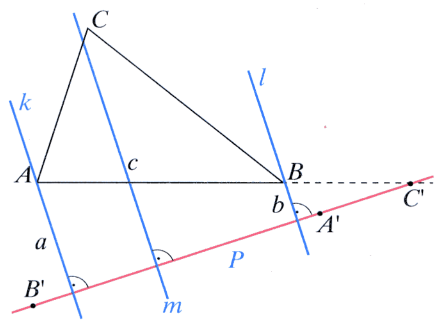
odpowiednio przez k_1, k_2 i k_3, możemy równość (∗) zapisać równoważnie:

$k_1\cdot k_2\cdot k_3=-1.$

▢ Dowód. Poprowadźmy przez wierzchołki trójkąta ABC proste k, l, m prostopadłe do prostej p (ryc. 8.115, 8.116).



Ryc. 8.115.



Ryc. 8.116.

Proste te są więc do siebie równoległe. Oznaczmy jeszcze długości odcinków tych prostych od wierzchołków A, B i C do prostej p odpowiednio przez a, b, c.

Wówczas z twierdzenia Talesa zastosowanego do:

a) przecinających się prostych p i AB, przeciętych równoległymi k i l,
b) przecinających się prostych p i BC, przeciętych równoległymi l i m,
c) przecinających się prostych p i CA, przeciętych równoległymi m i k,

otrzymujemy kolejno równości:

$$\frac{AC'}{C'B}=\frac{a}{b},\quad \frac{BA'}{A'C}=\frac{b}{c},\quad \frac{CB'}{B'A}=\frac{c}{a}.$$

I wobec tego:

a) $k_1=\frac{a}{b}$, $k_2=\frac{b}{c}$, $k_3=\frac{c}{a}$, w przypadku przedstawionym na ryc. 8.115,

b) $k_1=-\frac{a}{b}$, $k_2=-\frac{b}{c}$, $k_3=-\frac{c}{a}$, w przypadku przedstawionym na ryc. 8.116.

Zatem rzeczywiście $k_1\cdot k_2\cdot k_3=-1$. ◻

Prawdziwe jest również następujące twierdzenie:

Twierdzenie (odwrotne do twierdzenia Menelausa)

Jeżeli punkty A', B', C' odpowiednio boków BC, CA i AB trójkąta ABC (lub ich przedłużeń) spełniają równość

(∗) $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=-1,$$

to leżą one na jednej prostej.

◻ Dowód. Gdyby bowiem prosta $A'C'$ przecinała AC w punkcie B'' różnym od B' (ryc. 8.117), to w myśl twierdzenia Menelausa mielibyśmy

$$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB''}{B''A}=-1,$$

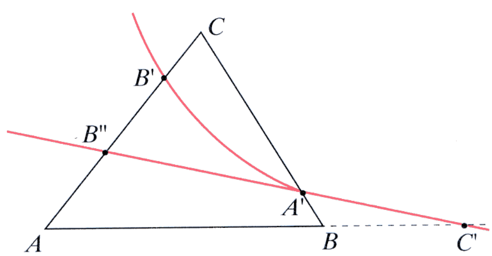
co wraz z założoną równością (∗) dałoby równość

$$\frac{CB'}{B'A}=\frac{CB''}{B''A},$$

czyli równość

$$\frac{CB'}{CB''}=\frac{B'A}{B''A},$$

która jest niemożliwa, gdyż jeden z tych ułamków jest większy, drugi zaś mniejszy od jedności. Otrzymana sprzeczność dowodzi tezy. ◻



Ryc. 8.117.

Pytania i zadania

1. Ramiona kąta o wierzchołku O przecięto dwiema równoległymi, które na jednym z ramion wyznaczają (kolejno od wierzchołka O), punkty A i B, a na drugim punkty C i D.
   a) Oblicz OA, jeśli $OB = 10$ cm, $OC = 3$ cm, $CD = 5$ cm.
   b) Oblicz CD, jeśli $OD = 15$ cm, $OB = 12$ cm, $AB = 9$ cm.
   c) Oblicz AC, jeśli $DB = 18$ cm, $OB = 24$ cm, $OA = 12$ cm.
   d) Oblicz DB, jeśli $AC = 8$ cm, $OC = 3$ cm, $CD = 9$ cm.
2. Podstawa AB trójkąta ABC ma długość 21 cm. Bok AC podzielono na trzy równe części i przez punkty podziału poprowadzono proste równoległe do AB. Wyznacz długości odcinków wewnątrz trójkąta.
3. Odcinek DE o długości 11 cm łączy środki boków AC i BC trójkąta ABC. Jakie jest wzajemne położenie odcinków DE i AB? Wyznacz długość odcinka AB.
4. W trapezie $ABCD$ podstawy AB i CD oraz ramię AD mają długości odpowiednio 15 cm, 12 cm i 6 cm. O ile cm należy przedłużyć ramię AD, by przecięło się z przedłużeniem ramienia BC?
5. Dom o szerokości 14 m sfotografowano aparatem, w którym odległość między soczewką a błoną fotograficzną wynosi 10 cm. Oblicz odległość aparatu od domu, jeżeli szerokość obrazu domu jest równa 8 cm.
6. Dla wyznaczenia odległości niedostępnych w terenie punktów A i B obrano na przedłużeniu odcinka AB punkt C oraz niewspółliniowy z punktami A, B, C punkt D. Przez punkt F prostej CD poprowadzono równoległą do AB, przecinającą proste AD i BD odpowiednio w punktach G i H. Wyznacz odległość AB, jeśli $CD = 60$ m, $DF = 12$ m, $GH = 19{,}5$ m.
7. Dane są odcinki a i b. Zbuduj odcinki o długościach:
   a) $\frac{a^2}{b}$; b) $\frac{a(a+b)}{b}$; c) $(a+b)\frac{a^2}{b^2}$; d) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$.
8. Wykaż, że w każdym czworokącie środki kolejnych jego boków są wierzchołkami równoległoboku.
9*. Udowodnij, że w każdym trapezie odcinek łączący środki nierównoległych boków jest równoległy do podstaw i ma długość równą średniej arytmetycznej ich długości.
10*. Wykaż, że w każdym trapezie odcinek łączący środki jego przekątnych jest równoległy do podstaw i i ma długość równą połowie różnicy ich długości.
11*. Udowodnij **twierdzenie Cevy** (czyt. czewy): Jeżeli proste przechodzące przez wierzchołki A, B i C trójkąta ABC i przecinające jego boki BC, CA i AB lub ich przedłużenia odpowiednio w punktach A', B' i C' przecinają się w jednym punkcie, to
   $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1.$$
   Wskazówka. Zastosuj dwukrotnie twierdzenie Menelausa – najpierw do trójkąta $AC'C$ i prostej BB', a następnie do trójkąta $C'BC$ i prostej AA'.
12*. Udowodnij twierdzenie odwrotne do twierdzenia Cevy: Jeżeli punkty wewnętrzne A', B' i C' odpowiednio boków BC, CA i AB trójkąta ABC spełniają równość
   $$\frac{AC'}{C'B}\cdot\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}=1,$$

to proste AA', BB' i CC' przecinają się w jednym punkcie.
Wskazówka. Rozumuj przez sprzeczność.

13*. Udowodnij, korzystając z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, że w każdym trójkącie:

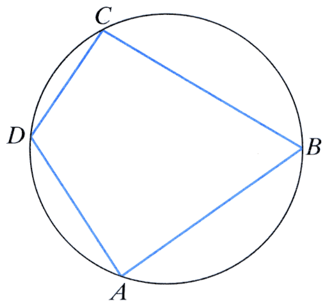
a) środkowe przecinają się w jednym punkcie,
b) dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie,
c) wysokości przecinają się w jednym punkcie.

12. Czworokąt wpisany w okrąg

Czworokątem wpisanym w okrąg nazywamy taki czworokąt, którego wszystkie wierzchołki leżą na okręgu (ryc. 8.118).

Jak wpisać czworokąt w okrąg? Czy zawsze można to zrobić?

Wiemy, że każdy trójkąt daje się wpisać w okrąg, bo w każdym trójkącie symetralne boków przecinają się w jednym punkcie. Punkt ten jest równo odległy od wszystkich wierzchołków trójkąta, stanowi więc środek opisanego na nim okręgu. Aby trójkąt wpisać w okrąg, rysujemy symetralne boków (wystarczy tylko dwóch!); wbijamy w ich punkcie przecięcia nóżkę cyrkla i jego rozwartością, równą odległości tego punktu od wierzchołków trójkąta, prowadzimy przez nie okrąg.



Ryc. 8.118.

Czy można tak samo postąpić z czworokątem? Bez problemu wpisujemy w okrąg dowolny prostokąt. Prowadzimy jego przekątne, w punkcie ich przecięcia wbijamy nóżkę cyrkla i jego rozwartością równą połowie długości przekątnej rysujemy okrąg, który przechodzi przez wszystkie wierzchołki. Nie da się jednak tak samo postąpić z rombem niebędącym kwadratem.

Jaką zatem własność musi mieć czworokąt, aby można go było wpisać w okrąg?

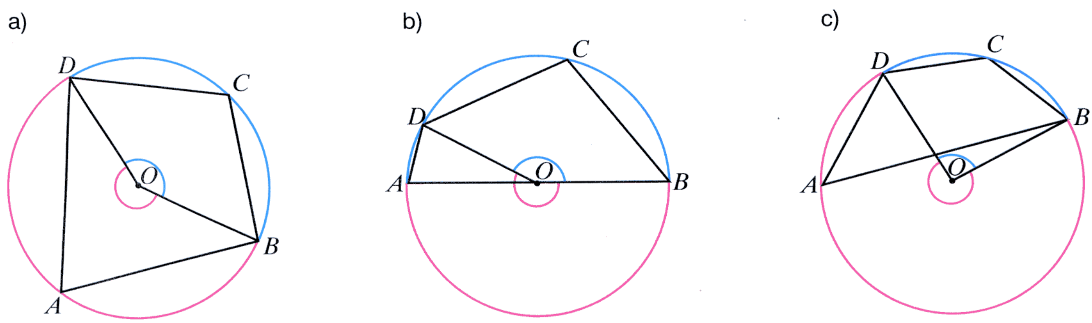
O tym właśnie mówi następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Czworokąt można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy jego przeciwległych kątów są równe.

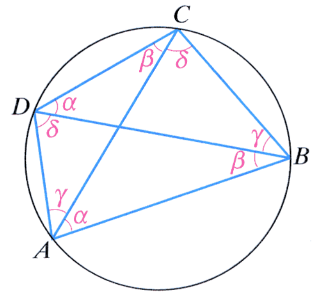
Dowód. Załóżmy najpierw, że czworokąt można wpisać w okrąg. Niech czworokątem tym będzie czworokąt $ABCD$, zaś O niech będzie środkiem tego okręgu (ryc. 8.119). Wówczas widzimy, że przeciwległe kąty A i C tego czworokąta dopełniają się do kąta półpełnego (jako kąty wpisane oparte na łukach dopełniających się do całego okręgu).

Skoro więc $\sphericalangle A + \sphericalangle C = 180^\circ$, to również $\sphericalangle B + \sphericalangle D = 180^\circ$. A zatem rzeczywiście $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \sphericalangle B + \sphericalangle D$.



Ryc. 8.119.

A można inaczej. Poprowadźmy przekątne czworokąta $ABCD$ i zaznaczmy w nim wszystkie pary równych kątów (na mocy twierdzenia o kątach wpisanych). Widzimy, że $\sphericalangle A + \sphericalangle C = \alpha + \beta + \gamma + \delta = \sphericalangle B + \sphericalangle D$ (ryc. 8.120).



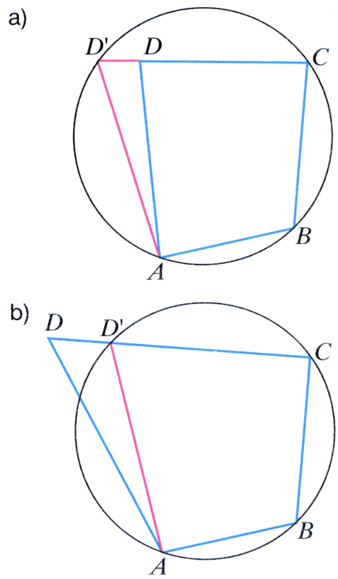
Ryc. 8.120.

Załóżmy, na odwrót, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $ABCD$ są równe, czyli że kąty przeciwległe tego czworokąta dopełniają się do kąta półpełnego. Należy wykazać, że wszystkie wierzchołki tego czworokąta leżą na jednym okręgu. Przez dowolne trzy spośród nich, na przykład przez A, B, C, możemy oczywiście poprowadzić okrąg.

Gdyby okrąg ten nie przechodził przez czwarty wierzchołek D, to wierzchołek ten musiałby się znaleźć:

a) albo wewnątrz koła o tym okręgu (ryc. 8.121a),

b) albo na zewnątrz tego okręgu (ryc. 8.121b).



Ryc. 8.121.

W przypadku pierwszym kąt D byłby wówczas większy, zaś w przypadku drugim – mniejszy od kąta D' dopełniającego kąt B do kąta półpełnego (dlaczego?). Przecież z założenia właśnie kąt D jest tym dopełnieniem kąta B. Otrzymana sprzeczność dowodzi, że okrąg poprowadzony przez wierzchołki A, B, C czworokąta $ABCD$ nie może nie przechodzić przez wierzchołek D. Zatem, rzeczywiście, czworokąt $ABCD$ można wpisać w okrąg. ▢

Widzimy teraz, dlaczego każdy prostokąt można wpisać w okrąg, żaden zaś równoległobok niebędący prostokątem nie daje się wpisać w okrąg.

A który z trapezów można wpisać w okrąg?

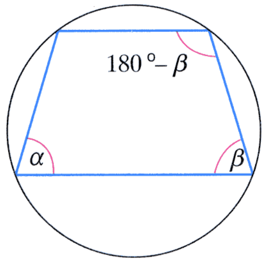
Odpowiedzią na to pytanie jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie

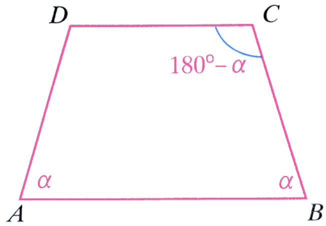
Trapez można wpisać w okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy jest równoramienny.

▢ Dowód. Załóżmy, że trapez można wpisać w okrąg. Wówczas (ryc. 8.122) widzimy, że $\alpha + 180^\circ - \beta = 180^\circ$, skąd $\alpha = \beta$. Zatem trapez ten jest równoramienny.

Załóżmy, na odwrót, że trapez jest równoramienny (ryc. 8.123). Wtedy $\alpha + (180^\circ - \alpha) = 180^\circ$, co dowodzi, że trapez ten można wpisać w okrąg. ▢



Ryc. 8.122.



Ryc. 8.123.

Pytania i zadania

1. Jaką własność ma czworokąt wpisany w okrąg?
2. Jak znaleźć środek okręgu przechodzącego przez wszystkie wierzchołki czworokąta?
3. Kiedy trapez można wpisać w okrąg?
4. Kiedy równoległobok można wpisać w okrąg?
5. Znajdź pozostałe kąty czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, wiedząc, że $\sphericalangle A = 50^\circ$, $\sphericalangle B = 70^\circ$.
6. Wyznacz kąty czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg, jeśli wiadomo, że $\sphericalangle C = 2\sphericalangle A$, $\sphericalangle D = 3\sphericalangle B$.
7. Udowodnij, że jeżeli dwusieczne kątów równoległoboku przecinają się w czterech punktach, to punkty te leżą na jednym okręgu.
8. Z dowolnego punktu P wewnątrz przyprostokątnej BC trójkąta prostokątnego ABC opuszczono na przeciwprostokątną AB prostopadłą PQ. Udowodnij, że kąty PAQ i PCQ są równe.
9*. Wewnątrz boków BC, CA i AB trójkąta ABC obrano punkty odpowiednio A', B' i C' takie, że odcinki AA', BB' i CC' przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że jeżeli dwa z czworokątów: $AB'PC'$, $BC'PA'$ i $CA'PB'$ można wpisać w okrąg, także trzeci z nich można wpisać w okrąg.
10*. Z dowolnego punktu P wewnątrz danego kąta ostrego o wierzchołku A opuszczono na ramiona prostopadłe PB i PC. Z punktu A opuszczono prostopadłą AK na odcinek BC. Udowodnij, że kąty BAK i PAC są równe.
11*. Na okręgu obrano kolejno cztery punkty A, B, C i D. Punkt P jest środkiem łuku $\overset{\frown}{AB}$. Cięciwy PC i PD przecinają cięciwę AB odpowiednio w punktach Q i R. Udowodnij, że czworokąt $RQCD$ można wpisać w okrąg.
12. W trójkącie ostrokątnym ABC poprowadzono wysokości BB' i CC', przecinające się w punkcie H. Udowodnij, że punkty A, B', H i C' leżą na jednym okręgu.
13. Odcinki AB i CD przecinają się w punkcie P, przy czym $AB = CD$ i $AP = PC$. Wykaż, że czworokąt $ACBD$ można wpisać w okrąg.

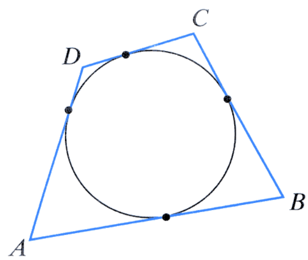
13. Czworokąt opisany na okręgu

Czworokątem **opisanym na okręgu** nazywamy czworokąt, którego wszystkie boki lub ich przedłużenia są styczne do okręgu zawartego w tym czworokącie.

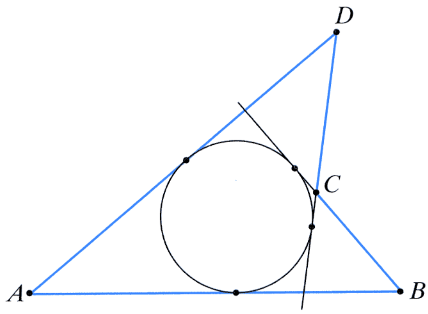
Definicja ta obejmuje dwa przypadki:

a) czworokąta, którego wszystkie kąty wewnętrzne są mniejsze od kąta półpełnego – czworokąt taki nazywamy czworokątem **wypukłym** (ryc. 8.124).

b) czworokąta, którego jeden z kątów jest większy od kąta półpełnego – czworokąt taki nazywamy czworokątem **wklęsłym** (ryc. 8.125).



Ryc. 8.124.



Ryc. 8.125.

Opisać czworokąt na okręgu oznacza dokładnie to samo, co wpisać w czworokąt okrąg.

W jaki czworokąt można wpisać okrąg? Czy zawsze można to zrobić?

Twierdzenie

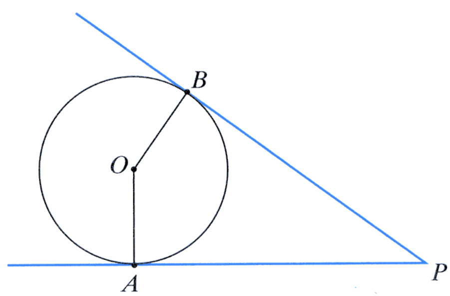
W czworokąt (wypukły lub wklęsły) można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy przeciwległych boków są równe.

Zanim podamy dowód tego twierdzenia, udowodnimy lemat.

Lemat. Odcinki stycznych, poprowadzonych do okręgu z punktu poza nim, o końcach w tym punkcie i w punktach styczności, są równe.

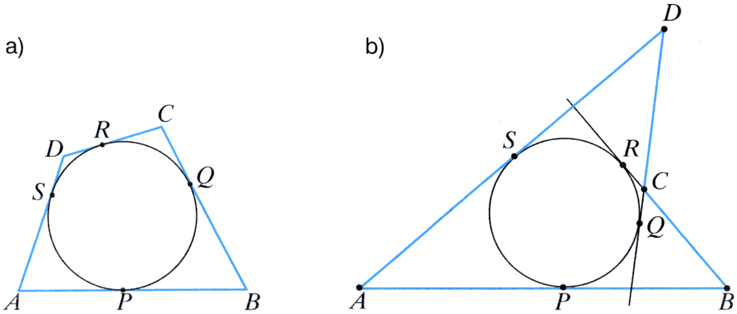
▢ Dowód. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 8. 126. Prowadząc promienie tego okręgu do punktów styczności, otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne, z których jeden można nałożyć na drugi (dlaczego?). Stąd wynika równość ich odpowiednich boków, a wśród nich wymienionych odcinków.▢

Przystępujemy do dowodu twierdzenia.



Ryc. 8.126.

☐ Dowód. Załóżmy, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Oznaczmy punkty styczności tego okręgu z bokami czworokąta kolejno przez P, Q, R i S (ryc. 8.127).



Ryc. 8.127.

Wówczas na mocy lematu otrzymujemy:

a) w przypadku czworokąta wypukłego (ryc. 8.127a) równości:
$AP=AS$, $PB=BQ$, $CR=CQ$, $DR=DS$,
które dodane do siebie stronami dają równość
$(AP+PB)+(CR+DR)=(AS+DS)+(BQ+CQ)$,
a więc równość $AB+CD=AD+BC$.

b) w przypadku czworokąta wklęsłego (ryc. 8.127b) – równości:
$AP=AS$, $BP=BR$, $CQ=CR$, $DQ=DS$, z których wynika, że
$AB+DC=AP+PB+DQ-CQ=AS+BR+DS-CR=$
$=(AS+DS)+BC+CR-CR=AD+BC$.

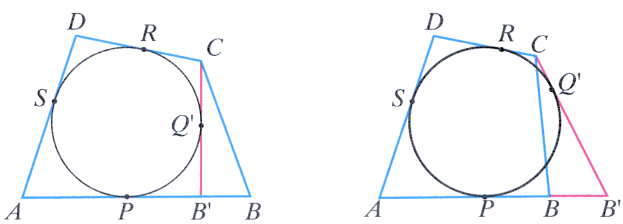
W obu przypadkach dostaliśmy równość sum przeciwległych boków czworokąta $ABCD$.

Załóżmy teraz, na odwrót, że sumy przeciwległych boków czworokąta $ABCD$ są równe, to znaczy, że zachodzi równość

$(*)$ $AB+CD=BC+AD$.

Należy dowieść, że w czworokąt $ABCD$ można wpisać okrąg. Przypuśćmy, że nie można. Wtedy okrąg ten, styczny do trzech boków czworokąta $ABCD$ (czy taki okrąg istnieje?), musiałby z czwartym bokiem być rozłączny lub przecinać się z nim.

W przypadku gdy czworokąt $ABCD$ jest wypukły (ryc. 8.128), z wierzchołka C prowadzimy odcinek styczny do danego okręgu w punkcie Q' i o końcu B' na boku AB lub jego przedłużeniu. Otrzymujemy w ten sposób opisany na okręgu czworokąt wypukły $AB'CD$, w którym (na mocy udowodnionej już części twierdzenia) zachodzi równość



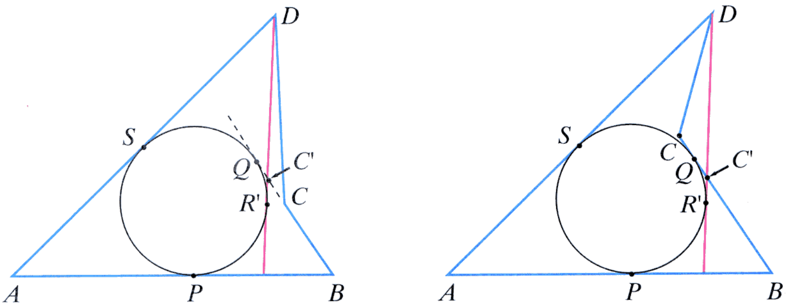
Ryc. 8.128.

$(**)\ AB' + CD = B'C + AD$.

Po odjęciu równości $(*)$ i $(**)$ stronami otrzymujemy równość $AB - AB' = BC - B'C$, czyli równość $\pm BB' = BC - B'C$, która w trójkącie $BB'C$ zachodzić nie może (dlaczego?).

W przypadku, gdy czworokąt $ABCD$ jest wklęsły (ryc. 8.129), podobnie jak poprzednio, prowadzimy z wierzchołka D odcinek styczny do danego okręgu w punkcie R' i przecinający prostą BC w punkcie C'. Otrzymujemy wówczas opisany na okręgu czworokąt wklęsły $ABC'D$, w którym (na mocy udowodnionej już części twierdzenia) mamy równość

$(***)\ AB + C'D = AD + BC'$.



Ryc. 8.129.

Po odjęciu równości $(*)$ i $(***)$ stronami otrzymujemy równość $CD - C'D = BC - BC'$, a więc równość $CD - C'D = \pm CC'$, która w trójkącie $CC'D$ zachodzić nie może.

Otrzymana symetryczność dowodzi, że jeśli w czworokącie zachodzi równość sum przeciwległych boków, to w czworokąt ten można wpisać okrąg. Dowód twierdzenia mamy zakończony. □

Pytania i zadania

1. Kiedy czworokąt można opisać na okręgu?
2. Czy każdy równoległobok można opisać na okręgu?
3. Czy czworokąt, w którym dwusieczne kątów wewnętrznych przecinają się w jednym punkcie, można opisać na okręgu?
4. Udowodnij, że jeżeli punkt przecięcia się przekątnych czworokąta jest środkiem okręgu wpisanego w ten czworokąt, to czworokąt ten jest rombem.

5*. Udowodnij, że w trapez można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy okręgi, których średnicami są boki nierównoległe trapezu, są do siebie styczne zewnętrznie.

6*. Punkt przecięcia przekątnych czworokąta wpisanego w okrąg zrzutowano prostopadle na boki. Wykaż, że w czworokąt o wierzchołkach w tych rzutach można wpisać okrąg.

7*. Na płaszczyźnie dane są cztery okręgi, z których każdy jest styczny zewnętrznie do dwóch sąsiednich. Udowodnij, że w czworokąt o wierzchołkach w środkach tych okręgów można wpisać okrąg

8*. W trójkącie ABC przez punkt wewnętrzny P poprowadzono proste AP, BP, CP przecinające boki BC, CA, AB odpowiednio w punktach A', B', C'. Wykaż, że jeśli w dwa czworokąty spośród czworokątów: $AC'PB'$, $BA'PC'$, $CB'PA'$ można wpisać okrąg, to można również wpisać okrąg w trzeci z nich.

14. Rodzaje czworokątów

W podrozdziale tym będziemy omawiać własności pewnych czworokątów wypukłych. Odtąd, mówiąc czworokąt, będziemy mieli na myśli czworokąt wypukły.

W zależności od wzajemnego położenia prostych, na których leżą boki czworokąta, rozróżniamy trzy rodzaje czworokątów:
- mające **dwie pary boków równoległych** to **równoległoboki**,
- mające **co najmniej jedną parę boków równoległych – trapezy**,
- niemające **żadnej pary boków równoległych – trapezoidy**.

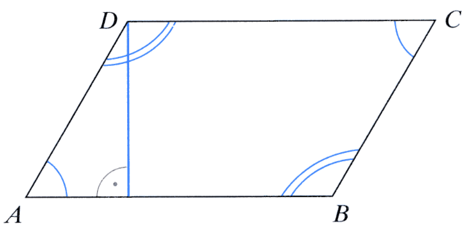
Wśród nich najlepiej ci znane są równoległoboki i trapezy. I nim właśnie przyjrzymy się teraz bliżej. W dowodzeniu własności równoległoboków i trapezów korzystać będziemy z wielu zasad dobrze ci znanych jeszcze z gimnazjum.

Równoległoboki

Równoległobokiem nazywamy czworokąt, który ma **dwie pary** boków równoległych.

Jeżeli któryś z boków równoległoboku $ABCD$ uznamy za podstawę, na przykład AB, to odcinek poprowadzony do niego prostopadle z przeciwległego wierzchołka nazwiemy jego wysokością (ryc. 8.130).

A oto łatwe do udowodnienia własności równoległoboku, które zapiszemy w postaci twierdzenia.



Ryc. 8.130.

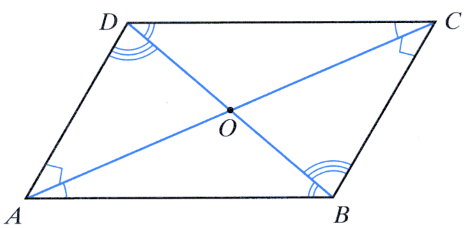
Twierdzenie 1.

W każdym równoległoboku:
1. przeciwległe boki są równe,
2. przeciwległe kąty są równe,
3. kąty wewnętrzne przy jednym boku dopełniają się do kąta pełnego,
4. przekątne przecinają się w połowie.

Udowodnimy dla przykładu własność 4., pozostałe własności spróbuj wykazać sam.

Dowód. Rozważmy zatem dowolny równoległobok $ABCD$, poprowadźmy jego przekątne i oznaczmy punkt, w którym się one przecinają, przez O (ryc. 8.131).

Zaznaczmy jeszcze w tym równoległoboku wszystkie pary kątów naprzemianległych, które (jak wiesz) są kątami równymi. Widzimy, że na przykład trójkąty AOB i COD można na siebie nałożyć (mają po jednym boku równym i kąty przy nich odpowiednio są sobie równe). Stąd wynikają równości ich odpowiednich boków, to znaczy odcinków OA i OC oraz OB i OD. Stąd teza.



Ryc. 8.131.

Twierdzenie to moglibyśmy sformułować tak: Jeżeli czworokąt jest równoległobokiem, to zachodzi każdy z wyżej wymienionych warunków. Inaczej mówiąc, każdy z tych warunków jest **warunkiem koniecznym**, aby czworokąt był równoległobokiem. Tymczasem okazuje się, że każdy z nich jest także **warunkiem wystarczającym** na to, aby czworokąt był równoległobokiem. Zachodzi bowiem następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2.

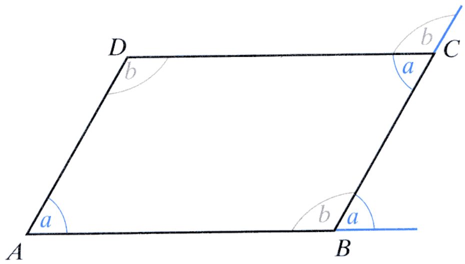
Jeżeli w czworokącie zachodzi co najmniej jeden z warunków:
1. przeciwległe boki są równe,
2. przeciwległe kąty są równe,
3. kąty wewnętrzne przy jednym boku dopełniają się do kąta półpełnego,
4. przekątne połowią się,

to czworokąt ten jest równoległobokiem.

Tym razem wykażemy, dla przykładu, że warunkiem wystarczającym, aby czworokąt był równoległobokiem, jest warunek 2.

□ Dowód. Oznaczmy kąty przeciwległe równoległoboku $ABCD$ odpowiednio przez α i β (ryc. 8.132).

Ponieważ w każdym czworokącie suma miar kątów wewnętrznych wynosi 360°, więc $2(\alpha+\beta)=360^\circ$, skąd $\alpha+\beta=180^\circ$. Jednak każde dwa kąty przyległe dopełniają się do kąta półpełnego, wobec czego kąt przyległy do kąta β jest równy α, kąt zaś przyległy do kąta α jest równy β. Oznacza to równoległość przeciwległych boków naszego czworokąta. Jest on więc równoległobokiem. □



Ryc. 8.132.

Dowody dla pozostałych warunków potraktuj jako ćwiczenie.

Z powyższych twierdzeń wynikają takie oto wnioski:

Wniosek 1. Równoległobok mający dwa boki wychodzące z jednego wierzchołka równe, wszystkie cztery boki ma równe. Taki równoległobok nazywamy **rombem**.

Wniosek 2. Równoległobok, którego jeden kąt jest prosty, ma wszystkie kąty proste. Taki równoległobok nazywamy **prostokątem**.

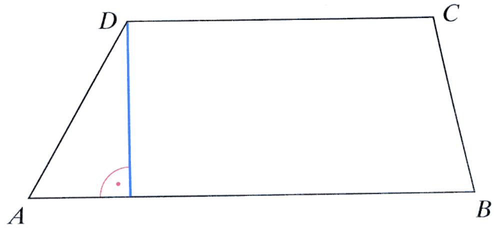
Wniosek 3. Równoległobok, którego dwa sąsiednie boki są równe, a kąt między nimi jest prosty, ma wszystkie boki równe i wszystkie kąty proste. Taki równoległobok jest **kwadratem**.

Inne własności równoległoboku podano w zadaniach na końcu podrozdziału.

Trapezy

Trapezem nazywamy czworokąt, który ma **co najmniej jedną parę** boków równoległych.

W trapezie $ABCD$ (ryc. 8.133) boki równoległe AB i CD nazywamy **podstawami**, pozostałe boki **ramionami** trapezu. Odcinek prostopadły do podstaw trapezu nazywamy wysokością trapezu.

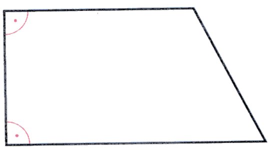


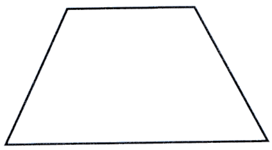
Ryc. 8.133.

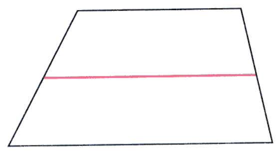
Kąty trapezu, których wspólnym ramieniem jest ramię trapezu, dopełniają się do kąta półpełnego.

Trapez, którego jeden z kątów jest prosty, nazywamy trapezem **prostokątnym** (ryc. 8.134). Trapez prostokątny ma dwa kąty proste. Trapez, którego ramiona są równe, nazywamy trapezem **równoramiennym** (ryc. 8.135).

Odcinek łączący środki ramion nazywamy **linią środkową** trapezu (ryc. 8.136).


Ryc. 8.134.


Ryc. 8.135.


Ryc. 8.136.

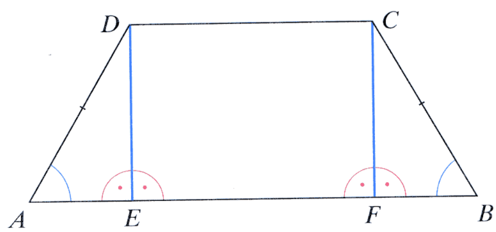
Trapez równoramienny, **niebędący równoległobokiem**, ma trzy osobliwe własności. Jedną poznaliśmy już wcześniej (podrozdział 12), kolejne dwie z nich formułujemy w postaci następującego twierdzenia.

Twierdzenie 3.

W trapezie równoramiennym:
1. kąty przy podstawie są równe,
2. przekątne są równe.

☐ Dowód.

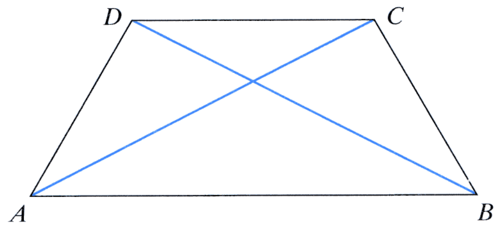
1. Załóżmy, że trapez $ABCD$ jest równoramienny (ryc. 8.137). Prowadząc jego wysokości DE i CF, otrzymujemy dwa trójkąty prostokątne, z których jeden możemy nałożyć na drugi (dlaczego?). Stąd bezpośrednio otrzymujemy równość kątów przy podstawie AB trapezu $ABCD$.
2. Załóżmy, że trapez $ABCD$ jest równoramienny. Poprowadźmy w nim przekątne (ryc. 8.138).



Ryc. 8.137.

Widzimy teraz, że trójkąty ABD i ABC mają:
a) jeden bok AB – wspólny,
b) boki AD i BC – równe (ramiona trapezu),
c) kąty między bokami AB i AD oraz AB i BC – równe.

Zatem jeden z nich można nałożyć na drugi (trójkąty te są przystające). Stąd wynika równość przekątnych naszego trapezu. ▢



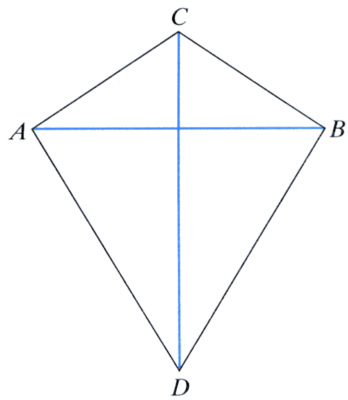
Ryc. 8.138.

Trapezoidy

Trapezoidem nazywamy czworokąt, w którym **żadna para** boków nie jest równoległa.

Wśród trapezoidów na szczególną uwagę zasługuje czworokąt, w którym każde dwa sąsiednie boki są równe, zaś przeciwległe nie są równe. Czworokąt taki nazywamy **deltoidem** (ryc. 8.139).

Widzimy zatem, że przekątne każdego deltoidu są do siebie prostopadłe, przy czym tylko jedna z nich przecina w połowie drugą.



Ryc. 8.139.

Pytania i zadania

1. Podaj określenie:
   a) trapezu, b) równoległoboku, c) trapezoidu.
2. Jaki równoległobok nazywamy:
   a) rombem, b) prostokątem, c) kwadratem?
3. Udowodnij, że dwusieczne kątów równoległoboku przecinają się albo w jednym punkcie, albo w wierzchołkach pewnego prostokąta.
4. Wykaż, że równoległobok, którego przekątne są do siebie prostopadłe, jest rombem.
5. Udowodnij, że równoległobok, którego przekątne są równe, jest prostokątem.
6. Wewnątrz danego kąta ostrego obrano punkt P. Poprowadź przez punkt P prostą, aby odcinek, wycięty na niej przez ramiona kąta, miał środek w punkcie P.
7. Wewnątrz danego kąta ostrego obrano dwa różne punkty P i Q. Zbuduj równoległobok, którego dwoma przeciwległymi wierzchołkami są punkty P i Q, a pozostałe dwa leżą na ramionach kąta.
8. W prostokącie różnica odległości jego środka od dwóch nierównych boków jest równa 3. Oblicz długości boków, jeżeli obwód równa się 30.
9. W rombie jedna z przekątnych jest równa jego bokowi. Wyznacz kąty rombu.

10. Różnica długości boków podstaw trapezu jest równa 8, a długość linii środkowej wynosi 11. Oblicz długości podstaw tego trapezu.
11. Bok rombu tworzy z przekątnymi kąty, których różnica ma miarę 15°. Oblicz kąty rombu.
12. Wykaż, że środki boków każdego rombu są wierzchołkami prostokąta.
13. Oblicz miary kątów rombu, w którym wysokość poprowadzona z wierzchołka kąta rozwartego przecina na pół bok tego rombu.
14. Udowodnij, że środki boków trapezu równoramiennego są wierzchołkami rombu.
15. Wykaż, że trapez, którego przekątne są równe, jest równoramienny.
16. Zbuduj kwadrat, mając dane:
    a) bok,
    b) przekątną.
17. Zbuduj trapez, mając dane: podstawy, jedno ramię i jedną przekątną.
18. Zbuduj trapez, mając dane cztery boki.
19. Zbuduj romb, mając dany bok oraz:
    a) jeden z kątów,
    b) przekątną,
    c) wysokość.

Odpowiedzi i wskazówki

Rozdział I.

2.

6. a) zbiór rzek; b) zbiór miast; c) zbiór trójek liczb całkowitych; d) zbiór wyrazów.

7. a) tożsamościowa w zbiorze liczb całkowitych; b) tożsamościowa w zbiorze liczb całkowitych; c) sprzeczna w zbiorze par liczb rzeczywistych; d) sprzeczna w zbiorze liczb rzeczywistych; e) tożsamościowa w zbiorze par liczb rzeczywistych.

4.

3. Zdania: a), c), d) są prawdziwe, zaś b) fałszywe.

4. Zdanie a) jest fałszywe, zdania b) i c) są prawdziwe.

5. Zdania a), b), c) są prawdziwe, zdanie d) jest fałszywe.

6. a) x może być każdą liczbą mniejszą od 1; b) x może być każdą liczbą nie mniejszą niż -2 i nie większą niż 2; c) x może być każdą liczbą różną od 0.

6.

4. a) nie, bo $x^2 > 1$ także dla $x < -1$; b) nie, bo dla $x \leqslant -1$ mamy $x^2 \geqslant 1$.

5. Zdania a) i b) są prawdziwe, zaś c) i d) – fałszywe.

6. a) dla x, y dodatnich; b) dla x, y ujemnych; c) np. dla $b = 3, c = 4, a = 5$; d) np. dla $n = 0, 6, 12, 18, 24$ albo $n = 1, 5, 7, 11$.

7. a) nie, np. gdy p jest zdaniem prawdziwym, zaś q – fałszywym; b) nie, np. gdy p jest zdaniem fałszywym, zaś q – prawdziwym; c) tak.

8.

5. a) nie, b) nie, c) tak.

9.

4. a) zdanie fałszywe, b) zdanie prawdziwe, c) zdanie prawdziwe, d) zdanie prawdziwe, e) zdanie prawdziwe.

5. a) $\bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} (x+y)^2 = x^2 + y^2$; b) $\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} (x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$; c) $\bigvee_{x \in R} x^2 - 4 < 0$;
d) $\bigvee_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 - y^2 = x - y$; e) $\bigwedge_{x \in R} \bigwedge_{y \in R} x^2 + y^2 \geqslant 2xy$; f) $\bigvee_{x \in R} x^2 \leqslant 0$.

10.

1. 35, 46, 74. Wskazówka: Prawdziwe mogą być jednocześnie zdania: a) i d), b) i d) oraz c) i d).

2. 1974. Wskazówka: Prawdziwe jednocześnie mogą być jedynie zdania a) i c).

3. Do miasta A.

Rozdział II.

1.

6. $A \cap B = A$, $A \cup B = B$, $A \setminus C = A$, $A \cap C = \varnothing$, $B \cap C =$ zbiór trójkątów prostokątnych równoramiennych (o równych przyprostokątnych), $B \cup C =$ zbiór trójkątów równoramiennych i trójkątów prostokątnych, $C \setminus A = C$, $A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A$ = zbiór trójkątów równoramiennych niebędących równobocznymi, $B \setminus C =$ zbiór trójkątów równoramiennych nieprostokątnych (ostrokątnych lub rozwartokątnych).

7. a) $A \cap B$; b) $A \cup B$; c) $A \cup C$; d) $B \cap C$; e) $A \cap C$; f) $A \cup B \cup C$; g) $B \cup C$.
8. $a = 9$, $b = 7$, $c = 8$, $d = 6$. **9.** $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 6, 7, 8\}$, $C = \{3, 4, 5, 7, 9\}$.

2.

3. a) $x \in A \cap (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \wedge x \notin C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in A \cap B \wedge x \notin C \Leftrightarrow x \in (A \cap B) \setminus C$;
b) $x \in A \setminus (B \setminus C) \Leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \setminus C \Leftrightarrow x \in A \wedge (x \notin B \vee x \in C) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \Leftrightarrow x \in A \setminus B \vee x \in A \cap C \Leftrightarrow x \in (A \setminus B) \cup (A \cap C)$.
4. a) tak; b) tak; c) nie.
5. $A \cap B = B, A \cap D = D, B \cup D = B, C \setminus D =$ zbiór równoległoboków niebędących prostokątami; $C \cup D = C, C \cap D = D, B \setminus A = \varnothing, D \setminus C = \varnothing$.

3.

3. $\{x : (\sim p(x)) \vee (\sim q(x))\} = A' \cup B'$; $\{x : (\sim p(x)) \wedge (\sim q(x))\} = A' \cap B'$.

Rozdział III.

1.

4. a) -8; b) 0,5; c) $\frac{1}{2}$; d) 80. **5.** 100. **6.** 7. **7.** 8. **8.** 2.
9. a) $x = 1$; b) $x = 1$; c) $x = 498425$.
10. Albo 7 słoików po $1\frac{1}{2}$ kg i 1 słoik po $2\frac{1}{2}$ kg, albo 2 słoiki po $1\frac{1}{2}$ kg i 4 słoiki po $2\frac{1}{2}$ kg.

2.

4. 27. **6.** 96%. **7.** 26,5%. **8.** Nie, jest niższa o 0,04%. **9.** 34%. **10.** 69960,25 zł. **11.** $p = 40$.

3.

Potęgowanie

3. a) a; b) x^2; c) x^2; d) x^3; e) $a^4 b^4$. **4.** a) abc; b) $a^4 c$.
5. a) $\frac{125}{512}$; b) 2; c) $\frac{5}{3}$; d) $\frac{18}{7}$. **6.** a) 64; b) -1; c) 3375.
7. a) $3^{200} > 2^{300}$, bo $3^{200} = 9^{100}$, zaś $2^{300} = 8^{100}$; b) $32^{50} > 4^{100}$, bo $32^{50} = 2^{250}$, zaś $4^{100} = 2^{200}$;
c) $9^{20} > 27^{13}$; d) $45^{10} \cdot 5^{30} = 75^{20}$; e) $18^{15} > 63^{10}$, bo $18^{15} > 16^{15} = 4^{30} = 64^{10} > 63^{10}$;
f) $22^{55} > 55^{22}$, bo $22^{55} = (2 \cdot 11)^{55} = 2^{55} \cdot 11^{55} = 32^{11} \cdot 11^{55}$, zaś
$55^{22} = (5 \cdot 11)^{22} = 5^{22} \cdot 11^{22} = 25^{11} \cdot 11^{22}$.
8. $5^{18} < 2^{45} < 4^{27} < 3^{36}$, bo $5^{18} = 25^9$, $2^{45} = 32^9$, $4^{27} = 64^9$, $3^{36} = 81^9$.
9. a) 2^{27}; b) 3^{40}; c) 5^1.

Pierwiastkowanie

6. a) $13\sqrt{5}$; b) $2a\sqrt{a}$; c) $-7\sqrt{6} + 4\sqrt{10}$. **7.** a) $\frac{2}{3}$; b) 1.

4.

5. a) 1; b) $\frac{7}{12}$. **7.** a) 2002; b) 2002.

5.

1. a) 2; b) 57; c) 330; d) 315. **2.** a) -3; b) 4.
3. $\sqrt{8 - 2\sqrt{15}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{8 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{5} - 2\sqrt{10}} =$
$= \sqrt{5 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} + 3} + \sqrt{3 - 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} + 2} + \sqrt{1 + 2 + 5 + 2\sqrt{2} \cdot 1 - 2\sqrt{5} \cdot 1 - 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} =$
$= \sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2} + \sqrt{(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2} + \sqrt{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{5})^2} = \sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - \sqrt{5} = 1.$

4. $\sqrt{2}\left(\sqrt{4+\sqrt{7}}-\sqrt{4-\sqrt{7}}-\sqrt{2}\right)=\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}-2=$

$=\sqrt{\left(\sqrt{7}+1\right)^2}-\sqrt{\left(\sqrt{7}-1\right)^2}-2=\sqrt{7}+1-\sqrt{7}+1-2=0.$

6.

1. a) $\dfrac{1}{(xy)^2}$; b) $\dfrac{1}{a+c}$. **2.** $a+b$.

3. Ponieważ $(a-b)+(b-c)+(c-a)=0$, więc

$(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a)$ (zob. przykład 6*).

5. a) $\left(\dfrac{1-2x^3}{1+x^3}\right)^3+\left(\dfrac{x\left(2-x^3\right)}{1+x^3}\right)^3+x^3=\dfrac{\left(1-2x^3\right)^3+x^3\left(2-x^3\right)^3+x^3\left(1+x^3\right)^3}{\left(1+x^3\right)^3}=$

$=\dfrac{1+3x^3+3x^6+x^9}{\left(1+x^3\right)^3}=\dfrac{\left(1+x^3\right)^3}{\left(1+x^3\right)^3}=1$; b) $\dfrac{x^4-(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2-x^2}+\dfrac{x^2-\left(x^2-1\right)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\dfrac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}=$

$=\dfrac{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x-1\right)}{\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)}+\dfrac{\left(x-x^2+1\right)\left(x+x^2-1\right)}{\left(x^2+x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}+\dfrac{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x+1\right)}{\left(x^2-x-1\right)\left(x^2+x+1\right)}=$

$=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+x+1}+\dfrac{-x^2+x+1}{x^2+x+1}+\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+x+1}=1.$

6. $\sqrt{11}-1$. Wskazówka: Zauważ, że k-ty składnik tej sumy jest postaci

$\sqrt{2k+1-2\sqrt{(k+1)k}}=\sqrt{(k+1)-2\sqrt{k+1}\cdot\sqrt{k}+k}=\sqrt{\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)^2}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k}.$

9.

6. a) $k\cdot\binom{n}{k}=k\cdot\dfrac{n!}{k!(n-k)!}=n\cdot\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=n\cdot\binom{n-1}{k-1}.$

b) $\binom{n}{k}\cdot\binom{k}{l}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{k!}{l!(k-l)!}=\dfrac{n!}{l!(n-l)!}\cdot\dfrac{(n-l)!}{(k-l)!((n-l)-(k-l))!}=\binom{n}{l}\cdot\binom{n-l}{k-l}.$

c) $\binom{2n}{n}=\dfrac{(2n)!}{n!n!}=\dfrac{2n\cdot(2n-1)!}{n(n-1)!\cdot n!}=2\cdot\dfrac{(2n-1)!}{n!((2n-1)-n)!}=2\cdot\binom{2n-1}{n}.$

7. Ponieważ $\binom{2k}{k}=2\cdot\binom{2k-1}{k}$, więc:

a) $\dfrac{\binom{2}{1}+\binom{4}{2}+\binom{6}{3}+\dots+\binom{2n}{n}}{\binom{1}{1}+\binom{3}{2}+\binom{5}{3}+\dots+\binom{2n-1}{n}}=\dfrac{2\left(\binom{1}{1}+\binom{3}{2}+\binom{5}{3}+\dots+\binom{2n-1}{n}\right)}{\binom{1}{1}+\binom{3}{2}+\binom{5}{3}+\dots+\binom{2n-1}{n}}=2;$

b) $\dfrac{\binom{2}{1}\cdot\binom{4}{2}\cdot\binom{6}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{2n}{n}}{\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{2n-1}{n}}=\dfrac{2^n\cdot\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{2n-1}{n}}{\binom{1}{1}\cdot\binom{3}{2}\cdot\binom{5}{3}\cdot\ldots\cdot\binom{2n-1}{n}}=2^n;$

c) korzystając z równości $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$, otrzymujemy:

$$\binom{2}{2}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{n-2}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}=$$

$$=\binom{3}{3}+\binom{3}{2}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{n-2}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}= \quad \left(\text{bo} \binom{2}{2}=\binom{3}{3}\right)$$

$$=\binom{4}{3}+\binom{4}{2}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{n-2}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}=$$

$$=\binom{5}{3}+\binom{5}{2}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{n-2}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}=$$

$$=\binom{6}{3}+\binom{6}{2}+\dots+\binom{n-2}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}=\dots=$$

$$=\binom{n-2}{3}+\binom{n-2}{2}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}=\binom{n-1}{3}+\binom{n-1}{2}+\binom{n}{2}=\binom{n}{3}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{3};$$

d) analogicznie jak c).

10.

6. $41+19\sqrt{2}$. **8.** Liczba ta jest całkowita, wynosi ona bowiem 198. **9.** $\binom{16}{6}x^3$.

10. $\binom{12}{4}$. **11.** $\binom{7}{2}x$. **13.** a) $\binom{24}{14}\cdot 36$; b) $\binom{5}{2}\cdot 6$; c) $\binom{5}{2}\cdot 6$.

Rozdział IV.

1.

8. a) $6\cdot 8+20:(4-2)=58$; b) $(3248:16-3)\cdot(315-156\cdot 2)=600$;
c) $350-15\cdot(104-1428:14)=320$.

9. $1-2+3-4+5-6+7-8+\dots+97-98+99-100=$
$=(1-2)+(3-4)+(5-6)+(7-8)+\dots+(97-98)+(99-100)=50\cdot(-1)=-50$.

10. 1.

2.

11. 129. Wskazówka: Zauważ, że jeżeli $d\,|\,n$, to $\frac{n}{d}\,|\,n$. **12.** 24. **13.** 25.

14. Wskazówka: Zauważ, że $n+1$ jest liczbą parzystą i podzielną przez 3.

15. Wskazówka: Uzasadnij, że co najmniej dwie spośród liczb a, b, c, d są parzyste.

16. Wskazówka: a) $4+7a=4(a+1)+3a$; b) $a+2-(35-b)=(a+b)-33$.

17. Wystarczy zauważyć, że $(a-1)^2+a^2+(a+1)^2=3a^2+2$.

18. Niech $\text{NWD}(a,b)=d$. Wtedy $a=k\cdot d . b=l\cdot d$ gdzie $(k,l)=1$. Stąd $\text{NWD}(a,b)=k\cdot l\cdot d$.
Zatem $a\cdot b=k\cdot d\cdot l\cdot d=d\cdot(k\cdot l\cdot d)=\text{NWD}(a,b)\cdot\text{NWD}(a,b)$.

19. Dwucyfrową końcówką szukanego kodu mogła być każda z liczb: 10, 40, 70, 25, 55, 85.
Wskazówka: Skorzystaj z cech podzielności przez 3 i przez 5.

20. Dana liczba to: 322357176. Wskazówka: Skorzystaj z cech podzielności przez 8 i przez 9.

21. Skoro $p\,|\,(5a-1)$ i $p\,|\,(a-10)$, to $p\,|\,[(5a-1)-5(a-10)]=49$, czyli $p\,|\,7^2$, więc $p=7$.
Zatem $7\,|\,(a-10)$ oraz $a-10=(a-3)-7$. Stąd $7\,|\,(a-3)$.

3.

3. a) 14; b) 20. **4.** a) $\frac{a+b}{a-b}$, jeśli $a \neq 0,\ b \neq 0,\ a \neq b,\ a \neq -b$; b) a, jeśli $a \neq b,\ a \neq -b,\ b \neq 0$.

5. $\frac{a^2+3}{a^2+4} = 1 - \frac{1}{a^2+4}$, więc $\frac{1}{a^2+4}$ jest liczbą wymierną. Stąd wynika, że a^2+4 jest liczbą wymierną, czyli również a^2+2. Ale, z założenia, $\frac{a+1}{a^2+2}$ jest liczbą wymierną. Wobec tego $a+1$ jest liczbą wymierną. Zatem także a jest liczbą wymierną.

6. Oczywiście musi być $a \neq 0$ i $b \neq 0$. Skoro $a + \frac{b^2}{a} = b + \frac{a^2}{b}$, to $\frac{a^2+b^2}{a} = \frac{a^2+b^2}{b}$, stąd $a = b$, bo $a^2+b^2 > 0$, gdy $a \neq 0$ i $b \neq 0$. **7.** $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$. **8.** Niech $w = a^2+b^2$, gdzie $a, b \in W$. Wówczas $\frac{1}{w} = \frac{w}{w^2} = \frac{a^2+b^2}{w^2} = \left(\frac{a}{w}\right)^2 + \left(\frac{b}{w}\right)^2$ i oczywiście $\frac{a}{w}, \frac{b}{w} \in W$.

4.

6. Jeśli $a+b+c \in W$ i $a+b \in IW$, to $c \in IW$ (gdyby $c \in W$, to suma liczby niewymiernej $a+b$ i wymiernej c nie mogłaby być liczbą wymierną – a jest!) I dalej: skoro $a+b \in IW$, to któraś z liczb a i b jest niewymierna (bo suma dwóch liczb wymiernych byłaby liczbą wymierną). Zatem co najmniej dwie spośród liczb a, b, c są niewymierne.

7. Wskazówka: Zauważ, że $29 \pm 12\sqrt{5} = (3 \pm 2\sqrt{5})^2$.

8. $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{(4+\sqrt{15})^2(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2(4-\sqrt{15})} =$
$= \sqrt{(4+\sqrt{15})^2(16-2\sqrt{10}\cdot\sqrt{6})(4-\sqrt{15})} = \sqrt{(4+\sqrt{15})^2 \cdot 4 \cdot (4-\sqrt{15})^2} =$
$= \sqrt{(2(4+\sqrt{15})(4-\sqrt{15}))^2} = 2\cdot(4^2-15) = 2\cdot 1 = 2.$

9. Wskazówka: Zauważ, że $4 \pm \sqrt{7} = \frac{8 \pm 2\sqrt{7}}{2} = \frac{(\sqrt{7}\pm 1)^2}{2}$.

10. Para $(0, 0)$ jest jedynym rozwiązaniem w liczbach wymiernych danego równania. Istotnie, gdy $x \neq 0$ i $y \neq 0$, to jest ono równoważne kolejno równaniom:
$x^2 - 2xy + y^2 = 2y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2 = 2y^2 \Leftrightarrow \left(\frac{x-y}{y}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \left|\frac{x-y}{y}\right| = \sqrt{2}$. Ostatnie równanie dla liczb wymiernych x i y oczywiście nie może zachodzić (dlaczego?).

5.

3. a) $2{,}96 + 3{,}97 + 4{,}98 + 5{,}99 = (3-0{,}04) + (4-0{,}03) + (5-0{,}02) + (6-0{,}01) =$
$= (3+4+5+6) - (0{,}04+0{,}03+0{,}02+0{,}01) = 18 - 0{,}1 = 17{,}9$;
b) $2{,}89 - 3\cdot 1{,}22 + 5{,}16 - 1{,}39 = (2{,}89-1{,}39) + (5{,}16-3{,}66) = 1{,}50 + 1{,}50 = 3$;
c) $23\cdot 19{,}99 - 29\cdot 19{,}99 + 16\cdot 19{,}99 = 19{,}99\cdot(23+16-29) = 19{,}99\cdot 10 = 199{,}9$.

4. z 16, bo $\frac{2}{7} = 0{,}(1176470588235294)$.

5. a) $\frac{3}{8}$; b) $1\frac{9}{25}$; c) $\frac{1}{3}$; d) $2\frac{47}{99}$; e) $\frac{116}{495}$; f) $1\frac{71}{333}$. **6.** 1, bo $\frac{12}{99} = 0{,}(12)$.

7. Ponieważ $\frac{22}{7} = 3{,}(142857)$, więc okres rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{22}{7}$ ma 6 cyfr. Dzielimy 2002 przez 6 i otrzymujemy resztę 2. Drugą cyfrą (od lewej strony) w okresie jest 4. Jest ona zarazem 2002. cyfrą rozwinięcia dziesiętnego liczby $\frac{22}{7}$.

6.

4. $[(a<b)\wedge(c<d)] \Rightarrow [(a+c<b+c)\wedge(b+c<b+d)] \Rightarrow (a+c<b+d)$.

5. Nieprawdą jest, że $(a<b \wedge c<d) \Rightarrow a-c<b-d$. Na przykład: $4<5$ i $1<4$, ale $4-1>5-4$.

6. $[(a<b)\wedge(c<d)] \Rightarrow [(ac<bc)\wedge(bc<bd)] \Rightarrow (ac<bd)$.

7. $a<b\wedge c<d \Rightarrow -a>-b\wedge -c>-d \Rightarrow$ (na mocy zad. 6.) $\Rightarrow (-a)(-c)>(-b)(-d)$, bo $-a,-b,-c,-d>0$. Zatem $ac>bd$.

8. Wskazówka: Skorzystaj z własności udowodnionych w zadaniach 6 i 7.

9. Najmniejszą jest b, zaś największą a. Wskazówka: Skorzystaj kilka razy z przechodniości relacji nierówności.

10. Wskazówka: Przyjmij, że $a\leqslant b\leqslant c\leqslant d$ (dlaczego tak można założyć?) i skorzystaj z drugiej nierówności.

7.

1. Wskazówka: Pomnóż obie strony dowodzonej nierówności przez $a\cdot b$, a następnie przekształcaj ją równoważnie.

2. Wskazówka: Zauważ, że $(a^2-b^2)^2-(a-b)^4=4ab(a-b)^2$.

3. Wskazówka: a) $\frac{a+b}{2}\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)=1+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

b) Pomnóż obie strony dowodzonej nierówności przez $a^2\cdot b^2$.

4. a) $2a^4+2b^4-ab(a+b)^2=2a^4+2b^4-a^3b-ab^3-2a^2b^2=$
$=(a^2-b^2)^2+(a^4-a^3b)-(ab^3-b^4)=(a^2-b^2)^2+a^3(a-b)-b^3(a-b)=$
$=(a^2-b^2)^2+(a-b)(a^3-b^3)=(a-b)^2(a+b)^2+(a-b)^2(a^2+ab+b^2)=$
$=(a-b)^2\left((a+b)^2+a^2+ab+b^2\right)\geqslant 0.$

b) $a^3(b+1)+b^3(a+1)-a^2(b+b^2)-b^2(a+a^2)=$
$=a^3b+a^3+ab^3+b^3-a^2b-a^2b^2-ab^2-a^2b^2=$
$=(a^3b-2a^2b^2+ab^3)+(a^3b-a^2b)-(ab^2-b^3)=$
$=ab(a^2-2ab+b^2)+a^2(a-b)-b^2(a-b)=$
$=ab(a-b)^2+(a-b)(a^2-b^2)=ab(a-b)^2+(a-b)^2(a+b)=$
$=(a-b)^2(ab+a+b)\geqslant 0.$

5. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)-6abc=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2-6abc=$
$=(a^2b-2abc+bc^2)+(b^2c-2abc+ca^2)+(c^2a-2abc+ab^2)=$
$=b(a^2-2ac+c^2)+c(b^2-2ab+a^2)+a(c^2-2bc+b^2)=$
$=b(a-c)^2+c(b-a)^2+a(c-b)^2\geqslant 0.$

6. Wskazówka: Skorzystaj z prawa dźwigni i z nierówności $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}>2$ dla $a>0, b>0, a\neq b$.

8.

4. W szpitalu tym było wtedy tylu lekarzy, ilu pacjentów.

5. $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2.$

6. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geqslant 3\cdot\sqrt[3]{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{c}\cdot\frac{c}{a}}=3.$

7. $ab(a+b)+bc(b+c)+ca(c+a)=a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2\geqslant$
$\geqslant 6\cdot\sqrt[6]{a^2b\cdot ab^2\cdot b^2c\cdot bc^2\cdot c^2a\cdot ca^2}=6\cdot\sqrt[6]{(abc)^6}=6abc.$

8. $(a+b)(b+c)(c+a)\geqslant 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8\sqrt{(abc)^2}=8abc$

9.

6. $A \cap B = \langle -5; 2\rangle$, $A' \cap B' = (-\infty; -7\rangle \cup (5; +\infty)$, $A \cup B = (-7; 5\rangle$,
$A' \cup B' = (-\infty; -5) \cup (2; +\infty)$, $A \setminus B = (2; 5\rangle$, $B \setminus A = (-7; -5)$,
$A' \setminus B = \langle -7; -5) \cup (5; +\infty)$, $A \setminus B' = \langle -5; 2\rangle$, $B' \setminus A = (-\infty; -7\rangle \cup (2; 5)$, $B' \setminus A' = (2; 5\rangle$.

7. a) $a \leqslant c < d \leqslant b$ lub $c \leqslant a < b \leqslant d$; b) $c < a < b < d$.

8. Tak, gdyż, jeśli $a < b$, to $2a < a + b$, więc $a < \frac{a+b}{2}$, oraz jeśli $a < b$, to $a + b < 2b$, czyli $\frac{a+b}{2} < b$. Zatem, rzeczywiście, jeśli $a < b$, to $a < \frac{a+b}{2} < b$, co dowodzi, że $\frac{a+b}{2} \in (a, b)$.

9. Tak. Wskazówka: Skorzystaj z zadania 8.

10.

4. a) $x \in \langle 1, +\infty)$; b) $x \in (-\infty, 2\rangle$; c) $x \in (-\infty, 3\rangle$; d) $x \in (-\infty, 0\rangle$.

5. a) $3 - x$; b) 2; c) $-2x - 1$. **6.** a) $|x| \leqslant 2$; b) $|x| \leqslant 3$; c) $|x| < 1$ lub $|x| > 1$; d) $|x| > 5$.

7. a) 1, gdy $x > 2$, zaś -1, gdy $x < 2$; b) $|x + 1|$; c) 0, gdy $x < 0$, zaś 1, gdy $x > 0$.

8. a) $x \geqslant 0$; b) $x = -1$ lub $x = 7$; c) $x \leqslant 0$; d) $x = -\frac{1}{3}$ lub $x = 1$.

9. $$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = \frac{x^2 + 2x|x| + |x|^2}{4} + \frac{x^2 - 2x|x| + |x|^2}{4} = \frac{2\left(x^2 + |x|^2\right)}{4} = \frac{4x^2}{4} = x^2.$$

10. $a^2 + b^2 = 6ab$, więc $a^2 + 2ab + b^2 = 8ab$ i $a^2 - 2ab + b^2 = 4ab$, czyli $(a+b)^2 = 8ab$ i $(a-b)^2 = 4ab$.
Stąd $\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{(a-b)^2} = \frac{8ab}{4ab} = 2$, czyli $\frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2}$, bo $\frac{a+b}{a-b} > 0$, gdy $a > b > 0$.

11. a) $\max\{x, -x\} = \begin{cases} x, & x \geqslant -x \\ -x, & x < -x \end{cases} = \begin{cases} x, & 2x \geqslant 0 \\ -x, & 2x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x, & x \geqslant 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases} = |x|$;

b) i c) Ponieważ $\max\{x, y\} + \min\{x, y\} = x + y$ oraz $\max\{x, y\} - \min\{x, y\} = |x - y|$, więc $2\max\{x, y\} = x + y + |x - y|$ i $2\min\{x, y\} = x + y - |x - y|$.
Stąd $\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2}$ i $\min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}$.

12. Ponieważ $2\max\{x, y\} = |x - y| + x + y$ (zob. zad. 11b), więc
$$4\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right\} = \left|2\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} - \frac{2}{c}\right| + 2\max\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\} + \frac{2}{c} =$$
$$= \left|\left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2}{c}\right| + \left|\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right| + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{2}{c} = \left|\frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} - \frac{2}{c}\right| + \frac{|b-a|}{|ab|} + \frac{b+a}{ab} + \frac{2}{c}.$$

11.

1. a) $x \in \{-1, 5\}$; b) $x \in \{-5, 1\}$; c) $x \in \{-1, 9\}$; d) $x \in \{0, 2, 10, 12\}$; e) $x \in \left\{-1, \frac{7}{3}\right\}$; f) $x \in \{-4, 5\}$; g) $x \in \{-1, 2\}$; h) brak rozwiązań.

2. $x = -5$. **3.** $x = 2$, $y = 0$; $x = 2$, $y = 1$; $x = 2$, $y = 2$; $x = 2$, $y = 3$.

4. a) $x = 7$, $y = -10$; b) $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{11}{2}$ lub $x = \frac{3}{2}$, $y = \frac{11}{2}$.

5. a) $x \in (4, 6)$; b) $x \in (-\infty, -1\rangle \cup \langle 4, +\infty)$; c) $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{3}\right) \cup (3, +\infty)$; d) x – dowolna liczba rzeczywista; e) $x \in \left(\frac{4}{3}, 8\right)$; f) $x \in (-\infty, 2)$; g) $x \in \langle -2, 4\rangle$; h) $x \in R \setminus \{0, 1, 2\}$.

12.

3. a) 54; b) 98; c) 111. **4.** a) 8,567; b) 0,888; c) 0,0303. **5.** 10,909.

Rozdział V.

3.

3. a) R; b) $R\setminus\{-1;2\}$; c) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right\rangle$; d) $(-2;+\infty)$; e) R; f) $\langle-5;1\rangle$; g) $R\setminus\{-1;1\}$; h) $(-3;2)$.

4. a) $\langle-6;0)$; b) $\{-1;1\}$; c) $\langle1;5\rangle$; d) $\{0\}$; e) $\langle1;+\infty)$; f) $\langle2;4\rangle$; g) $\left(0;\frac{1}{3}\right)\cup\{2\}$.

4.

6. a) 2; b) $\frac{26}{3}$; c) $a^2+\frac{1}{a}$; d) $a+\frac{1}{a^2}$; e) $a^2+\frac{1}{a^4}$; f) $a+\frac{1}{\sqrt{a}}$.

7. a) nie; b) tak; c) nie; d) nie.

8. $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+1}=x-1$, gdy $x\neq1$, $g(x)=\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, gdy $x\geqslant0$. Zatem:
a) $f(x)+g(x)=2x-1$, gdy $x\geqslant0$; b) $f(x)-g(x)=-1$, gdy $x\geqslant0$;
c) $f(x)\cdot g(x)=x^2-x$, gdy $x\geqslant0$; d) $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{x-1}{x}$, gdy $x>0$.

9. a) $\frac{2}{3}$; b) -2, 2; c) 0, 3; d) -1, $\frac{1}{2}$; e) 1; f) brak.

10. a) 1; b) 0,5; c) 1; d) każda liczba całkowita.

11. $f(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=\dfrac{x^2}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+x^2}=\dfrac{x^2+1}{x^2+1}=1.$

12. Nie istnieją; w przeciwnym wypadku po podstawieniu do podanej równości $x=0$ oraz $x=1$ otrzymalibyśmy równości $f(0)+g(0)=0$, $f(0)+g(1)=1$, $f(1)+g(0)=1$, $f(1)+g(1)=3$, z których wynika, że $3=0+3=f(0)+g(0)+f(1)+g(1)=$ $=f(0)+g(1)+f(1)+g(0)=1+1=2$, czyli że $3=2$.

13. Podstawiając do podanego równania $x=0$ oraz $x=1$, otrzymujemy równości: $f(0)+f(1)=0$ i $f(1)+f(0)=g(1)$, z których wynika, że $g(1)=0$. Wystarczy zatem przyjąć $c=1$.

14. $x\in\{-4,-2,-p-3,p-3\}$. Wskazówka: Zauważ, że $f(x)=\dfrac{3x+9-p}{x+3}=3-\dfrac{p}{x+3}$.

15. $g\left(\dfrac{1}{x^2}\right)-f\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$, gdy $x\neq0$. **16.** $f(x)+g(x)=\begin{cases}2x, & \text{gdy } x<0\\ 0, & \text{gdy } 0\leqslant x<1\\ -2x, & \text{gdy } x\geqslant1.\end{cases}$

17. $f(x)\cdot g(x)=x$, gdy $x\in R$.

5.

1. a) $\min\{f(x);x\in\langle-1;3\rangle\}=f(3)=-1$, $\max\{f(x);x\in\langle-1;3\rangle\}=f(-1)=3$;
b) $\min\{f(x);x\in\langle-2;-1\rangle\}=f(-1)=-1$, $\max\{f(x);x\in\langle-2;-1\rangle\}=f(-2)=-\frac{1}{2}$;
c) $\min\{f(x);x\in\langle-2;1\rangle\}=f(-2)=0$, $\max\{f(x);x\in\langle-2;1\rangle\}=f(0)=4$;
d) $\min\{f(x);x\in R\}=f(1)=0$, $\max\{f(x);x\in R\}=f(-1)=2$;
Wskazówka: $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{1+x^2}=1-\dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. Dla $x = 0$ i $\max\{f(x); x \in R\} = f(0) = 1$.

3. Dla $x = -1$ i $\max\{f(x); x \in R\} = f(-1) = 7$. Wskazówka: Zobacz przykład 5.

4. Kwadrat o boku 1. Wskazówka: Przyjmij, że prostokąt ma boki $1 + a$ i $1 - a$, gdzie $a \in (0; 1)$.

5. Kwadrat o boku 1. Wskazówka: Przyjmij, że prostokąt ma boki a i $\frac{1}{a}$, gdzie $a > 0$.

6.

8. Wskazówka: Oblicz $f(x + 2a)$ i $f(x + 4a)$.

9. $f(x + 2a) = f\left((x + a) + a\right) = g(x + a) = -f(x)$, skąd $f(x + 2a) = -f(x)$.
I wobec tego $f(x + 4a) = f\left((x + 2a) + 2a\right) = -f(x + 2a) = f(x)$, czyli $f(x + 4a) = f(x)$, co dowodzi okresowości funkcji f. Dalej: $g(x + 2a) = g\left((x + a) + a\right) = -f(x + a) = -g(x)$, skąd $g(x + 2a) = -g(x)$. Zatem $g(x + 4a) = g\left((x + 2a) + 2a\right) = -g(x + 2a) = g(x)$, czyli $g(x + 4a) = g(x)$, co dowodzi okresowości funkcji g.

11. Wykaż najpierw, że dziedziną funkcji f jest zbiór R, a następnie udowodnij, że $f(-x) = -f(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

12. Podstawiając do podanego równania $x = y = 0$, otrzymamy równość $f(0) = 2f(0)$, skąd $f(0) = 0$. Gdy zaś w podanym równaniu podstawimy $y = -x$, to otrzymamy równość $f(0) = f(x) + f(-x)$, a więc równość $f(-x) = -f(x)$, która dowodzi nieparzystości funkcji f.

13. Porównaj zadanie 5. na stronie 65 (rozdział III, podrozdział 6).

14. Z równości $f(-1) = f(1)$ i $f(-2) = f(2)$ otrzymujemy $b = d = 0$. Wobec tego $f(x) = ax^4 + cx^2 + e$ i rzeczywiście $f(-x) = f(x)$ dla każdej liczby rzeczywistej x.

15. Z treści zadania wiemy, że na Ziemi żyje ponad 4 000 000 000 ludzi, w tym co najwyżej 40 000 000 ma ponad 100 lat. Zatem ludzi, którzy mają nie więcej niż 100 lat, żyje na świecie 36 844 240. Obliczmy teraz ile sekund mieści się w 100 latach.
Mamy: $100 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 3\,155\,760\,000$ sekund (dlaczego?).
Ponieważ $40\,000\,000 > 36\,844\,240$, więc numerując szufladki liczbami od 1 do 36 844 240 i umieszczając w nich ludzi, otrzymujemy na mocy zasady szufladkowej Dirichleta tezę zadania.

16. Uczniów w klasie jest 40, a miesięcy w roku 12. Ponieważ $40 > 3 \cdot 12$, więc z zasady Dirichleta wynika, że co najmniej 4 uczniów z tej klasy urodziło się w tym samym miesiącu.

7.

3. a) $\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{2 + \sqrt{2}}{4}$; d) $2\left(2 + \sqrt{2}\right)$; e) $\frac{1}{2}$; f) $\frac{5}{4}$.

4. a) $f(g(x)) = -2x^2 + 1$, $g(f(x)) = (-2x + 1)^2$, $f(f(x)) = 4x - 1$, $g(g(x)) = x^4$;

b) $f(g(x)) = -2x + 7$, $g(f(x)) = -2(x + 2)$, $f(f(x)) = x$, $g(g(x)) = 2(2x - 9)$;

c) $f(g(x)) = 1 - x$, $g(f(x)) = \frac{x}{x - 1}$, $f(f(x)) = x$, $g(g(x)) = \frac{x - 1}{x}$.

5. a) $f(f(x)) = |x|$, $g(g(x)) = 4x + 3$, $f(g(x)) = |2x + 1|$, $g(f(x)) = 2|x| + 1$;

b) $f(f(x)) = \begin{cases} (x^2 + 1)^2 + 1; & x \geqslant 0 \\ x^2 + 1; & x < 0, \end{cases}$ $\quad g(g(x)) = \begin{cases} 4x + 3; & x > 1 \\ -2x - 1; & -\frac{1}{2} < x \leqslant 1 \\ x; & x \leqslant -\frac{1}{2}; \end{cases}$

$$f(g(x))=\begin{cases}(2x+1)^2+1; & x>1\\ (x+1)^2+1; & -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1\\ -x-1; & x<-\frac{1}{2},\end{cases}\qquad g(f(x))=\begin{cases}2x^2+3; & x>0\\ 2x+1; & x<0\\ 0; & x=0;\end{cases}$$

c) $$f(f(x))=\begin{cases}(x^2-1)^2-1; & x\in(-1,0)\cup(0,1)\\ -1; & x=0\\ x; & x\in(-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,+\infty),\end{cases}\qquad g(g(x))=\begin{cases}4x-3; & x\geqslant\frac{1}{2}\\ -4x+1; & x<0\\ -4x+3; & 0\leqslant x<\frac{1}{2};\end{cases}$$

$$f(g(x))=\begin{cases}(2x-1)^2-1; & 0<x<1\\ 2x-1; & x=0 \text{ lub } x\geqslant 1\\ 1-2x; & x<0,\end{cases}\qquad g(f(x))=\begin{cases}2x-1; & x\geqslant 1\\ -2x^2+3; & -1<x<1\\ 1-2x; & x\leqslant -1.\end{cases}$$

6. $2f\left(\sqrt{2}\right)-3\cdot f\left(f\left(\sqrt{2}\right)\right)=2\cdot 1-3\cdot f(1)=2-3\cdot 0=2.$

7. Dla $x\neq 0$ i $x\neq 1$ obliczamy $f(f(x))=\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-(f(x))^3}}=\sqrt[3]{1-\dfrac{1}{x^3}}$,

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{\sqrt[3]{1-(f(f(x)))^3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{1-\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^3}}}=\frac{1}{\frac{1}{x}}=x.$$

8. $\underbrace{(f\circ f\circ\ldots\circ f)}_{n}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}$. Wskazówka: Wyznacz $f(f(x))$ i $f(f(f(x)))$, a następnie zastosuj indukcję matematyczną.

9. Dla dowolnych liczb rzeczywistych x_1, x_2 zachodzą implikacje:
$f(f(x_1))=f(f(x_2))\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow -x_1=-x_2\Rightarrow x_1=x_2$.

10. Z podanej w zadaniu równości 1) $x+f(x)=f(f(x))$ otrzymujemy równości: 2) $f(0)=f(f(0))$, gdy zamiast x podstawimy 0; 3) $f(x)+f(f(x))=f(f(f(x)))$, gdy zamiast x podstawimy $f(x)$. Z równości 2) i 3) otrzymujemy odpowiednio równości: 4) $f(f(0))=f(f(f(0)))$ i 5) $f(0)+f(f(0))=f(f(f(0)))$. Z równości 2), 4), 5) znajdujemy $f(f(0))=f(0)=0$.

11. Oznaczmy $f(0)=x$, $f(x)=y$. Wówczas $f(y)=0$. Z podanej własności funkcji f wynika, że $|x-0|\geqslant|f(x)-f(0)|=|y-x|\geqslant|f(y)-f(x)|=|0-y|\geqslant|f(0)-f(y)|=|x-0|$. Stąd $x=y=0$ i ostatecznie $f(0)=0$.

12. Ponieważ $f(x)>x$ dla każdej liczby rzeczywistej x, oraz funkcja g jest rosnąca w zbiorze R (wykaż to!), stąd dla każdej liczby rzeczywistej x zachodzą nierówności $f(g(x))>g(x)>g(f(x))$.

8.

3. a) tak; b) tak; c) tak. **4.** a) $f^{-1}(x)=3x-6$; b) $f^{-1}(x)=\dfrac{x}{x-1}$; c) $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$.

5. Tak. Niech $f: X\to Y$ będzie funkcją odwracalną i monotoniczną (np. rosnącą) w zbiorze X. Wykażemy, że funkcja $f^{-1}: Y\to X$ jest także monotoniczna (rosnąca) w zbiorze X. Istotnie, dla dowolnych y_1, y_2 ze zbioru Y, jeśli $y_1<y_2$, to $f^{-1}(y_1)<f^{-1}(y_2)$ (gdyby bowiem

dla pewnych y_1, y_2 ze zbioru Y takich że $y_1 < y_2$ było $f^{-1}(y_1) \geqslant f^{-1}(y_2)$, wtedy także $f(f^{-1}(y_1)) \geqslant f(f^{-1}(y_2))$, czyli $y_1 \geqslant y_2$).

6. Mamy (por. przykład 8): $(h \circ g \circ f)^{-1} = (h \circ (g \circ f))^{-1} = (g \circ f)^{-1} \circ h^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1} \circ h^{-1}$.

7. $f(x) = x^2$. Wskazówka: Wykaż, ze $g: R_+ \to \langle 0, 1)$ jest odwracalna, znajdź g^{-1}, a następnie $f = g^{-1} \circ h$. **8.** $f(x) = \dfrac{x^2}{1+2x}$. Wskazówka: Porównaj rozwiązanie z zadania 7.

Rozdział VI.

1.

4. a) $a = 1$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$; b) $a = 14$, $b = 14\sqrt{3}$, $\beta = 60^\circ$; c) $b = 6\sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$; d) $a = 62{,}5$, $c = 67$, $\beta = 21^\circ$; e) $b = 15{,}9$, $c = 23{,}2$, $\alpha = 47^\circ$.

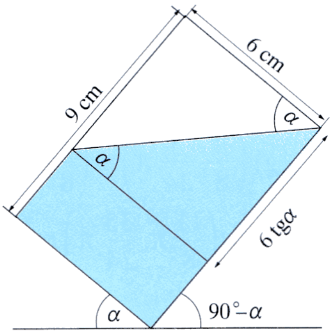
5. $AB = 6\sqrt{13}$. **7.** a) 1; b) 1; c) 2; d) 1.

8. a) $\sin\alpha$; b) $\sin^2\alpha$; c) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; d) 2; e) $\operatorname{tg}\alpha$; f) $\operatorname{tg}\alpha$; g) $\cos\alpha$.

9. a) $\cos\alpha = \dfrac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{15}{8}$; b) $\sin\alpha = \dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{12}{5}$;
c) $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$; d) $\cos\alpha = \dfrac{|n-1|}{n+1}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\sqrt{n}}{|n-1|}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{|n-1|}{2\sqrt{n}}$.

10. 1. **11.** Około 8,19 m. **12.** Około 1720 m. **13.** Około 2,8 km i 4,9 km.

14. Objętość V tej szklanki wynosi $\pi \cdot 3^2 \cdot 9 = 81\pi$. Objętość V_1 wylanej wody równa jest połowie objętości walca (ryc. 1) o promieniu podstawy 3 i wysokości równej $6\operatorname{tg}\alpha$.
Zatem $V_1 = \dfrac{1}{2} \cdot \pi \cdot 3^2 \cdot 6\operatorname{tg}\alpha = 27\pi\operatorname{tg}\alpha$. Ponieważ $V_1 = \dfrac{1}{3}V$, więc $27\pi\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{3} \cdot 81\pi$, skąd $\operatorname{tg}\alpha = 1$ i ostatecznie $\alpha = 45^\circ$.



Ryc. 1.

2.

3. a) 870°; b) 630°; c) 725°. **4.** a) 12^{45}; b) 7^{45}; c) 13^{45}; d) 6^{45}; e) 14^{35}; f) 5^{45}. **5.** a) 23 razy; b) 44 razy.

4.

5. $\dfrac{6}{10}\pi$ i $\dfrac{3}{10}\pi$. **6.** a) $\dfrac{3}{5}\pi$; b) $\dfrac{2}{3}\pi$; c) $\dfrac{n-2}{n}\pi$.

5.

1. a) 4 i $\dfrac{\pi}{4}$; b) -2 i $\dfrac{3}{5}\pi$; c) -14 i $\dfrac{\pi}{3}$; d) 4 i $\dfrac{3}{11}\pi$. **5.** a) $(a-b)^2$; b) $(a+b)^2$; c) $(a-b)^3$.

6.

8. Wskazówka: $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, więc $\dfrac{\gamma}{2} = 90^\circ - (\alpha + \beta)$.

9. $\sin y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg} y = \pm\sqrt{3}$, $\operatorname{tg} x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

10. -1. Wystarczy zauważyć, że dla każdej liczby całkowitej k jest
$$\cos\left((2k-1)\pi\left(\cos 2k\pi\left(\cos(2k+1)\pi\right)\right)\right) =$$
$$= \cos\left((2k-1)\pi\left(\cos\left(2k\pi(-1)\right)\right)\right) = \cos\left((2k-1)\pi(\cos 2k\pi)\right) =$$
$$= \cos\left((2k-1)\pi \cdot 1\right) = \cos(2k-1)\pi = -1.$$

7.

1. a) 0; b) 0; c) 0. **2.** a) -1; b) $-\dfrac{3}{4}$; c) $\dfrac{3}{10}$. **3.** a) 1; b) $a+b$; c) $a+b$.

4. a) $-\frac{3}{2}$; b) $-\frac{1}{4}$; c) 0; d) 0; e) $-\sqrt{3}$. **5.** a) 1; b) 1; c) $\sqrt{3}$; d) nie istnieje; e) -1

6. a) nie istnieje; b) $\frac{3+\sqrt{3}}{4}$; c) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; d) 0; e) nie istnieje.

8.

1. a) -1; b) $\frac{2}{\sin x}$; c) $|\sin x+\cos x|$. **2.** a) $-\frac{1}{2}$; b) 1; c) 2.

3. a) $\sin\alpha=-\frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{5}{12}$; b) $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$, $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{24}{7}$.

10.

4. a) π; b) 4π; c) 2π; d) π; e) 2π; f) $\frac{2}{3}\pi$; g) π; h) π; i) 2π.

11.

1. a) $x=(2k+1)\cdot\frac{\pi}{6}$, $k\in C$; b) $x=(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+n\cdot\frac{\pi}{4}$, $n\in C$;

c) $x=\left((-1)^n+1\right)\cdot\frac{\pi}{4}+n\cdot\pi$, $n\in C$; d) $x=(2k+1)\pi$, $k\in C$;

e) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$ lub $x=-\frac{7}{12}\pi+k\pi$, $k\in C$; f) $x=-\frac{\pi}{9}+k\cdot\frac{\pi}{3}$, $k\in C$;

g) $x=(2k+1)\pi$, $k\in C$; h) $x=2k+\frac{2}{3}$, $k\in C$; i) $x=6k\pi$, $k\in C$.

2. a) $\left\langle 0,\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{5}{3}\pi,2\pi\right\rangle$; b) $\left\langle\frac{\pi}{3},\pi\right)\cup\left\langle\frac{4}{3}\pi,2\pi\right)$; c) $\left\langle\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left\langle\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right\rangle$;

d) $\left\langle 0,\frac{7}{6}\pi\right)\cup\left(\frac{11}{6}\pi,2\pi\right\rangle$; e) $\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left\langle\frac{3}{4}\pi,2\pi\right\rangle$; f) $\left\langle 0,\frac{\pi}{4}\right)\cup\left\langle\pi,2\pi\right\rangle$;

g) $\left(\frac{\pi}{8},\frac{5}{24}\pi\right)\cup\left(\frac{3}{8}\pi,\frac{11}{24}\pi\right)\cup\left(\frac{5}{8}\pi,\frac{17}{24}\pi\right)\cup\left(\frac{7}{8}\pi,\frac{23}{24}\pi\right)\cup\left(\frac{9}{8}\pi,\frac{29}{24}\pi\right)\cup$

$\cup\left(\frac{11}{8}\pi,\frac{35}{24}\pi\right)\cup\left(\frac{13}{8}\pi,\frac{41}{24}\pi\right)\cup\left(\frac{15}{8}\pi,\frac{47}{24}\pi\right)$; h) $\left\langle\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi\right)\cup\left\langle\frac{5}{4}\pi,\frac{7}{4}\pi\right\rangle$.

Rozdział VII.

1.

8. $a=0$. **9.** Nie można; prosta taka nie jest wykresem żadnej funkcji (dlaczego?).

10. a) $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-\sqrt{3}$; b) $y=-\sqrt{3}\,x+2$. **11.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 4.

12. -4 i 11 to odpowiednio najmniejsza i największa spośród szukanych wartości b.

13. a) $a_1=a_2$; b) $a_1\cdot a_2=-1$; c) $a_1\neq a_2$ i $b_1=b_2$; d) $a_1\neq 0$, $a_2\neq 0$, $a_1b_2=a_2b_1$.

14. $a\cdot b\cdot c\cdot d<0$, gdyż $a>0$, $b<0$, $c<0$ i $d<0$.

15. Aby wykresy funkcji $y=ax+b$, $y=bx+c$ i $y=cx+d$ miały punkt wspólny, rozwiązanie układu równań $(*)\begin{cases}y=ax+b\\ y=bx+c\end{cases}$ musi być rozwiązaniem równania $y=cx+a$. Układ $(*)$ jest równoważny układowi $\begin{cases}y=ax+b\\ (a-b)x=c-b\end{cases}$. Jeśli $a=b$, to $c=b$, więc mamy $a=b=c$. Gdyby zaś $a\neq b$, wtedy z równania $(a-b)x=c-b$ otrzymujemy $x=\frac{c-b}{a-b}$, co po podstawieniu do równania $y=ax+b$ daje $y=\frac{ac-b^2}{a-b}$. Podstawiając parę $\left(\frac{c-b}{a-b},\frac{ac-b^2}{a-b}\right)$ do równania $y=cx+a$, dostajemy równość $\frac{ac-b^2}{a-b}=\frac{c^2-bc}{a-b}+a$, która

jest równoważna kolejno równościom:
$ac-b^2=c^2-bc+a^2-ab, a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0,\ (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0.$
Ale ostatnia równość, wobec $a \neq b$, jest niemożliwa. Zatem musi być $a=b=c$.

16. $y=3x+1$. Załóżmy, że szukany wzór funkcji liniowej jest postaci $y=ax+b$. Wtedy z równości $f(3x)=3f(x)-2$ otrzymujemy $b=1$, a z równości $f(x+3)=f(x)+9$ dostajemy $a=3$.

17. Mamy nierówności $f(2001)>2001$ i $f(2003)>2003$ dla $f(x)=ax+b$, czyli nierówności $2001a+b>2001$ i $2003a+b>2003$, które dodane do siebie stronami prowadzą do nierówności $4004a+2b>4004$. Po podzieleniu obu jej stron przez 2 otrzymujemy nierówność $2002a+b>2002$, czyli nierówność $f(2002)>2002$.

2.

3. a) 3; b) 4; c) $-\frac{2}{3}$; d) 1; e) 1. **4.** a) $(2;+\infty)$; b) $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right)$; c) nierówność tożsamościowa; d) $\left\langle\frac{27}{23};+\infty\right)$; e) $\langle 1;+\infty)$; f) $(-\infty;1\rangle$. **5.** a) $\left(-\frac{1}{2};3\right)$; b) brak rozwiązań; c) $\left(\frac{12}{13};\frac{22}{7}\right)$; d) $\left(\frac{1}{2};20\right)$. **6.** a) $(-1;+\infty)$; b) $\left(-\infty;\frac{3}{2}\right)$; c) brak rozwiązań. **7.** a) $m=6$; b) dla żadnego n; c) $m=3$; d) $m=15$. **8.** a) równanie sprzeczne; b) równanie tożsamościowe.

9. a) równanie ma jedno rozwiązanie $x=a-1$ dla $a\neq 1$, jest tożsamościowe dla $a=1$; b) równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{a^2+a-2}{a-2}$ dla $a\neq 2$, jest sprzeczne dla $a=2$; c) równanie ma jedno rozwiązanie dla $a\neq 0$ i $a\neq 1$, jest tożsamościowe dla $a=1$, jest sprzeczne dla $a=0$; d) równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{1-2a}{a}$ dla $a\neq 0$, jest sprzeczne dla $a=0$; e) równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{1}{a+2}$ dla $a\neq -2$ i $a\neq 3$, jest tożsamościowe dla $a=3$, jest sprzeczne dla $a=-2$; f) równanie ma jedno rozwiązanie $x=\frac{2(a^2-1)}{1-|a|}$, gdy $|a|\neq 1$, jest tożsamościowe gdy $|a|=1$.

10. $a=-\frac{5}{4}$, $b=\frac{3}{4}$. **11.** $m<-\frac{15}{8}$. **12.** $-\frac{1}{3}\leqslant m<\frac{14}{3}$. **13.** $a=-\frac{1}{2}$.

3.

1. 15 pszczół. **2.** 84 lata. **3.** Janek ma 10 lat, a jego ojciec 40. **4.** 18 pań i 24 panów.

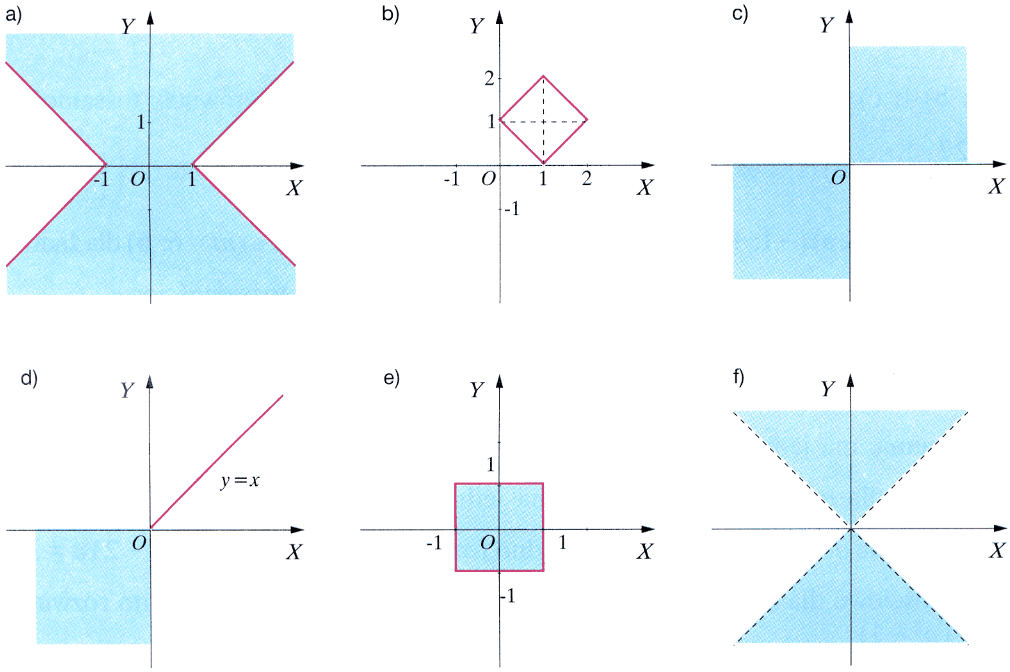
5. 7 groszy. **6.** a) mniejsza niż 54 km/h; b) większa niż 54 km/h. **7.** Od 6%. **8.** a) 79; b) 97.

9. Warunki zadania spełniają dwie liczby: 83 i 92. Niech x oznacza cyfrę jedności szukanej liczby. Wobec tego $11-x$ jest cyfrą dziesiątek tej liczby i oczywiście $x\in\langle 2;9\rangle\cap N$. Zatem $10(11-x)+x$ oznacza szukaną liczbę, zaś $10x+(11-x)$ – liczbę o przestawionych cyfrach. Z treści zadania wynika więc nierówność $10x+(11-x)<\frac{1}{2}(10(11-x)+x)$, której rozwiązaniem jest $x<3\frac{7}{27}$. Uwzględniając to, że $x\in\langle 2;9\rangle\cap N$, otrzymujemy $x=3$ lub $x=2$.

10. Większą niż 3 cm.

11. Z przystani K wypłynęło 6 kajaków, a z przystani L wypłynęło ich 11. Niech x oznacza liczbę kajaków, które wypłynęły z przystani K, a y – liczbę kajaków, które wypłynęły z przystani L. Z treści zadania wynika układ nierówności $\begin{cases} y < 2x \\ y - 2 > x + 2 \\ x + y < 18, \end{cases}$ którego rozwiązaniem w liczbach naturalnych jest jedynie para: $x = 6$, $y = 11$.

4.
7.



Ryc. 2.

8. Współrzędne punktu $P = (x, y)$ muszą spełniać następujące warunki:
$x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ y \leqslant -\frac{1}{3}x + \frac{5}{3},\ y \leqslant -\frac{3}{2}x + 4.$

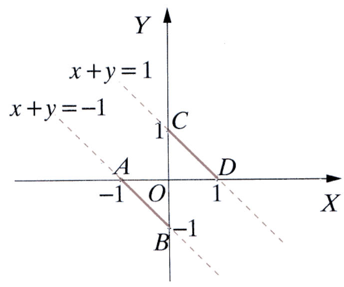
5.
7. a) $(13, 5)$; b) $(18, 33)$; c) $\left(\frac{23}{5}, \frac{2}{5}\right)$; d) $(3, 4)$; e) $(-6, 6)$; f) $(2, -1)$; g) $(-2, 3)$; h) $(0, 0)$.
8. a) $(5, -3)$; b) $(3, -5)$; c) $(-2, -3)$; d) $(8, -8)$. **9.** a) $(0, 0)$; b) $(10, 6)$; c) układ sprzeczny.
11. a) Dla $m = -2$ układ ten jest nieoznaczony, dla $m \neq -2$ układ ten jest sprzeczny.
b) Dla $m \neq 4$ układ jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest para $(0, 2)$, dla $m = 4$ układ ten jest nieoznaczony.
c) Dla $|m| \neq 1$ układ ten jest oznaczony i jego rozwiązaniem jest para $\left(-\frac{m^2 + m + 1}{m + 1}, -\frac{m}{m + 1}\right)$, dla $m = 1$ układ ten jest nieoznaczony, dla $m = -1$ układ ten jest sprzeczny.

12. $k \in \left(\frac{17}{7}, \frac{20}{7}\right)$. Wskazówka: Punkt $P(x, y)$ leży wewnątrz kwadratu $ABCD$, jeśli $0 < x < 3$ i $0 < y < 3$.

13. $a = b = 1$. **14.** $m = 2,\ n = -1$.

15. a) $(3, 2)$, $(-5, 2)$; b) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$;

c) Rozwiązaniami układu są pary współrzędnych wszystkich punktów należących do odcinków AB i CD (ryc. 3).



Ryc. 3.

6.

1. Samochodów większych było 4, a mniejszych 5.

2. 3,5 km/h. **3.** 600 i 400. **4.** 60 g złota i 30 g srebra. **5.** Córka – 5 lat, ojciec – 28 lat, babcia – 52 lata. **6.** 26. **7.** 10 g i 8 g. **8.** 12 dni. **9.** 5,632 kg złota i 1,833 kg srebra.

10. Oślica 5 miar, muł – 7 miar. **11.** 1642 – 1727. **12.** 12 królików i 23 bażanty.

7.

5. $m \geqslant 4$. **6.** $y \geqslant -\frac{7}{2}x + 7,\ y \geqslant \frac{3}{2}x - 3,\ y \leqslant -x + 7$.

Rozdział VIII.

1.

6. a) może; b) nie może.

7. a) istnieje, bowiem $AB + BC = AC \Leftrightarrow a = 7$;

b) istnieje, bo $AB + BC = AC$ dla każdego $a \in R$;

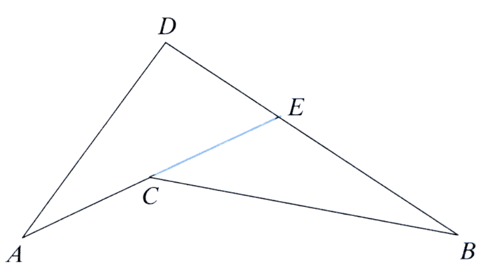
c) nie istnieje, gdyż $AB + BC \neq AC$ dla każdego $a \in R$;

d) istnieje, gdyż $AB + BC = AC \Leftrightarrow a = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4}$.

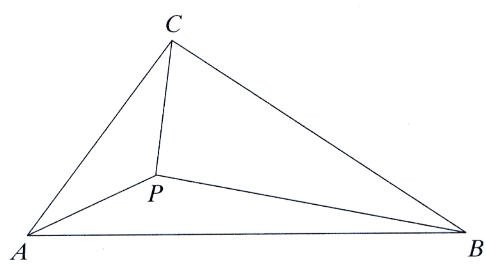
8. a) tak; b) nie; c) tak; d) nie musi; e) nie.

9. Przedłużmy odcinek AC do przecięcia się z bokiem DB w pewnym punkcie E (ryc. 4). Wówczas zachodzą nierówności: $AD + DE > AE$ i $CE + EB > CB$, czyli nierówności $AD + DB - EB > AE$ i $AE - AC + EB > CB$, skąd $AD + DB > AE + EB$ i $AE + EB > AC + CB$, i ostatecznie $AD + DB > AC + CB$.

10. Zachodzą nierówności (ryc. 5): $AC + CB > AP + PB$, $CB + AB > PC + PA$, $AB + AC > PB + PC$, na mocy poprzedniego zadania. Po dodaniu ich stronami otrzymujemy nierówność $2(AB + BC + CA) > 2(PA + PB + PC)$, skąd wynika nierówność zadania.



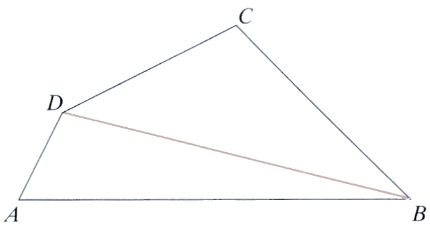
Ryc. 4.

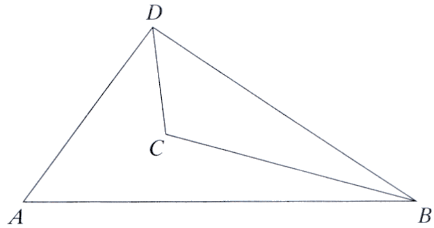


Ryc. 5.

11. Ponieważ $AE = CG$, $EF = GD$ i $FB = DH$, więc długości tych łamanych są równe.

12. Niech $ABCD$ będzie dowolnym czworokątem, zaś BD jedną z jego przekątnych (ryc.6). Wówczas oczywiście $BD < AB + AD$ oraz $BD < BC + CD$. Stąd $2BD < AB + BC + CD + DA$ i ostatecznie $BD < \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA)$.





Ryc. 6.

13. Zobacz zadanie 12.

15. Odległości punktu A od środków sąsiednich boków są równe i wynoszą $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a odległość tego punktu od środka boku przeciwległego jest równa 1.

17. Przyjmijmy, że: $A = (-a, -a)$, $B = (a, -a)$, $C = (a, a)$, $D = (-a, a)$, gdzie $a > 0$. Wówczas jego środek O jest początkiem układu współrzędnych XOY, czyli: $O = (0, 0)$. Wobec tego dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ mamy:

$PA^2 = (x+a)^2 + (y+a)^2$, $PB^2 = (x-a)^2 + (y+a)^2$, $PC^2 = (x-a)^2 + (y-a)^2$,

$PD^2 = (x+a)^2 + (y-a)^2$, $PO^2 = x^2 + y^2$. Zatem $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 - 4PO^2 = 8a^2$.

18. Przyjmijmy, że: $A = (a, b)$, $B = (-a, b)$, $C = (-a, -b)$, $D = (a, -b)$, gdzie $a > 0$, $b > 0$. Wówczas dla dowolnego punktu $P = (x, y)$ mamy:

$$PA^2 + PC^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2 + (x+a)^2 + (y+a)^2 =$$

$$= (x+a)^2 + (y-b)^2 + (x-a)^2 + (y+b)^2 = PB^2 + PD^2.$$

19. Wystarczy dowieść, że $AP = 2PB$ i $AP + PB = AB$. Istotnie,

$$AP = \sqrt{\left(x_1 - \frac{x_1 + 2x_2}{3}\right)^2 + \left(y_1 - \frac{y_1 + 2y_2}{3}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{2(x_1 - x_2)}{3}\right)^2 + \left(\frac{2(y_1 - y_2)}{3}\right)^2} =$$

$$= 2\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{3}\right)^2} = 2\sqrt{\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + 2y_2}{3} - y_2\right)^2} = 2PB \text{ oraz}$$

$$AP = 2\sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{3}\right)^2} = \frac{2}{3}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{2}{3}AB \text{ i}$$

$$PB = \sqrt{\left(\frac{x_1 + 2x_2}{3} - x_2\right)^2 + \left(\frac{y_1 + 2y_2}{3} - y_2\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{x_1 - x_2}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2}{3}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = \frac{1}{3}AB, \text{ więc } AP + PB = AB.$$

21. Należy sprawdzić, że spełnione są własności odległości w zbiorze.

Oczywiście $AB = \dfrac{a + b - 2w}{a + b - w} \geqslant 0$, gdyż $a \leqslant w$ i $b \leqslant w$. Ponadto:

1. $AB = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a + b - 2w}{a + b - w} = 0 \Leftrightarrow a + b = 2w \Leftrightarrow a = b$.

2. $AB = \dfrac{a + b - 2w}{a + b - w} = \dfrac{b + a - 2w}{b + a - w} = BA$.

Rozważmy teraz dowolne trzy obszary leśne A, B, C. Musimy wykazać, że

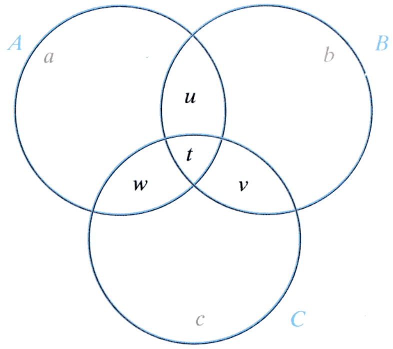
3. $AC \leqslant AB + BC.$

W dowodzie tym skorzystamy z takich oto własności nierówności w zbiorze R liczb rzeczywistych:

(*) Jeżeli $x \geqslant 0,\ y > 0,\ z \geqslant 0$ i $\frac{x}{y} \leqslant 1$, to $\frac{x+z}{y+z} \leqslant \frac{x}{y}$;

(**) Jeżeli $x \geqslant 0,\ y > 0,\ z \geqslant 0$ i $\frac{x}{y} \leqslant 2$, to $\frac{x+2z}{y+2z} \geqslant \frac{x}{y}$.

(Wykaż je!)



Ryc. 7.

Przyjmijmy oznaczenia: a, b, c – liczby gatunków odpowiednio na obszarach A, B, C (i tylko na nich); u, v, w – liczby gatunków wspólnych obu obszarom odpowiednio A i B, B i C, C i A; t – liczba gatunków wspólnych wszystkim obszarom A, B i C (ryc.7). Wówczas

$$AB = \frac{(a+u+w+t)+(b+u+v+t)-2(u+t)}{(a+u+w+t)+(b+u+v+t)-(u+t)} = \frac{a+b+v+w}{a+b+u+v+w+t} \text{ i analogicznie}$$

$$BC = \frac{b+c+u+w}{b+c+u+v+w+t},\ AC = \frac{a+c+u+v}{a+c+u+v+w+t}.$$

Zatem rzeczywiście

$$AB+BC = \frac{a+b+v+w}{a+b+u+v+w+t} + \frac{b+c+u+w}{b+c+u+v+w+t} \overset{(*)}{\geqslant} \frac{a+b+v+w+c}{a+b+u+v+w+t+c} +,$$

$$+\frac{a+b+c+u+w}{a+b+c+u+v+w+t} = \frac{2(a+c)+2w+u+v+2b}{a+c+u+v+w+t+b} \overset{(**)}{\geqslant} \frac{2(a+c)+2w+u+v}{a+c+u+v+w+t} =$$

$$= \frac{a+c+u+v}{a+c+u+v+w+t} + \frac{a+c+2w}{a+c+u+v+w+t} \geqslant \frac{a+c+u+v}{a+c+u+v+w+t} = AC.$$

co kończy dowód trzeciej własności.

2.

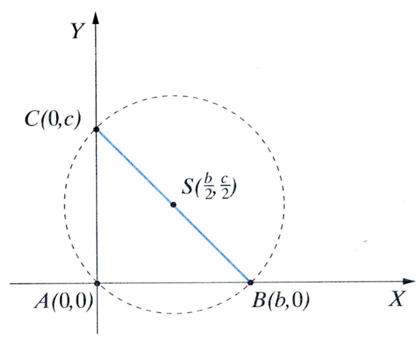
4. Na okręgu (A, r). **5.** a) $(0, -1), 2$; b) $(1, 0), \sqrt{3}$; c) $(2, -2), 3$; d) równanie to przedstawia punkt $(1, -1)$; e) $(0, 1), \sqrt{5}$; f) $(1, -1), 4$; g) nierówność ta przedstawia punkt $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$; h) $(-2, 0), 2$; i) $(2, 2), 4$. **6.** a) na zewnątrz; b) wewnątrz; c) na okręgu; d) na okręgu.

7. Wprowadźmy układ współrzędnych i oznaczenia jak na rycinie 8. Wówczas środek S odcinka BC ma współrzędne $\left(\frac{b}{2}, \frac{c}{2}\right)$. I widzimy, że

$$SA^2 = \left(\frac{-b}{2}\right)^2 + \left(\frac{-c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{4},$$

$$SB^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{-c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{4},$$

$$SC^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{-c}{2}\right)^2 = \frac{b^2+c^2}{4} \text{ skąd } SA = SB = SC.$$

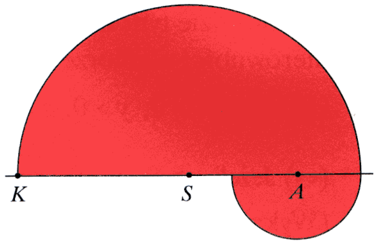


Ryc. 8.

Oznacza to, że S jest środkiem okręgu przechodzącego przez punkty A, B, C. Zatem BC jest średnicą tego okręgu. Uwaga. Spróbuj rozwiązać to zadanie bez współrzędnych.

8. Skorzystaj z tego, że każda cięciwa koła jest nie większa od jego średnicy.

9. Zobacz rycinę 9.



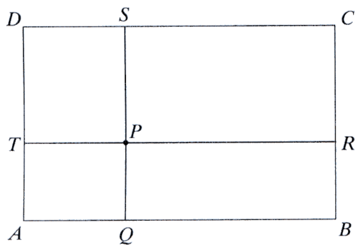
Ryc. 9.

3.

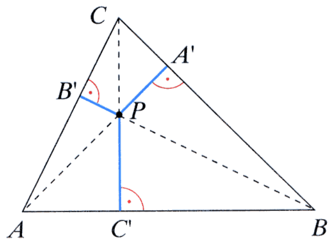
3. a) Przyjmując oznaczenia jak na rycinie 10, otrzymujemy nierówności: $PQ < PA$, $PR < PB$, $PS < PC$, $PT < PD$, z których wynika, że rzeczywiście $PQ + PR + PS + PT < PA + PB + PC + PD$.
b) $PQ + PR + PS + PT = (PQ + PS) + (PR + PT) = AB + BC$.

4. Mamy (ryc. 11) nierówności: $PA' < PC$, $PB' < PA$, $PC' < PB$, z których wynika, że $PA' + PB' + PC' < PA + PB + PC$.

5. Wskazówka: Zastosuj wzór na pole trójkąta i wykaż, że ta suma równa jest wysokości danego trójkąta równobocznego.

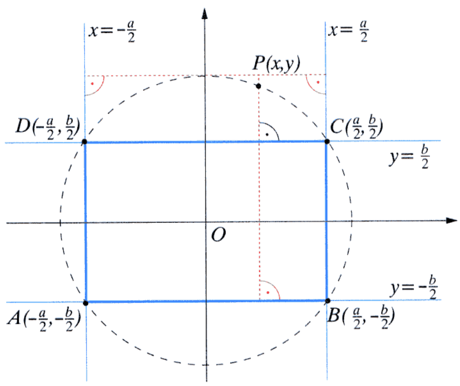


Ryc. 10.



Ryc. 11.

6. Obierzmy tak układ współrzędnych, aby jego osie były równoległe do boków danego prostokąta, a początek był punktem przecięcia się przekątnych tego prostokąta (ryc. 12).
Wówczas boki tego prostokąta leżą na prostych o równaniach: $x = \frac{a}{2}$, $x = -\frac{a}{2}$, $y = \frac{b}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$. Wobec tego odległości dowolnego punktu $P = (x, y)$ okręgu opisanego na tym prostokącie (okrąg ten ma równanie $(*)\ x^2 + y^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}$) od wymienionych prostych wynoszą odpowiednio: $\left|x - \frac{a}{2}\right|$, $\left|x + \frac{a}{2}\right|$, $\left|y - \frac{b}{2}\right|$, $\left|y + \frac{b}{2}\right|$. Zatem rzeczywiście



Ryc. 12.

$$\left|x - \frac{a}{2}\right|^2 + \left|x + \frac{a}{2}\right|^2 + \left|y - \frac{b}{2}\right|^2 + \left|y + \frac{b}{2}\right|^2 = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 =$$
$$= 2\left(x^2 + y^2 + \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\right) \overset{(*)}{=} 2\left(\frac{a^2 + b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{4}\right) = 2 \cdot \frac{a^2 + b^2}{2} = a^2 + b^2.$$

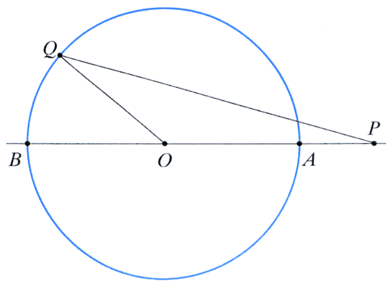
Uwaga. Spróbuj rozwiązać to zadanie bez współrzędnych.

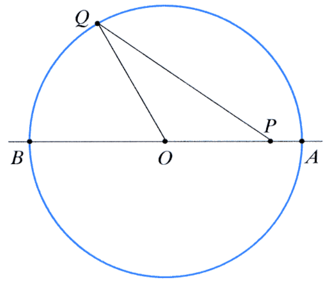
7. a) $\frac{4}{5}$; b) 0.

4.

4. a) prosta jest styczna do okręgu; b) prosta przecina okrąg w dwóch punktach; c) prosta i okrąg nie mają punktu wspólnego.

5. Poprowadźmy przez dany punkt P i środek O danego okręgu prostą. Punkty przecięcia się tej prostej z okręgiem oznaczmy przez A i B. Wówczas dla dowolnego punktu Q danego okręgu, różnego od A i B (ryc. 13), zachodzą nierówności:
$PQ < PO + OQ = PO + OB = PB$ oraz
$PQ > |PO - OQ| = OQ - OP = OA - OP = OP + PA - OP = PA$, gdyż $OQ = OB = OA$.

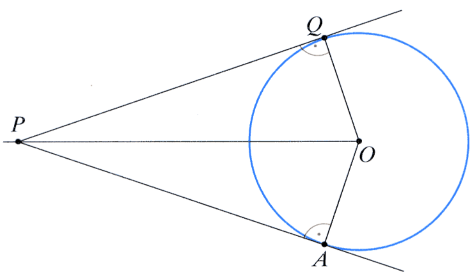




Ryc. 13.

Rycina obejmuje przypadki, gdy punkt P leży albo poza danym okręgiem, albo wewnątrz koła o danym okręgu. W przypadku, gdy punkt P leży na danym okręgu, teza zadania wynika z własności cięciw okręgu.

6. Teza zadania wynika z przystawania trójkątów prostokątnych PAO i PBO (ryc. 14).



Ryc. 14.

5.

3. a) okręgi są styczne zewnętrznie; b) okręgi leżą jeden na zewnątrz drugiego; c) okręgi są styczne wewnętrznie; d) okręgi są styczne zewnętrznie; e) okręgi przecinają się.

4. a) okręgi leżą jeden na zewnątrz drugiego; b) pierwszy okrąg leży wewnątrz koła o drugim okręgu.

5. 1, 2 i 4. **6.** $r_1 = 1$, $r_2 = 1{,}5$, $r_3 = 3$.

6.

5. Koło K' o środku w punkcie P, styczne wewnętrznie do danego koła i wszystkie otoczenia punktu P zawarte w kole K'.

8. Gdyby figura F była figurą ograniczoną, zawierałaby się w pewnym kole. Zatem w kole tym musiałaby się zawierać także półprosta zawarta w figurze F, co nie jest możliwe (dlaczego?).

9. Figura F zawarta w figurze ograniczonej, a więc zawierającej się w pewnym kole, także się zawiera się w tym kole. Jest więc figurą ograniczoną.

10. $\frac{\pi a^2}{4}$. **11.** $\frac{\pi a^2}{4}$.

12. Zawodnik na torze środkowym ma punkt startowy wysunięty do przodu o 4π w stosunku do zawodnika na torze wewnętrznym, a na torze zewnętrznym o 8π.

8.

5. 20°. **6.** 105°.

7. Należy wykazać, że $\gamma = \alpha + \beta$ (ryc. 15). Dorysujmy jeszcze cięciwę DA. Wówczas zauważymy, że $\sphericalangle ADB = \alpha$, zaś $\sphericalangle CAD = \beta$. A ponieważ γ jest kątem zewnętrznym trójkąta ASD, dlatego rzeczywiście $\gamma = \alpha + \beta$.

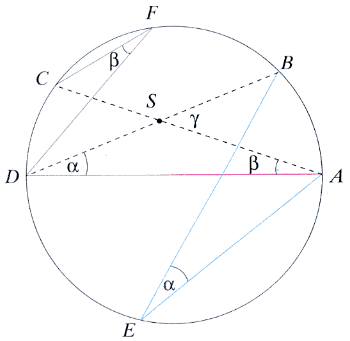
12. $\sphericalangle COM = 70^\circ$, więc $\sphericalangle OCM = \sphericalangle ODM = 35^\circ$ (ryc. 16). A ponieważ $\sphericalangle OMD = 105^\circ$, dlatego $\sphericalangle AOD = 180^\circ - \left(105^\circ + 35^\circ\right) = 40^\circ$.

13. Zauważmy, że $\sphericalangle BAM = \sphericalangle AKM$ i $\sphericalangle ABM = \sphericalangle MKB$, na mocy twierdzenia o kącie między styczną i sieczną (ryc. 17). Wobec tego
$\sphericalangle AMB + \sphericalangle AKB = \sphericalangle AMB + \sphericalangle AKM + \sphericalangle MKB = \sphericalangle AMB + \sphericalangle BAM + \sphericalangle ABM = 180^\circ$.

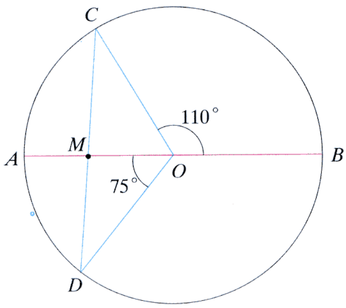
14. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rycinie 18. Wówczas na podstawie przykładu 8b otrzymujemy:

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_1B_1} + \overset{\frown}{D_1C_1}\right) = \frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{A_1B} + \overset{\frown}{BB_1} + \overset{\frown}{D_1D} + \overset{\frown}{DC_1}\right) =$$

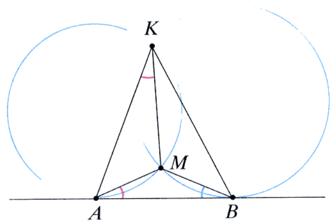
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{CD} + \frac{1}{2}\overset{\frown}{DA}\right) = \frac{1}{4}\left(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{BC} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{DA}\right) = \frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{\pi}{2}.$$



Ryc. 15.



Ryc. 16.



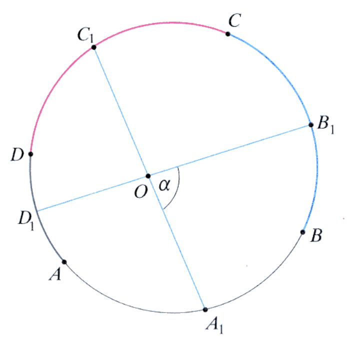
Ryc. 17.

9.

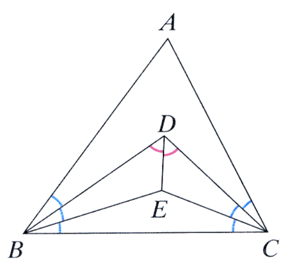
3. Zauważmy, że odcinki BE i CE są dwusiecznymi kątów trójkąta BCD (ryc. 19). Wobec tego DE także jest dwusieczną kąta w tym trójkącie. Kończy to dowód tezy zadania.

5. Sposób I. Przedłużmy odcinek AH do przecięcia się z bokiem BC w punkcie F (ryc.20). Ponieważ trójkąty ADH i BDC są prostokątne i równoramienne (bo $HD = AD$, $DB = CD$ i $\sphericalangle BDC = 90^\circ$), więc trójkąt CFH jest także prostokątny i równoramienny. Wobec tego odcinek AF jest prostopadły do boku BC trójkąta ABC, więc jest wysokością tego trójkąta. Z twierdzenia o przecinaniu się wysokości w trójkącie wynika, że BE jest wysokością trójkąta ABC.

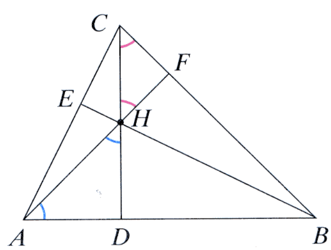
Sposób II. Trójkąty DBH i ADC mają po dwa odpowiadające sobie boki równe i kąty między nimi równe (ryc. 21).



Ryc. 18.



Ryc. 19.



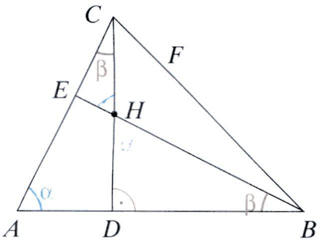
Ryc. 20.

Zatem są przystające. Stąd $\alpha+\beta=90^\circ$, bo trójkąt ADC jest prostokątny. Wobec tego trójkąt CEH jest także prostokątny, o kącie prostym przy wierzchołku E. Stąd wynika teza zadania.

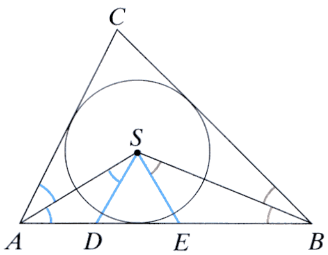
6. Połączmy punkt S z wierzchołkami A i B danego trójkąta ABC (ryc. 22).
Odcinki AS i BS leżą oczywiście na dwusiecznych kątów tego trójkąta. Widzimy więc, że $AD=DS$ i $EB=ES$. Zatem $AB=AD+DE+EB=DS+DE+ES$.

7. Zauważmy, że trójkąty APS i BQS są równoramienne (ryc. 23), w których $AP=PS$ i $BQ=QS$. Zatem $PQ=PS+SQ=AP+BQ$.

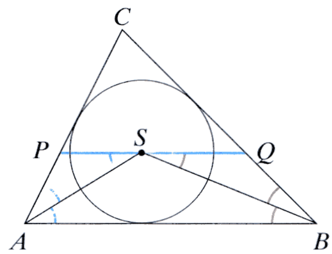
8. a) Zauważ, że jeśli P jest ortocentrum trójkąta $A'B'C'$ (ryc. 24.), to jego boki $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ są równoległe odpowiednio do boków AB, BC i CA trójkąta ABC. Pozosta-



Ryc. 21.

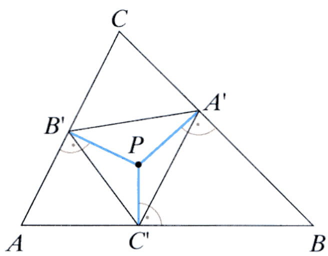


Ryc. 22.



Ryc. 23.

je jeszcze tylko spostrzec, że wtedy czworokąty: $AC'A'B'$, $C'BA'B'$ i $A'CB'C'$ są równoległobokami mającymi parami wspólny bok i stąd otrzymać tezę zadania.



Ryc. 24.

b) Jeśli P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC, to punkty A', B' i C' są środkami boków BC, CA i AB tego trójkąta. Wobec tego boki $A'B'$, $B'C'$ i $C'A'$ trójkąta $A'B'C'$ są równoległe odpowiednio do boków AB, BC i CA trójkąta ABC.

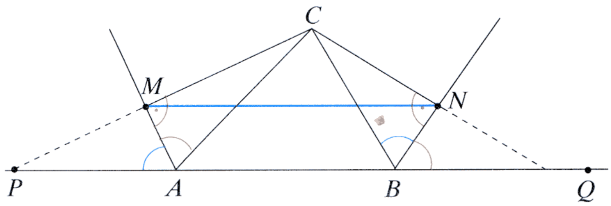
c) Jeśli P jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $A'B'C'$, to $PA'=PB'=PC'$. A ponieważ odcinki PA', PB', PC', są prostopadłe do boków trójkąta ABC, więc rzeczywiście P jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt.

9. Niech A', B' i C' będą środkami boków BC, CA i AB trójkąta ABC. Wówczas
$A'=\left(\frac{x_2+x_3}{2},\frac{y_2+y_3}{2}\right)$, $B'=\left(\frac{x_3+x_1}{2},\frac{y_3+y_1}{2}\right)$ i $C'=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$. Teraz wykaż, że $AS=2\cdot SA'$ i $AS+SA'=AA'$ i podobnie $BS=2\cdot SB'$ i $BS+SB'=BB'$ oraz $CS=2\cdot SC'$ i $CS+SC'=CC'$. (Zob. przykład 8, podrozdz. 1).

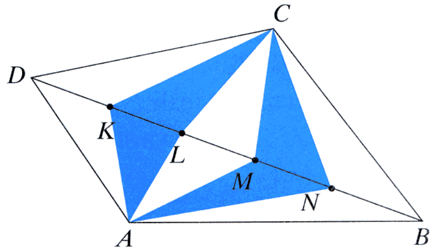
10. Przedłużmy odcinki CM i CN do przecięcia się z prostą AB odpowiednio w punktach P i Q (ryc. 25). Otrzymamy trójkąty PAC i QBC, w których dwusieczne kątów PAC i QBC są wysokościami. Trójkąty te są więc równoramienne, a w nich odpowiednio $PA=AC$ i $QB=BC$, a ponadto $PM=MC$ i $QN=NC$. Punkty M i N są zatem środkami boków PC i QC trójkąta PQC. Wobec tego odcinek MN jest równoległy do boku PQ tego trójkąta oraz $MN=\frac{1}{2}PQ$. Stąd $MN=\frac{1}{2}PQ=\frac{1}{2}(PA+AB+BQ)=\frac{1}{2}(AC+AB+BC)$.

10.

5. Dzielimy najpierw jedną z przekątnych na pięć równych odcinków (ryc. 26), a następnie punkty podziału tej przekątnej łączymy odcinkami z wierzchołkami czworokąta nienależącymi do tej przekątnej. W ten sposób otrzymujemy żądany podział czworokąta na pięć wielokątów o równych polach.



Ryc. 25.



Ryc. 26.

6. Oznaczmy przez M środek boku CD. Poprowadźmy prostą MB i obierzmy na niej taki punkt C', aby $CC' = CD$ (ryc. 27).
Przez wierzchołek B poprowadźmy równoległą do CC', przecinającą bok CD w punkcie Y. Wykażemy, że punkt Y i jego odbicie X względem punktu M są poszukiwanymi punktami. Istotnie, z twierdzenia Talesa zastosowanego do kąta BMC i prostych YB i CC' otrzymujemy $MY = \frac{1}{2} YB$, skąd $XY = YB$. Podobnie $XY = AX$.

7. Oznaczmy przez P i Q punkty, w których przekątną BD danego prostokąta przecinają odpowiednio odcinki AN i CM (ryc. 28).
Równość odcinków DP i PQ otrzymujemy z twierdzenia Talesa zastosowanego do kąta BDC i prostych PN i QC, a równość odcinków PQ i QB – z twierdzenia Talesa zastosowanego do kąta ABD i prostych AP i MQ. Zatem rzeczywiście $DP = PQ = QB$.

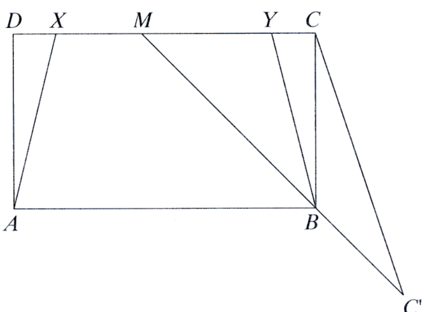
11.

1. a) $OA = 3\frac{3}{4}$ cm; b) $CD = 11\frac{1}{4}$ cm; c) $AC = 9$ cm; d) $DB = 32$ cm. **2.** 7 cm, 14 cm.

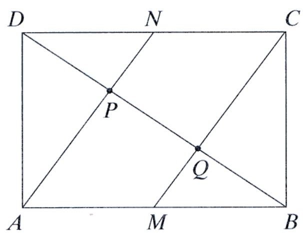
3. $AB = 22$ cm. **4.** 24 cm. **5.** 17,4 m. **6.** 97,5 m.

8. Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o odcinku łączącym środki dwóch boków trójkąta.

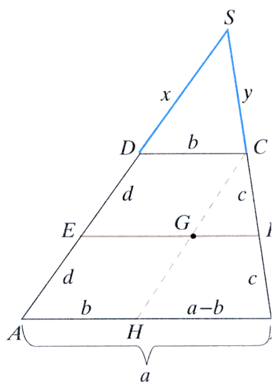
9. Przedłużmy nierównoległe boki AD i BC trapezu $ABCD$ do przecięcia się w punkcie S (ryc. 29). Wówczas na mocy twierdzenia Talesa, zastosowanego do kąta ASB i przecinających jego ramiona prostych DC i AB, otrzymujemy proporcję $\frac{x}{2d} = \frac{y}{2c}$, skąd $\frac{x}{d} = \frac{y}{c}$. To



Ryc. 27.

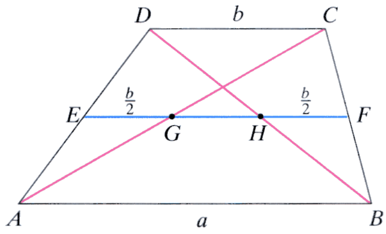


Ryc. 28.



Ryc. 29.

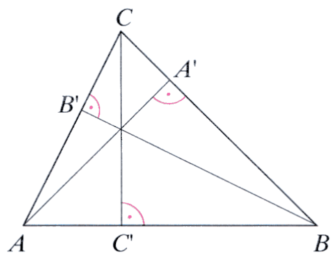
zaś oznacza (na podstawie twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa) równoległość odcinków EF i DC. Odcinek CH, równoległy do AD, przecina się z odcinkiem EF w swoim środku G (wykaż to!). Zatem $GF = \frac{a-b}{2}$, zaś $EG = b$, gdyż czworokąt $EGCD$ jest równoległobokiem. Wobec tego
$EF = EG + GF = b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$.



Ryc. 30.

10. Zauważ najpierw, że odcinek łączący środki nierównoległych boków trapezu (równoległy do jego podstaw i równy ich średnicy arytmetycznej) przecina przekątne tego trapezu w ich środkach. Przy oznaczeniach jak na rycinie 30 otrzymamy wówczas:
$$GH = EF - (EG + HF) = \frac{a+b}{2} - \left(\frac{b}{2} + \frac{b}{2}\right) = \frac{a-b}{2}.$$

13. b) Wskazówka: Skorzystaj z twierdzenia o dwusiecznej kąta w trójkącie.
c) Wystarczy rozważać trójkąt ostrokątny (dlaczego?). Niech ABC będzie takim trójkątem, zaś punkty A', B', C' – spodkami jego wysokości (ryc. 31). Zauważ, że wówczas: $AC' = AC \cdot \cos A$, $C'B = BC \cdot \cos B$, $BA' = AB \cdot \cos B$, $A'C = AC \cdot \cos C$, $CB' = BC \cdot \cos C$, $B'A = AB \cdot \cos A$.
I wobec tego rzeczywiście $\frac{AC'}{C'B} \cdot \frac{BA'}{A'C} \cdot \frac{CB'}{B'A} = 1$, co na mocy twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Cevy, oznacza przecinanie się wysokości AA', BB' i CC' tego trójkąta w jednym punkcie.



Ryc. 31.

12.

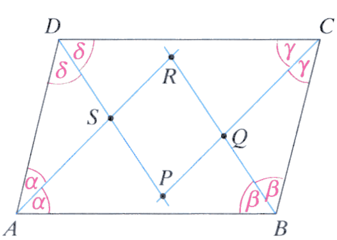
5. $\sphericalangle C = 130^\circ$, $\sphericalangle D = 110^\circ$. **6.** $\sphericalangle A = 60^\circ$, $\sphericalangle B = 45^\circ$, $\sphericalangle C = 120^\circ$, $\sphericalangle D = 135^\circ$.

7. Mamy (ryc. 32) $2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 360^\circ$, czyli $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. W czworokącie $PQRS$: $\sphericalangle S + \sphericalangle Q = 180^\circ - (\alpha + \delta) + 180^\circ - (\beta + \gamma) = 360^\circ - (\alpha + \beta + \gamma + \delta) = 180^\circ$. Zatem czworokąt ten można wpisać w okrąg.

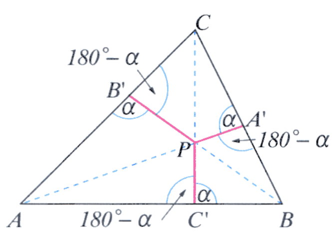
8. Punkty A, Q, P i C leżą na jednym okręgu o średnicy AP. Kąty PAQ i PCQ, jako wpisane w ten okrąg i oparte na tym samym łuku $\overset{\frown}{PQ}$, są więc równe.

9. Załóżmy, że czworokąty $AB'PC'$ i $BC'PA'$ można wpisać w okrąg (ryc. 33). Niech $\sphericalangle AB'P = \alpha$. Wówczas $\sphericalangle CB'P = 180^\circ - \alpha$, zaś $\sphericalangle CA'P = \alpha$. Zatem $\sphericalangle CB'P + \sphericalangle CA'P = 180^\circ$, co dowodzi, że czworokąt $CA'PB'$ można wpisać w okrąg.

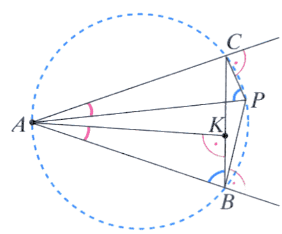
10. Punkty A, B, P i C leżą na jednym okręgu o średnicy AP. Wobec tego $\sphericalangle CPA = \sphericalangle CBA$ (jako kąty wpisane, oparte na tym samym łuku). Stąd wynika równość kątów BAK i PAC (dlaczego?)(ryc. 34.)



Ryc. 32.



Ryc. 33.



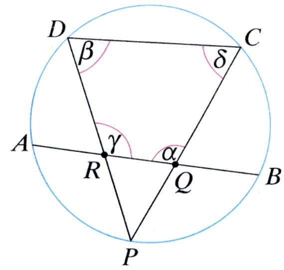
Ryc. 34.

11. Wykażemy, że sumy kątów przeciwległych czworokąta $RQCD$ są równe. Przyjmijmy oznaczenia jak na rycinie 35. Wówczas, na podstawie przykładu 8 z podrozdziału 8, otrzymujemy

$$\alpha+\beta=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{PB}\right)+\frac{1}{2}\overset{\frown}{PC}=\frac{1}{2}\left(\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AP}+\overset{\frown}{PC}\right)=\frac{1}{2}\cdot 2\pi=\pi.$$

Wobec tego również $\gamma+\delta=\pi$.

13. Wykaż, że czworokąt $ACBD$ jest trapezem równoramiennym.

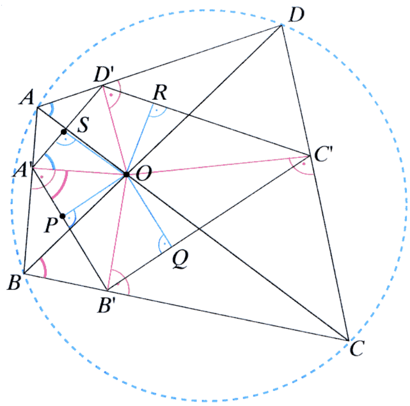


Ryc. 35.

13.

5. Wskazówka: Skorzystaj z zadania 9 z podrozdziału 11 oraz z warunku styczności zewnętrznej dwóch okręgów.

6. Przyjmijmy oznaczenia, jak na rycinie 36.
Czworokąt $A'BB'O$ można wpisać w okrąg, więc $\sphericalangle B'BO=\sphericalangle B'A'O$. Ponieważ czworokąt $A'AD'O$ także można wpisać w okrąg, więc $\sphericalangle OA'D'=\sphericalangle OAD$. Ale, z założenia, czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, więc $\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBD$. Wobec tego $\sphericalangle OA'D'=\sphericalangle CAD=\sphericalangle CBD=\sphericalangle B'A'O$. Stąd wynika, że OA' jest dwusieczną kąta $D'A'B'$. Podobnie wykazujemy, że OB', OC' i OD' są dwusiecznymi odpowiednio kątów $A'B'C'$, $B'C'D'$ i $C'D'A'$. Rzutując punkt O na odcinki $A'B'$, $B'C'$, $C'D'$, $D'A'$ otrzymujemy odpowiednio punkty P, Q, R, S. Wówczas $A'P=A'S$, $B'P=B'Q$, $C'Q=C'R$, $D'R=D'S$, skąd $A'D'+B'C'=A'B'+C'D'$. Równość ta dowodzi tezy zadania.



Ryc. 36.

7. Wskazówka: Skorzystaj z warunku styczności zewnętrznej dwóch okręgów.

8. Wskazówka: Rozważaj czworokąty wklęsłe: $ABPC$, $BCPA$, $CAPB$ (ryc. 37).

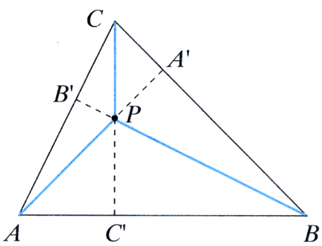
14.

6. Przedłuż odcinek OP (ryc. 38) do takiego punktu P', aby $PP'=OP$. Następnie przez P' poprowadź odcinki równoległe do ramion kąta. Ich końce A i B wyznaczają żądany odcinek.

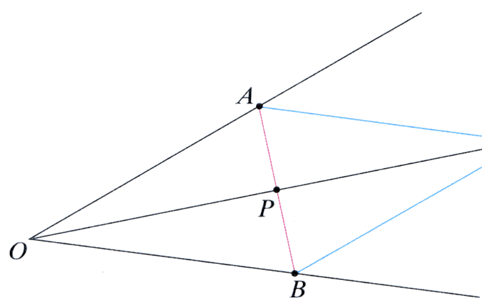
7. Wskazówka: Skorzystaj z zadania 6.

8. 9 i 6. **9.** 60°, 120°, 60°, 120°. **10.** 15 i 17. **11.** 75°, 105°, 75°, 105°.

13. Zobacz zadanie 9.



Ryc. 37.



Ryc. 38.

Literatura pomocnicza

Gdowski B., Pluciński E. *Zadania i testy z matematyki dla uczniów szkół średnich. Klasa I i II.* WNT, Warszawa 1990

Gdowski B., Pluciński E. *Zbiór zadań z matematyki dla kandydatów na wyższe uczelnie.* WNT, Waraszawa 1994

Kourliandtczik L. *Etiudy matematyczne.* Tutor, Toruń 2001

Kourliandtczik L. *Impresje liczbowe.* Tutor, Toruń 2002

Kourliandtczik L. *Powrót do krainy nierówności.* Aksjomat, Toruń 2001

Kourliandtczik L. *Wędrówki po krainie nierówności.* Aksjomat, Toruń 2000

Leksiński W., Macukow B., Żakowski W. *Matematyka dla maturzystów.* WNT, Warszawa 1994

Pawłowski H. *Na olimpijskim szlaku. Zadania dla kółek matematycznych.* Tutor, Toruń 2000

Pawłowski H. *Olimpiady i konkursy matematyczne.* Tutor, Toruń 2002

Pawłowski H. *Zadania z olimpiad matematycznych z całego świata*, cz. I i II. Tutor, Toruń 2002

Pawłowski H., Tomalczyk W. *Zadania z matematyki dla olimpijczyków.* Tutor, Toruń 2001

Tablice

Alfabet grecki

A	α	alpha	H	η	eta	N	ν	ny	T	τ	tau
B	β	beta	Θ	θ	theta	Ξ	ξ	ksi	Y	υ	ypsilon
Γ	γ	gamma	I	ι	iota	O	o	omikron	Φ	φ	phi
Δ	δ	delta	K	κ	kappa	Π	π	pi	X	χ	chi
E	ε	epsilon	Λ	λ	lambda	P	ρ	rho	Ψ	ψ	psi
Z	ζ	dzeta	M	μ	my	Σ	σ	sigma	Ω	ϖ	omega

Popularne liczby niewymierne

$\pi \approx 3{,}14159$ $\sqrt{2} \approx 1{,}41421$ $\sqrt{3} \approx 1{,}73205$ $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}70711$

$\sqrt{5} \approx 2{,}23607$ $\sqrt{7} \approx 2{,}64575$ $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}57735$

Liczby pierwsze od 2 do 199

2	11	23	41	59	73	97	109	137	157	179	197
3	13	29	43	61	79	101	113	139	163	181	199
5	17	31	47	67	83	103	127	149	167	191	
7	19	37	53	71	89	107	131	151	173	193	

Przedrostki	Oznaczenie	Potęgi liczby 10	Nazwa liczby
piko	p	$10^{-12} = 0{,}000\,000\,000\,001$	bilionowa
nano	n	$10^{-9} = 0{,}000\,000\,001$	miliardowa
mikro	μ	$10^{-6} = 0{,}000\,001$	milionowa
mili	m	$10^{-3} = 0{,}001$	tysięczna
centy	c	$10^{-2} = 0{,}01$	setna
decy	d	$10^{-1} = 0{,}1$	dziesiętna
deka	da	$10^{1} = 10$	dziesięć
hekto	h	$10^{2} = 100$	sto
kilo	k	$10^{3} = 1000$	tysiąc
mega	M	$10^{6} = 1\,000\,000$	milion
giga	G	$10^{9} = 1\,000\,000\,000$	miliard
tera	T	$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	bilion
peta	P	$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$	biliard
eksa	E	$10^{18} = 1\,000\,000^{3}$	trylion
		$10^{24} = 1\,000\,000^{4}$	kwadrylion
		$10^{30} = 1\,000\,000^{5}$	kwintylion
		$10^{60} = 1\,000\,000^{10}$	decylion

Cyfry rzymskie

1 – I	1 – I	11 – XI	20 – XX	200 – CC
5 – V	2 – II	12 – XII	30 – XXX	300 – CCC
10 – X	3 – III	13 – XIII	40 – XL	400 – CD
50 – L	4 – IV	14 – XIV	50 – L	500 – D
100 – C	5 – V	15 – XV	60 – LX	600 – DC
500 – D	6 – VI	16 – XVI	70 – LXX	700 – DCC
1000 – M	7 – VII	17 – XVII	80 – LXXX	800 – DCCC
	8 – VIII	18 – XVIII	90 – XC	900 – CM
	9 – IX	19 – XIX	100 – C	1000 – M
	10 – X			

Jednostki długości

kilometr	$1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m} = 100000\,\mathrm{cm}$
metr	$1\,\mathrm{m} = 10\,\mathrm{dm} = 100\,\mathrm{cm} = 0{,}001\,\mathrm{km}$
decymetr	$1\,\mathrm{dm} = 10\,\mathrm{cm} = 100\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{m}$
centymetr	$1\,\mathrm{cm} = 10\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{dm} = 0{,}01\,\mathrm{m}$
milimetr	$1\,\mathrm{mm} = 0{,}1\,\mathrm{cm} = 0{,}01\,\mathrm{dm} = 0{,}001\,\mathrm{m}$

Jednostki masy i ciężaru

tona	$1\,\mathrm{t} = 10\,\mathrm{q} = 1000\,\mathrm{kg}$
kwintal	$1\,\mathrm{q} = 0{,}1\,\mathrm{t} = 100\,\mathrm{kg}$
kilogram	$1\,\mathrm{kg} = 100\,\mathrm{dag} = 1000\,\mathrm{g} = 0{,}001\,\mathrm{t}$
dekagram	$1\,\mathrm{dag} = 10\,\mathrm{g} = 0{,}01\,\mathrm{kg}$
gram	$1\,\mathrm{g} = 1000\,\mathrm{mg} = 0{,}1\,\mathrm{dag} = 0{,}001\,\mathrm{kg}$
miligram	$1\,\mathrm{mg} = 0{,}001\,\mathrm{g}$

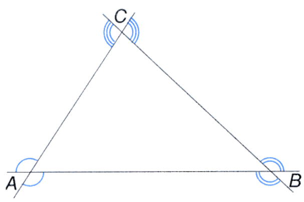
Jednostki pola

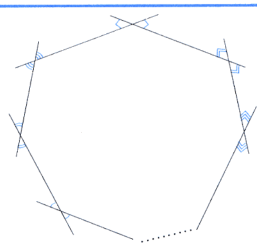
kilometr kwadratowy	$1\,\mathrm{km}^2 = 1000000\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{ha}$
metr kwadratowy	$1\,\mathrm{m}^2 = 100\,\mathrm{dm}^2 = 10000\,\mathrm{cm}^2$
decymetr kwadratowy	$1\,\mathrm{dm}^2 = 100\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{m}^2$
centymetr kwadratowy	$1\,\mathrm{cm}^2 = 100\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{dm}^2 = 0{,}0001\,\mathrm{m}^2$
milimetr kwadratowy	$1\,\mathrm{mm}^2 = 0{,}01\,\mathrm{cm}^2 = 0{,}0001\,\mathrm{dm}^2$
ar	$1\,\mathrm{a} = 100\,\mathrm{m}^2 = 0{,}01\,\mathrm{ha}$
hektar	$1\,\mathrm{ha} = 10000\,\mathrm{m}^2 = 0{,}01\,\mathrm{km}^2 = 100\,\mathrm{a}$

Jednostki objętości i pojemności

metr sześcienny	$1\,\mathrm{m}^3 = 1000\,\mathrm{dm}^3 = 1000000\,\mathrm{cm}^3$
decymetr sześcienny	$1\,\mathrm{dm}^3 = 1000\,\mathrm{cm}^3 = 0{,}001\,\mathrm{m}^3$
centymetr sześcienny	$1\,\mathrm{cm}^3 = 1000\,\mathrm{mm}^3 = 0{,}001\,\mathrm{dm}^3$
litr	$1\,\mathrm{l} = 1000{,}028\,\mathrm{cm}^3 \approx 1\,\mathrm{dm}^3$
hektolitr	$1\,\mathrm{hl} = 100\,\mathrm{l} \approx 100\,\mathrm{dm}^3$
mililitr	$1\,\mathrm{ml} = 0{,}001\,\mathrm{l} \approx 1\,\mathrm{cm}^3$

Kątem zewnętrznym trójkąta (wielokąta) nazywamy każdy z dwóch kątów przyległych do kąta wewnętrznego trójkąta (wielokąta).





PLANIMETRIA

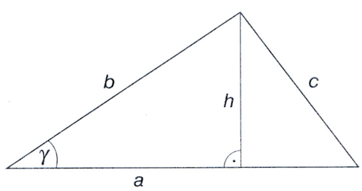
S – pole figury, L – obwód figury, R – promień okręgu opisanego, r – promień okręgu wpisanego.

TRÓJKĄTY

$$L = a + b + c$$

$$S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = pr = \frac{abc}{4R} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

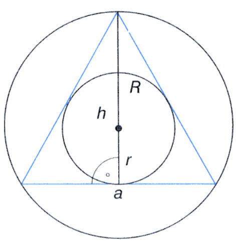
gdzie $p = \frac{1}{2}L$ (wzór Herona).



Trójkąt równoboczny

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad L = 3a,$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}, \quad r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}.$$



Trójkąt prostokątny

W trójkącie prostokątnym ABC zachodzą związki:

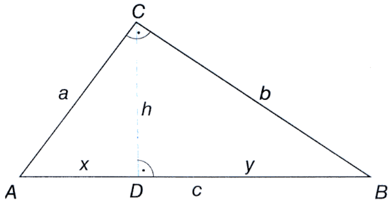
$a^2+b^2=c^2$, $h^2=xy$, $a^2=xc$, $b^2=yc$,

$S=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}ch$, $a^2=xc$, $b^2=yc$, $h=\sqrt{xy}$,

$h=\frac{ab}{c}$, $r=\frac{a+b-c}{2}$, $2R=c$, $r+r_1+r_2=h$,

gdzie r_1 i r_2 oznaczają promienie okręgów wpisanych w trójkąty ADC i DBC,

$r_1^2+r_2^2=r^2$, $h=r+r_1+r_2$.

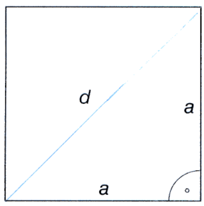


CZWOROKĄTY

Kwadrat

$d=a\sqrt{2}$, $R=\frac{1}{2}d=\frac{a\sqrt{2}}{2}$,

$r=\frac{1}{2}a$, $L=4a$, $S=a^2=\frac{d^2}{2}$.



Prostokąt

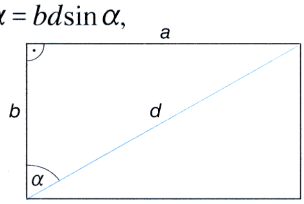
$S=ab=ad\cos\alpha=bd\sin\alpha$,

$d=\sqrt{a^2+b^2}$,

$a=d\sin\alpha$,

$b=d\cos\alpha$,

$L=2a+2b$.



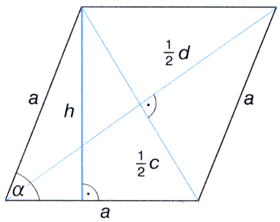
Romb

$a^2=\left(\frac{1}{2}c\right)^2+\left(\frac{1}{2}d\right)^2$,

$h=a\sin\alpha$,

$S=ah=a^2\sin\alpha=\frac{cd}{2}$,

$l=4a$.



Równoległobok

$h=b\sin\alpha$,

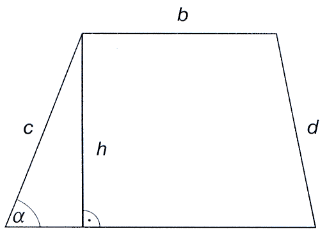
$S=ah=ab\sin\alpha$,

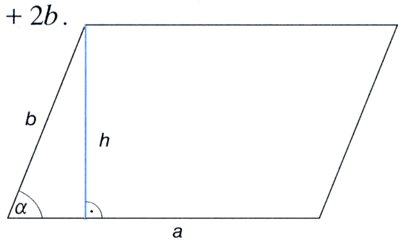
$L=2a+2b$.

Trapez

$L=a+b+c+d$,

$S=\frac{(a+b)h}{2}$.





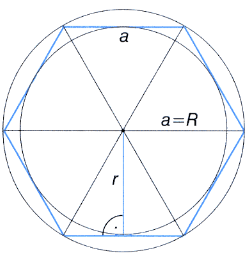
SZEŚCIOKĄT FOREMNY

$R=a$,

$r=\frac{a\sqrt{3}}{2}$,

$L=6a$,

$S=\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}=2\sqrt{3}r^2$.



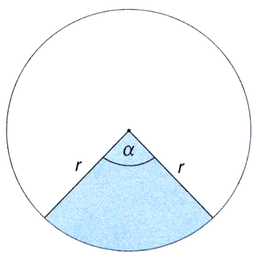
KOŁO I WYCINEK KOŁA

pole koła $S=\pi r^2$,

obwód koła $L=2\pi r$,

pole wycinka $S=\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot\pi r^2$,

długość łuku $L=\frac{\alpha}{360^\circ}\cdot 2\pi r$.



WIELOKĄT WYPUKŁY

Suma miar kątów wewnętrznych dowolnego wielokąta wypukłego o n bokach jest równa $(n-2)\cdot 180^\circ$, a liczba jego przekątnych $\frac{n(n-3)}{2}$. Kąt wewnętrzny n-kąta foremnego ma miarę $\frac{n-2}{n}\cdot 180^\circ$.

Tablica funkcji trygonometrycznych

stopnie	sin	cos	tg	ctg	stopnie	sin	cos	tg	ctg
0	0, 000	1,000	0,000	–	45	0,707	0,707	1,000	1,000
1	0,017	1,000	0,017	57,290	46	0,719	0,695	1,036	0,966
2	0,035	0,999	0,035	28,636	47	0,731	0,682	1,072	0,933
3	0,052	0,999	0,052	19,081	48	0,743	0,669	1,111	0,900
4	0,070	0,998	0,070	14,301	49	0,755	0,656	1,150	0,869
5	0,087	0,966	0,087	11,430	50	0,766	0,643	1,192	0,839
6	0,105	0,995	0,105	9,514	51	0,777	0,629	1,235	0,810
7	0,122	0,993	0,123	8,144	52	0,788	0,616	1,280	0,781
8	0,139	0,990	0,141	7,115	53	0,799	0,602	1,327	0,754
9	0,156	0,988	0,158	6,314	54	0,809	0,588	1,376	0,727
10	0,174	0,985	0,176	5,671	55	0,819	0,574	1,428	0,700
11	0,191	0,982	0,194	5,145	56	0,829	0,559	1,483	0,675
12	0,208	0,978	0,213	4,705	57	0,839	0,545	1,540	0,649
13	0,225	0,974	0,231	4,331	58	0,848	0,530	1,600	0,625
14	0,242	0,970	0,249	4,011	59	0,857	0,515	1,664	0,601
15	0,259	0,966	0,268	3,732	60	0,866	0,500	1,732	0,577
16	0,276	0,961	0,287	3,487	61	0,875	0,485	1,804	0,554
17	0,292	0,956	0,306	3,271	62	0,883	0,469	1,881	0,532
18	0,309	0,951	0,325	3,078	63	0,891	0,454	1,963	0,510
19	0,326	0,946	0,344	2,904	64	0,899	0,438	2,050	0,488
20	0,342	0,940	0,364	2,747	65	0,906	0,423	2,145	0,466
21	0,358	0,934	0,384	2,605	66	0,914	0,407	2,246	0,445
22	0,375	0,927	0,404	2,475	67	0,921	0,391	2,356	0,424
23	0,391	0,921	0,424	2,356	68	0,927	0,375	2,475	0,404
24	0,407	0,914	0,445	2,246	69	0,934	0,358	2,605	0,384
25	0,423	0,906	0,466	2,145	70	0,940	0,342	2,747	0,364
26	0,438	0,899	0,488	2,050	71	0,946	0,326	2,904	0,344
27	0,454	0,891	0,510	1,963	72	0,951	0,309	3,078	0,325
28	0,469	0,883	0,532	1,881	73	0,956	0,292	3,271	0,306
29	0,485	0,875	0,554	1,804	74	0,961	0,276	3,487	0,287
30	0,500	0,866	0,577	1,732	75	0,966	0,259	3,732	0,268
31	0,515	0,857	0,601	1,664	76	0,970	0,242	4,011	0,249
32	0,530	0,848	0,625	1,600	77	0,974	0,225	4,331	0,231
33	0,545	0,839	0,649	1,540	78	0,978	0,208	4,705	0,213
34	0,559	0,829	0,675	1,483	79	0,982	0,191	5,145	0,194
35	0,574	0,819	0,700	1,428	80	0,985	0,174	5,671	0,176
36	0,588	0,809	0,727	1,376	81	0,988	0,156	6,314	0,158
37	0,602	0,799	0,754	1,327	82	0,990	0,139	7,115	0,141
38	0,616	0,788	0,781	1,280	83	0,993	0,122	8,144	0,123
39	0,629	0,777	0,810	1,235	84	0,995	0,105	9,514	0,105
40	0,643	0,766	0,839	1,192	85	0,996	0,087	11,430	0,087
41	0,656	0,755	0,869	1,150	86	0,998	0,070	14,301	0,070
42	0,669	0,743	0,900	1,111	87	0,999	0,052	19,081	0,052
43	0,682	0,731	0,933	1,072	88	0,999	0,035	28,636	0,035
44	0,695	0,719	0,966	1,036	89	1,000	0,017	57,290	0,017
45	0,707	0,707	1,000	1,000	90	1,000	0,000	–	0,000

Indeks

W ramach serii „Szkoła XXI" Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON proponuje zintegrowany zestaw dydaktyczny do nauki matematyki dla liceum ogólnokształcącego, liceum profilowanego i technikum.

KONSULTOWANE w 5000 SZKÓŁ

- Program nauczania

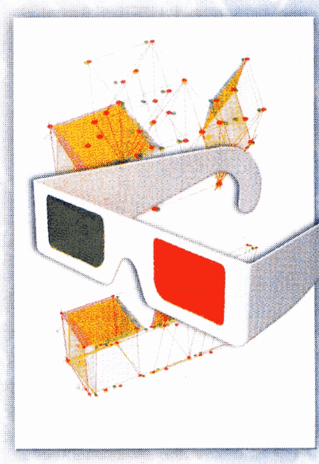
- Podręcznik zakres podstawowy

- Podręcznik zakres rozszerzony

- Przewodnik dla nauczyciela

- Zbiór zadań

- Stereogramy



- Tomy 2 i 3 w przygotowaniu

ISBN 83-87518-66-2

Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON
www.operon.com.pl
e-mail: info@operon.pl
tel. centrali (058) 679 53 53

Wydawnictwo Pedagogiczne OPERON